El Principio de Dirichlet (o una excusa para pensar matemática

Juan Sabia

1. Introducción

Este trabajo se basa en dos charlas de divulgación que di en distintos ámbitos. El objetivo de una era tratar de describir mediante un ejemplo sencillo la tarea que realiza un matemático cuando investiga. El de la otra era plantear una posible situación de clase donde el estudiante fuese "descubriendo" la teoría a partir de la resolución de problemas, basándome en (mis escasos conocimientos de) la teoría de situaciones didácticas de G. Brousseau (ver [2]). Quiero subrayar que creo que los dos acercamientos son en el fondo el mismo: los matemáticos desarrollan herramientas para resolver problemas y es así como generan (y adquieren) nuevos conocimientos.

El esquema a seguir podría resumirse en el siguiente diagrama:

Problema
$\downarrow$
Solución $\leftrightarrow$ Teoría
$\downarrow$
Otros usos de la teoría
$\downarrow$
Generalización
$\downarrow$
Aplicaciones de la teoría generalizada
$\downarrow$
Nuevo problema

Como puede verse, el punto de llegada coincide con el de partida en lo que puede parecer un círculo vicioso pero que va resolviendo, en la medida de lo posible, los problemas planteados y genera nuevo conocimiento.

Es claro que el trabajo del investigador no es tan prolijo, lineal ni clasificable como se pretende en este texto. Los nuevos problemas pueden generarse en cualquier momento, una teoría puede no tener una generalización, diversas aplicaciones de las teorías propuestas pueden surgir también a destiempo o simplemente, puede no encontrarse una solución a un problema propuesto por años. Sin embargo, este esquema me resultó útil para explicar *aproximadamente* cómo es el proceso de trabajo de un matemático. Lo que sí es cierto es que siempre el proceso se origina con un problema que hay que resolver, porque la tarea del matemático es ésta: resolver problemas.

Para ejemplificar el trabajo de un matemático, se utilizó un tema fácil y conocido (el Principio de Dirichlet) pero que no figura en casi ningún currículum escolar. El diseño de este artículo está pensado para que alguien que no conozca de antemano el Principio de Dirichlet pueda familiarizarse con él mediante la resolución de problemas que van apuntando a la formalización de la teoría. Sugiero al lector que decida hacer esto que, cada vez que se encuentre con un problema en el texto, se tome su tiempo para pensar e intentar resolverlo por su cuenta antes de seguir avanzando en la lectura (y llegar a leer la solución que está ubicada más adelante), para así poder "construir" el saber en forma personal. Todos los problemas planteados en este trabajo son clásicos y figuran (junto a muchos otros) en muchos de la gran cantidad de textos, notas y artículos que hablan sobre el Principio de Dirichlet (sólo como ejemplo, citamos los libros [5] y [3]).

2. Esquema

Primeros problemas

Nuestro punto de partida es el siguiente problema que suele aparecer (así o con un enunciado parecido) como acertijo o problema de ingenio:

Problema 1: *En un cajón de mi cuarto guardo todas mis medias sueltas en forma un poco desordenada. Tengo 24 medias blancas iguales y 11 medias negras iguales (sí, una de mis medias perdió a su par). Cuando voy a trabajar por la mañana me levanto muy temprano y no quiero despertar a mi esposa, así que no enciendo la luz y saco las medias a tientas. ¿Cuál es el número mínimo de medias que tengo que sacar para asegurarme que, al salir de la habitación, pueda armar un par de medias del mismo color?*

Otro problema, del mismo tipo, podría agregar colores de medias en cuestión:

Problema 2: *Si en el cajón, a oscuras, hay 6 medias negras, 8 medias blancas, 12 medias rojas, 6 verdes y una media amarilla a lunares, ¿cuántas medias será ne-*

cesario sacar como mínimo ahora para poder armar un par?

Estos problemas pueden resolverse sin necesidad de ninguna teoría previa, ni grandes conocimientos matemáticos. Sólo hace falta pensar un rato e intentar llegar a una respuesta. Está claro que el señor de las medias podría sacar todas las medias del cajón y llevárselas. Así evidentemente podrá armar un par pero la pregunta es cuál es el número *mínimo* de medias necesario para hacerlo.

Primeras soluciones

Solución al problema 1: El número mínimo es tres medias. Como sólo hay dos colores de medias, si saca una media, evidentemente, no va a poder armar ningún par, con dos puede tener la mala suerte de sacar una blanca y una negra, pero con tres es seguro que algún color se va a repetir y se podrá armar un par.

