FESTIVAL DE PROBLEMAS PROPUESTOS POR E. GENTILE

1. Series

   a) Si $0 < a < 1$ calcular $a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots$

   b) Hallar $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{(n-1)}{n!} + \ldots$

   c) Hallar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

   d) Evaluar $\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2} \right)$

2. Sabemos que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Analizar qué sucede con la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ si:

   a) los n recorren los naturales n cuyo desarrollo decimal no contiene el dígito 9.

   b) los n recorren los naturales n cuyo desarrollo decimal no contiene ningún bloque de tres ceros consecutivos (por ejemplo $n = 1000$, $n = 100001$).

   c) Generalizar b) a otros bloques.

3. Anillos de Boole. Sea R un anillo asociativo R se dice booleano si $x^2 = x$ para todo x en R.

   a) Si R es un anillo booleano probar que es commutativo y de característica 2.

   b) Si R es finito y booleano, probar que posee identidad. ¿Y si no es finito?

   c) Sea X un conjunto y sea $R = P(X)$: = conjunto de partes de X. Probar que respecto de $x \cdot y = x \cap y$ (intersección) y $x \dot{+} y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ (diferencia simétrica), R es un anillo de boole.

   d) Sea R un anillo con la propiedad que $x^6 = x$ para todo x en R. Probar que R es booleano. (Para que otros n, $x^n = x$ resulta booleano?).

e) Sea R un anillo finito. Probar que R es booleano si y sólo si todo elemento excepto uno dado, es divisor de cero.

4. Anillo

Sea K un cuerpo conmutativo. Sea $Q(K) :=$ la totalidad de sumas de cuadrados en K.

Sea $A \subset K$ la totalidad de elementos x en K con la propiedad que existe $n \in N$ tal que $n + x$ y $n - x$ pertenecen a $Q(K)$. Probar que A es un subanillo de K.

5. Polinomios

Determinar todos los polinomios $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ con $a_i = \pm 1$ $(0 \leq i \leq n,\ 1 \leq n < \infty)$ tales que $f(X)$ tiene todas sus raíces REALES.

6. Matrices

Sean A y B matrices cuadradas en $K^{n \times n}$, K un cuerpo, tales que $A \cdot B - B \cdot A = A$. Probar que A es nilpotente $(: = A^n = 0)$.

7. Función recurrente: Sea $f(x,y)$ una función de dos variables que satisface

a. $f(0,y) = y + 1$

b. $f(x+1,0) = f(x,1)$

c. $f(x+1,\ y+1) = f(x, f(x+1,\ y))$

cualesquiera sean x,y enteros no negativos. Determinar $f(4,\ 1981)$.

8. Triángulo. Construir un triángulo dados los vértices exteriores de los triángulos equiláteros exteriores que se apoyan en cada lado del triángulo.