Es cierto que el señor podría tener suerte y con sacar dos medias ya poder armar un par, pero el problema es contestar la cantidad mínima necesaria para *asegurar* que pueda armar un par, y con dos medias no se puede asegurar nada.

Solución al problema 2: Como ahora hay cinco colores de medias, la cantidad mínima necesaria de medias es seis, ya que no hay seis colores distintos. Notar que hasta cinco medias, se puede tener la mala suerte de sacar una de cada color.

Teoría

Lo que sigue es intentar modelizar el procedimiento de resolución de ambos problemas para, eventualmente, sugerir un principio o una teoría que nos permita resolver nuevos problemas similares (o quizás no tan similares).

Una forma de hacerlo (que probablemente no sea la única) es la siguiente:

En el caso del Problema 1, supongamos que en la cocina de la casa del señor de las medias, donde se puede encender la luz sin molestar a nadie, ubicamos dos cajas vacías: una con un cartel que diga “MEDIAS BLANCAS” y la otra con uno que diga “MEDIAS NEGRAS”. El señor va a su dormitorio, saca a oscuras la cantidad de medias que considere necesaria y va a la cocina. Allí, con la luz encendida, ubica las medias en las cajas de acuerdo a su color. A la tercer media, una caja necesariamente va a tener que tener por lo menos dos medias ya que sólo hay dos cajas. Por lo tanto, con tres medias ya puede asegurar que va a poder armar un par y evidentemente con dos podría sacar una de cada color, así que con dos no es suficiente.

En el caso del Problema 2, podemos proceder en forma similar pero ubicando cinco cajas, una por cada color de medias. Si el señor reparte entre estas cajas seis medias, evidentemente una caja terminará teniendo por lo menos dos medias, y ya podrá armar un par, mientras que con cinco medias no es suficiente porque podría tener la mala suerte de sacar una de cada color y no formar ningún par.

El principio que engloba estas dos situaciones podría “conjeturarse” así:

Teorema 1. *Si hay más de d objetos para repartir en d cajas de forma tal que cada objeto vaya necesariamente a parar dentro de alguna caja, no importa la forma en que se distribuyan estos objetos, en alguna caja habrá más de un objeto.*

Como toda conjetura matemática, un teorema debe tener una demostración que la valide:

Demostración. Si en las d cajas quedara 1 objeto o ninguno, el total de objetos sería menor o igual que el número de cajas, que es d. Esto es absurdo, pues había más de d objetos. $\square$

Este teorema es conocido como el Principio de los casilleros, Principio del palomar o Principio de Dirichlet (aparentemente, el matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) fue el primero en formalizarlo). Probablemente se lo llame “principio” y no “teorema” porque la propiedad que establece es evidente.

En jerga matemática, el Principio de Dirichlet dice que cualquier función de un conjunto de n elementos en otro de d elementos no puede ser inyectiva si $n > d$. Esto último puede probarse por inducción en d, por ejemplo, pero es tan claro que es dudoso que valga la pena tomarse el trabajo.

Digresiones:

- Un hecho interesante de los problemas anteriores es que, como suele suceder con los problemas reales, no se usan todos los datos que se tienen. De hecho, es irrelevante la cantidad de medias de cada color que haya, mientras que el dato realmente útil es la cantidad de colores distintos que hay.

- Pensemos ahora qué pasa si cambiamos el problema:

  Problema 3: *El señor de las medias tiene el mismo problema con los zapatos: en su habitación a oscuras, hay 2 pares de mocasines negros indistinguibles* *entre sí , 3 pares de zapatos marrones indistinguibles entre sí y 1 par de zapatos más claros. ¿Cuántos zapatos tendrá que sacar como mínimo para poder armar un par?*

¿Es exactamente igual el problema o hay alguna variante?

Solución al problema 3: Una solución errónea sería “copiar” el razonamiento anterior a este caso: como hay tres tipos de zapatos, con sacar cuatro zapatos se asegura que haya dos zapatos del mismo tipo... ¡pero podrían ser los dos del mismo pie! Hay que cambiar el modelo de alguna forma para poder dar respuesta a esta pregunta.

Una posible adaptación sería que pensemos que, en la cocina, haya una caja por cada par, es decir seis cajas en total, y que, con los zapatos que trae el señor de la habitación, las llene de la siguiente manera: ubica primero los zapatos izquierdos, uno en cada caja. Una vez terminado este proceso, si quedan zapatos derechos, los empareja por color con los izquierdos, o bien en caso de que no haya izquierdo del mismo color o que los que haya ya estén emparejados, lo ubica en una caja vacía. Ahora sí estamos en condiciones de contestar cuántos zapatos debe sacar para poder armar un par: el número mínimo es siete. Al haber seis pares de zapatos, sacando hasta seis zapatos puede tener la mala suerte de que sean todos del mismo pie o de distinto pie pero también de distintos colores, con lo cual quedará a lo sumo uno por caja. Sin embargo, con siete zapatos y seis cajas, en alguna quedarán por lo menos dos por el Principio de Dirichlet. Por la forma en que se ubican los zapatos en las cajas, en la que haya dos, habrá exactamente un par (un dato irrelevante para la resolución pero cierto es que el método de distribución de zapatos propuesto hace que nunca pueda haber más de dos zapatos por caja).

Notar que, en este caso, el dato irrelevante es la clasificación de los pares de zapatos en colores y formas: si hay seis pares de zapatos de *cualquier tipo*, habrá que sacar siete zapatos para asegurarse de conseguir un par.

Otros usos de la teoría

Hay un ejemplo clásico (y ubicuo cuando del Principio de Dirichlet se trata) sobre la cantidad de cabellos y de personas: en una cabeza humana hay a lo sumo 150.000 cabellos. Supongamos que, para cubrir eventuales casos especiales, como máximo una cabeza humana puede tener 200.000 cabellos. Entonces, en toda ciudad con más de 200.001 habitantes, habrá por lo menos dos personas con la misma cantidad de cabellos. Para convencernos, bastará suponer que hay 200.001 cajas cada una con un cartel que diga una cantidad distinta de cabellos entre 0 y 200.000. Si repartimos a las personas en las cajas según su número de cabellos, como hay más personas que cajas, el Principio de Dirichlet nos asegura que en alguna habrá más de una persona, y esto prueba que hay por lo menos dos personas con igual cantidad de cabellos.

El Principio de Dirichlet puede utilizarse para resolver los problemas que se plantean a continuación. Antes de leerlos, sugiero que el lector trate de pensar por su cuenta situaciones distintas de las anteriores en las que el Principio de Dirichlet sirva para hallar la respuesta a algunas preguntas. Las soluciones de los problemas propuestos van al final de los enunciados.

Problema 4: *¿Cuántas personas debe haber como mínimo para que se pueda asegurar que por lo menos dos cumplan años el mismo mes? ¿Y que haya por lo menos dos del mismo signo del zodíaco?*

Problema 5: *¿Cuántas personas debe haber como mínimo para que se pueda asegurar que por lo menos dos cumplan años el mismo día? (se incluye como fecha de cumpleaños posible el 29 de febrero).*

Problema 6: *Si sólo se toman en cuenta el primer nombre y el primer apellido de una persona, ¿cuántas personas se deben tener en cuenta para asegurarse que haya por lo menos dos con las mismas iniciales?*

Problema 7: *En una fiesta con por lo menos dos participantes (¿hay fiestas de un solo participante?), cada asistente saludó a algunos de los otros con un apretón de manos. Probar que hay dos asistentes que saludaron con apretones de mano a la misma cantidad de personas.*

Problema 8: *En un cuadrado de 100 centímetros de lado, si ubicamos diez puntos, hay por lo menos dos que quedan a distancia menor o igual que 48 centímetros.*

Solución al problema 4: Como en el año hay doce meses, si consideramos los meses como las cajas donde ponemos a las personas según su cumpleaños, tiene que haber por lo menos trece para poder asegurar que dos cumplen años el mismo mes. Con los signos pasa lo mismo: como hay doce signos distintos, debe haber trece personas para poder asegurar que dos comparten el mismo signo. Notar que no necesariamente dos personas que comparten el signo del zodíaco, comparten el mes del cumpleaños, lo que genera la siguiente pregunta: ¿Cuántas personas debe haber como mínimo para que se pueda asegurar que por lo menos dos cumplan años el mismo mes y sean del mismo signo simultáneamente?

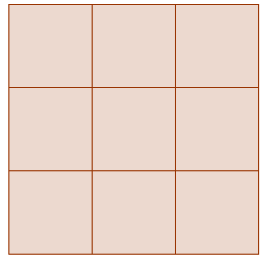
Solución al problema 5: Con el mismo razonamiento anterior, como hay 366 fechas posibles, es necesario que haya 367 personas.

Solución al problema 6: Como el alfabeto tiene 27 letras, hay $27 \times 27 = 729$ pares de iniciales posibles (cajas), con lo que la respuesta sería 730 personas.

Solución al problema 7: Este problema requiere un razonamiento más detallado. Supongamos que en la fiesta hubo n participantes. Entonces cada uno puede haber saludado a todas las restantes $n-1$ personas, a $n-2$, a $n-3$ y así hasta el extremo de no haber saludado a nadie. Si armamos cajas con carteles que digan "SALUDÓ A k PERSONAS" para k entre 0 y $n-1$ y ubicamos en ellas a los asistentes según el número de apretones de mano que dieron, resulta que hay n personas y n cajas, con lo que no podemos aplicar todavía el Principio de Dirichlet. Notemos sin embargo que las cajas con los rótulos $n-1$ y 0 no pueden estar ocupadas simultáneamente: si una persona saludó a todos (y va a la caja $n-1$), todos lo saludaron a él y, por lo tanto, no hay nadie que vaya a la caja 0. Si alguien no saludó a nadie (y va a la caja 0), nadie lo saludó a él, y por lo tanto nadie saludó a todos los restantes participantes (nadie va a la caja $n-1$). Como hay dos cajas que no pueden estar ocupadas simultáneamente, queda claro que las n personas quedarán distribuidas en a lo sumo $n-1$ cajas, y por lo tanto por lo menos dos personas deben caer en la misma caja por el Principio de Dirichlet. Es decir, hay por lo menos dos personas que saludaron a la misma cantidad de asistentes.

La aclaración de que el saludo fue mediante un apretón de manos fue hecha para que todos los saludos se consideraran correspondidos y poder argumentar que las cajas rotuladas con el 0 y el $n-1$ no pueden estar ocupadas simultáneamente.

Solución al problema 8: Basta dividir el cuadrado original en nueve cuadraditos iguales como indica la figura.



Cada cuadradito tiene lados de longitud $\frac{100}{3}$ cm. Por lo tanto, su diagonal mide $\sqrt{2}\frac{100}{3}$ cm$<$ 48 cm. Si ubicamos diez puntos en el cuadrado grande, el Principio de Dirichlet nos asegura que por lo menos dos deberán quedar en el mismo cuadradito y, por lo tanto, a distancia menor a 48 cm (la distancia mayor entre dos puntos de un cuadrado está dada por la medida de la diagonal).

Generalización

Vayamos un poco más allá con el problema de los cumpleaños y los meses. Si hay 13 personas, podemos asegurar que habrá dos que cumplan años el mismo mes. ¿Y si hay más personas qué pasa?

Entre 13 y 24 personas no podemos asegurar que haya más personas que cumplan años el mismo mes: hay por lo menos dos, pero hasta 24 personas podrían acomodarse para que no haya más que dos que cumplan años el mismo mes (dos por mes da exactamente 24). Pero, ¿y si hay 25? En este caso sí podemos asegurar algo nuevo: si a lo sumo hubiese dos personas que cumplen años por mes, el total de personas sería menor o igual que $2 \times 12 = 24$, lo que contradice que haya 25. Luego, hay un mes que tiene por lo menos tres cumpleañeros. Y ese tercer cumpleañero surge del hecho que, de a dos, solo se pueden acomodar en las cajas 24 personas a lo sumo. ¿Cómo sigue el razonamiento si aumentamos el número de personas? Hasta 36 personas no podemos asegurar que haya más de 3 que cumplan años el mismo mes (en el peor de los casos, habrá tres cumpleaños por mes, ya que $36 = 3 \times 12$) pero si hay 37, un razonamiento como el de antes, nos asegura que hay al menos cuatro personas que cumplen años el mismo mes. Es decir, generalizando, si hay $12.q$ personas, podemos asegurar que hay por lo menos q que cumplen el mismo mes, pero con $12.q + 1$ o más personas, ya habrá por lo menos $q + 1$ personas que cumplan años el mismo mes. Evidentemente, volviendo a la idea de las cajas, esta forma de escribir la cantidad de personas tiene que ver con el algoritmo de división entera entre el número de personas y el número de cajas.

Conjeturemos una generalización del Principio de Dirichlet a n objetos y d cajas teniendo en cuenta cuántos objetos podemos asegurar que haya como mínimo en alguna caja.

Teorema 2. *Hay n objetos para repartir en d cajas y todos los objetos deben ir en alguna caja. Si el cociente y resto de dividir n por d son q y r respectivamente (es decir, $n = d.q + r$ y $0 \leq r < d$):*

- *si $r = 0$, en alguna caja habrá por lo menos q objetos.*
- *si $r > 0$, en alguna caja habrá por lo menos $q + 1$ objetos.*

Para verificar la veracidad de "nuestra" conjetura (que ya conjeturó y demostró mucha gente antes), demostremos el teorema:

Demostración. Supongamos primero que $n = d.q$ y que en todas las cajas hay menos que q objetos. Luego la cantidad total de objetos es estrictamente menor que el número de cajas por q, es decir, la cantidad de objetos es estrictamente menor que $d.q = n$, lo que es absurdo, porque la cantidad de objetos es n. Ahora, veamos el caso en que $r > 0$. Si en todas las cajas hay menos que $q + 1$ objetos, en todas hay a lo sumo q objetos. Luego, la cantidad total de objetos es menor o igual que $d.q$ que es menor que n pues $n = d.q + r$ y $r > 0$. Nuevamente llegamos a un absurdo. Por lo tanto, el teorema queda demostrado □

Aplicaciones

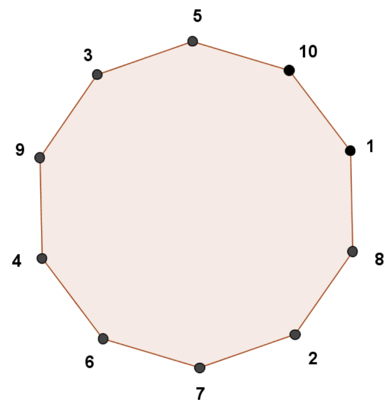
A continuación, hay algunos problemas que pueden resolverse con el Principio de Dirichlet generalizado.

Problema 9: *Volvamos al problema de los cabellos: en la República Argentina, el día del censo de 2010, había 40.117.096 habitantes. ¿Cuántas personas con igual cantidad de cabellos podemos asegurar que había en el país ese día?*

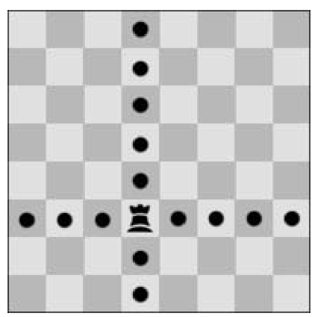
Problema 10: *Este problema se conoce con el nombre de "Teorema de la amistad" y es un caso particular de un teorema de Ramsey sobre grafos (ver [4]): Probar que en un grupo de seis personas, hay un conjunto de tres que se conocen mutuamente dos a dos o hay un conjunto de tres que no se conocen mutuamente dos a dos.*

Problema 11: *Si ponemos en cualquier orden los números del 1 al 10 en ronda, probar que hay por lo menos tres números que quedan seguidos que suman 17 o más.*

Para aclarar el enunciado ponemos un ejemplo: en la siguiente distribución, hay varias ternas de números que satisfacen la condición: el 10, el 1 y el 8; el 7, el 6 y el 4, el 6, el 4 y el 9; y el 9, el 3 y el 5.



Problema 12: *Se dispone de un tablero de ajedrez cuadrado de 8 casilleros por lado (es decir, 64 casilleros en total). Las torres son piezas que se mueven en líneas rectas verticales u horizontales (no diagonales) y amenazan a cualquier pieza que esté en su camino. En el dibujo que sigue, se muestra la zona de ataque de la torre.*



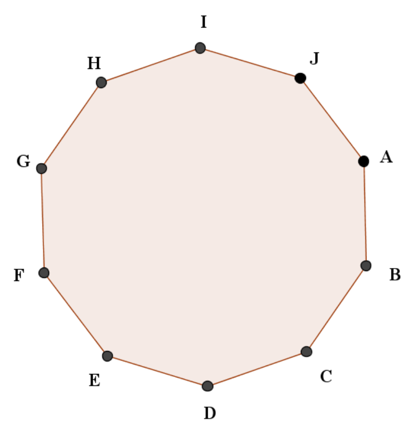
Si se ubican 33 torres en el tablero, probar que hay por lo menos 5 que no se amenazan mutuamente. Este problema fue planteado por primera vez por S. G. Slobodnik y A. Soifer en 1973 y varias soluciones a este problema figuran en [5].

Solución al problema 9: Recordemos que el número de cajas que usamos es

200001. Como $40117096 = 200001 \times 200 + 116896$, usando el Principio de Dirichlet generalizado, se puede afirmar que, ese día había en el país por lo menos 201 personas con la misma cantidad de cabellos en la cabeza, ya que el cociente es 200 y el resto es mayor que cero.

Solución al problema 10: Cada persona se relaciona con otras cinco o bien conociéndose o bien no conociéndose. Elijamos a una persona cualquiera y llamémosla A: como hay otras cinco personas y sólo dos posibilidades (que se conozcan o que no se conozcan con A), por el Principio de Dirichlet generalizado hay otras 3, digamos B, C y D, a los que A conoce o a los que A no conoce (ponemos en una caja a los que A conoce y en otra a los que no conoce y $5 = 2 \times 2 + 1$). Supongamos que A no conoce a B, ni a C, ni a D (si los conoce el razonamiento es similar). Si de estas tres personas, hay dos que no se conocen entre sí, digamos B y C, entonces A, B y C cumplen lo pedido, no se conocen mutuamente. Si no las hay, B, C y D se conocen entre sí y son estas tres las que cumplen lo pedido.

Solución al problema 11: Una forma de resolver es pensar que la suma de tres números ubicados en forma consecutiva es el número de elementos en una caja. Así, nuestro esquema se divide en 10 cajas como muestra la figura.



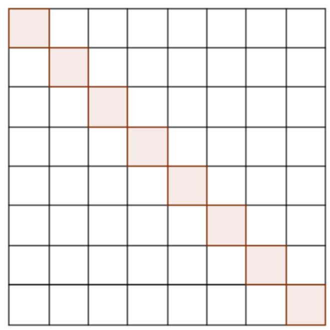
A+B+C	B+C+D	C+D+E	D+E+F	E+F+G	F+G+H	G+H+I	H+I+J	I+J+A	J+A+B

Como cada número está en tres cajas, cada número debe contarse tres veces. Por lo tanto, el número de elementos para distribuir en las 10 cajas es $3.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 165$. Como $165 = 10 \times 16 + 5$ y el resto no es 0, hay alguna caja que tiene por lo menos 17 elementos, o lo que es lo mismo, hay 3 números ubicados en forma consecutiva que sumados dan 17 o más.

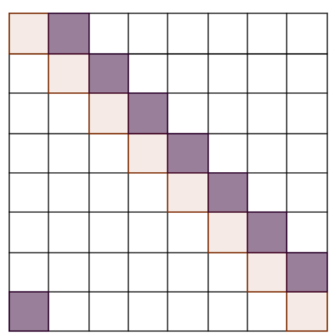
De hecho, se puede ser más preciso:

Problema 13: *Con las mismas condiciones, probar que siempre hay 3 números que quedan seguidos cuya suma es por lo menos 18. Con 19, el resultado es falso.*

Solución al problema 12: Una posible solución es dividir al tablero en zonas donde las torres ubicadas no se ataquen mutuamente. Una primera zona podría ser una diagonal (notar que, no importa dónde se ubiquen, dos torres en la diagonal nunca se atacan).



Otra zona donde dos torres no pueden atacarse es la diagonal inmediatamente sobre la diagonal principal y el escaque que queda más abajo a la izquierda (nuevamente, dos torres ubicadas en cualquiera de estos escaques no se atacan mutuamente).

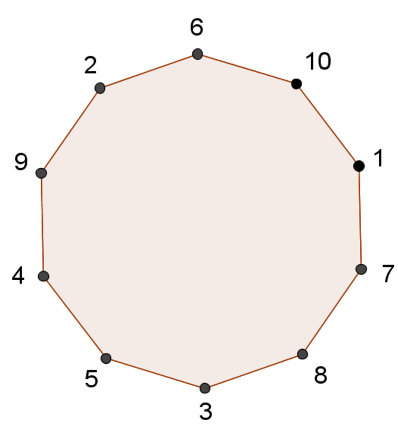


Así podemos dividir todo el tablero en 8 zonas como indica la figura, de forma tal que las torres ubicadas en cada zona no se ataquen mututamente (verificación a cargo del lector). Los escaques con igual número forman parte de la misma zona.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

Si ahora distribuimos las 33 torres en estas 8 zonas, como $33 = 8\times4+1$, resulta que hay una de estas zonas que tiene por lo menos 5 torres que, por lo tanto, no se atacan mutuamente.

Solución al problema 13: Si no contamos al 1 y pensamos en los nueve números que quedan, su suma da 54. Si los agrupamos en 3 cajas consecutivas, como $54 = 3 \times 18$ resulta ser que alguna de las sumas en las cajas debe ser por lo menos 18, que es lo que queríamos demostrar (sorprendentemente, parece más fácil probar que una suma da por lo menos 18 que que una da por lo menos 17). Para demostrar que con 19 el resultado es falso basta mostrar un caso en el que todas las sumas son menores o iguales a 18 como el de la figura siguiente:



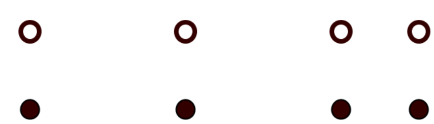
Problema 14: *Probar que, si se pintan todos los puntos en el plano de dos colores distintos de cualquier forma, habrá un rectángulo que tenga los cuatro vértices del mismo color. De hecho se pueden encontrar infinitos rectángulos que cumplan lo pedido y de área tan grande o tan chica como se quiera.*

Solución al problema 14: Hay por lo menos dos posibles soluciones usando el Principio de Dirichlet:

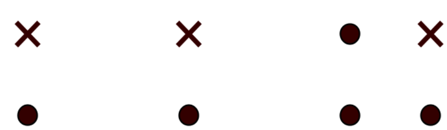
Primera solución:

Dados 7 puntos alineados, como sólo hay dos colores y $7 = 2 \times 3 + 1$, por el Principio de Dirichlet generalizado, seguro que hay por lo menos 4 puntos del mismo color (en el dibujo cruz representa a un color y círculo lleno representa al otro).

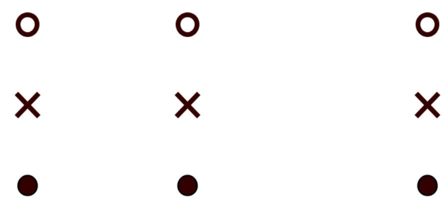
Si tenemos 4 puntos alineados del mismo color, trazamos una paralela a la recta que determinan y ubicamos los puntos que determinan rectángulos con ellos.



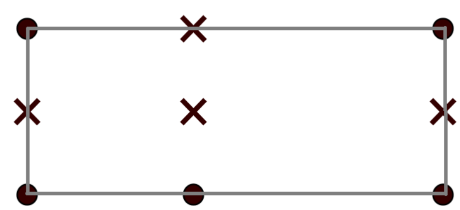
Si 2 de estos cuatro puntos son del mismo color que los 4 anteriores, ya tenemos 4 puntos que determinan un rectángulo con todos sus vértices de mismo color. Si no, necesariamente en esta segunda configuración, por lo menos 3 de los puntos deben ser del otro color.



Volvemos a trazar una recta paralela a ambas y marcamos los tres puntos correspondientes.



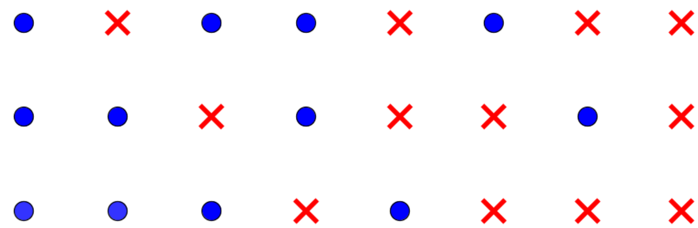
Nuevamente usando el Principio de Dirichlet, por lo menos 2 de estos puntos tienen el mismo color entre sí. Luego, uniéndolos con sus correspondientes del mismo color en la primera o en la segunda línea, ya tenemos el rectángulo buscado.



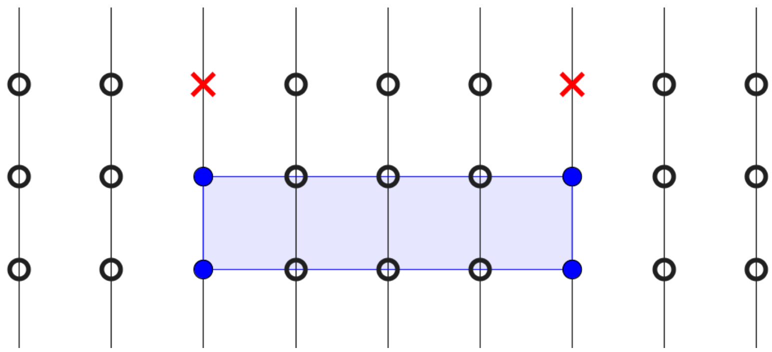
Para conseguir rectángulos de área tan chica o tan grande como queramos, bastará ubicar los puntos y las rectas tan cerca o tan lejos como sea necesario.

Otra solución:

Dados tres puntos alineados, hay 8 posibles formas de pintarlos. En la siguiente figura, los grupos de a tres puntos están ubicados de forma vertical:



Si elegimos nueve de estas configuraciones, ubicadas paralelas, por el Principio de Dirichlet, necesariamente habrá dos que coincidan. Como cada configuración tiene por lo menos dos puntos de igual color, ya podemos armar el rectángulo que buscamos.

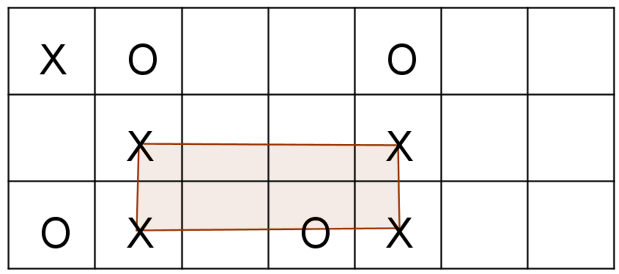


Notar que en este último razonamiento sólo usamos el Principio de Dirichlet sin generalizar.

Digresiones:

- Con un poco más de cuidado, puede demostrarse que con siete configuraciones de tres puntos de las anteriores ya estamos en condiciones de armar un rectángulo con los cuatro vértices del mismo color. Si entre las siete configuraciones no aparece ninguna con los tres puntos de igual color, debe haber una repetida (hay seis configuraciones de las otras). Si aparece una con los tres puntos de igual color, hay sólo cuatro con las que no forma un rectángulo de los deseados, así que entre siete configuraciones o se repite una de estas cuatro (y armamos un rectángulo) o aparece una de las otras (y armamos un rectángulo)

- Este problema nos permite diseñar un juego del estilo del tatetí. En un tablero de 3×7 como indica la figura, cada jugador por turnos ocupa un casillero. Un jugador usará cruces y el otro círculos. Gana el primero que logra ocupar cuatro casilleros que formen un rectángulo. En este juego, ganó el jugador de las cruces:



  Lo que nos asegura la última solución del Problema 14 es que este juego no permite empates, no importa cómo jueguen los contrincantes. Se puede tratar de analizar si siempre existe una estrategia ganadora y cuál sería.

Navegando por Internet, se encuentran fácilmente muchos problemas que utilizan el Principio de Dirichlet en su solución (ver, por ejemplo, [1]).

Nuevo problema

Problema 15: *Si se pintan todos los puntos del plano de dos colores, ¿se podrá asegurar que siempre existe un* **cuadrado** *con todos los vértices del mismo color?*

El razonamiento anterior no nos sirve, porque no podemos asegurar que el rectángulo hallado tenga todos los lados iguales. El resultado es cierto y la demostración que conozco no se basa en el Principio de Dirichlet, pero creo que es un buen momento para dejar de escribir soluciones y dejar que el lector interesado piense las propias.

Referencias

[1] Bogomolny, Alexander, Pigeonhole Principle from Interactive Mathematics, Miscellany and Puzzles, disponible en http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/pigeon.shtml

[2] Brousseau, Guy, Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas. Ediciones del Zorzal, Argentina (2007).

[3] de Guzmán, Miguel, Aventuras matemáticas. Editorial Labor, España (1986).

[4] Ramsey, Frank P., On a Problem of Formal Logic. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 2, 30, no. 1, (1929) pp. 264-286.

[5] Soifer, Alexander, Mathematics as Problem Solving. Springer, New York (2009).