EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1) Sea i la unidad imaginaria $(i^2 = -1)$. ¿Para cuántos valores de n es $(n + i)^4$ un entero? [C. Sánchez]

2) ¿Cuándo es $\sqrt[n]{m} > \sqrt[m]{n}$? [Gentile].

3) Calcular la razón entre las áreas de los dos casquetes esféricos en que la superficie esférica queda dividida por el plano de una cara del cubo inscripto. [C. Sánchez]

4) Un huso en una esfera es la parte de superficie comprendido entre dos meridianos. Demostrar que el área de un huso es el producto del diámetro de la esfera por la longitud del arco de ecuador determinado por el huso. [C. Sánchez]

5) Cuatro esferas de radio 1, tres apoyadas en el piso y la cuarta sobre ellas, son todas tangentes entre si. Circunscríbase sobre ellas un tetrahedro equilátero de lado a. ¿Cuánto vale a? [C. Sánchez]

6) Demostrar que tres puntos colineales distintos no pueden estar sobre una circunferencia de radio finito. [C. Sánchez]

7) La suma de las medidas de los ángulos de un poliedro convexo es 4 rectas por $(V - 2)$ siendo V el número de vértices. [C. Sánchez]

8) Convengamos en medir ángulos en grados sexagesimales. Sea A la medida de un ángulo menor que un recto. Probar que

   a) $\cos A$ es irracional salvo que $A = 0º$ ó $A = 60º$.

   b) $\operatorname{sen} A$ es irracional salvo que $A = 0º$ ó $A = 30$

   c) $\operatorname{tg}(A)$ es irracional salvo que $A = 0º$ ó $A = 45º$.

   Ayuda:

   i) Compruebe por inducción que

   $$2\cos(nA) = (2\cos A)^n + a_{n-1}(2\cos A)^{n-1} + \dots + (2\cos A)\,a_1 + a_0$$

   con $a_0\ a_1 \dots a_{n-1}$ enteros.

   ii) Demuestre que si α es una raíz racional de

   $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

   con $a_0\ a_1 \dots a_{n-1}$ enteros, entonces α es un entero. [J. Vargas]

9) Pruebe que los números cuya expansión decimal se da a continuación son irracionales

0,1234567891011...

0,246810121416...

0,357911131517...

0,10100100010000100000...

0,20200200020000200000...

0,35711131719232931374143475 1...

$0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$

donde $a_1 = 1$, $a_i = 1$ si i es primo y $a_i = 0$ si $i > 2$ y no es primo. [J. Vargas]

10) Sea x un número irracional positivo y n un número natural. Probar que existe un natural m tal que

$$0 < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

Ayuda: Escriba $nx = a_1 + a_2$ con a_1 natural y $0 < a_2 < 1$. [J. Vargas] [J. Vargas]

11) Sea x un número irracional positivo y n un número natural, encuentre un natural m tal que

$$0 < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}$$

<u>Ayuda</u>: Escriba $x = a_1 + a_2$ con a_1 natural y $0 < a_2 < 1$, ahora divida el segmento de origen 0 y extremo 1 en n partes iguales y ... [J. Vargas]

12) Sea p un número natural que no es el cuadrado de un número natural. Probar que si m, n son naturales, entonces

$$\left| \sqrt{p} - \frac{m}{n} \right| > \frac{\sqrt{p}}{n^2} \qquad \text{si} \qquad \frac{m}{n} > 2\sqrt{p}$$

$$\left| \sqrt{p} - \frac{m}{n} \right| > \frac{1}{3\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \text{si} \qquad \frac{m}{n} < 2\sqrt{p}$$

<u>Ayuda</u>: Si $\frac{m}{n} < 2\sqrt{p}$ escriba

$$\left| \sqrt{p} - \frac{m}{n} \right| = \left| \frac{(\sqrt{p} - \frac{m}{n})(\sqrt{p} + \frac{m}{n})}{(\sqrt{p} + \frac{m}{n})} \right|$$

y deduzca que $\left|\sqrt{p} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\sqrt{p} + \frac{m}{n})}$ y ...

Si $\frac{m}{n} > 2\sqrt{p}$ ...

Deduzca que si m es grande y $|\sqrt{p} - \frac{m}{n}|$ es pequeño, entonces m es grande. [J. Vargas]

13) Sea p un número natural que no es el cuadrado de un número natural. Probar que hay a lo sumo un número finito de fracciones reducidas $\frac{m}{n}$ tal que

$$|\sqrt{p} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^3}$$

Encuentre los posibles valores de m.
Analice afirmaciones del mismo tipo para

$$|\sqrt{p} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^4} \quad , \quad |\sqrt{p} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^5} \quad , \ldots$$

[J. Vargas]

14) Si $a_0\ a_1\ \ldots\ a_n$ son números enteros con $a_n \neq 0$ y $\frac{r}{s}$ es una fracción reducida que es raíz de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ entonces s divide a a_n y r divide a a_0.
Analice el valor de verdad de la recíproca de esta afirmación.
[J. Vargas]

15) Use los polinomios $x^2 - 2$, $x^2 - 3$, $x^3 - 2$, etc. para deducir que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ son irracionales. [J. Vargas]

16) Pruebe que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ son números irracionales. Ayuda: sea $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$, entonces $x + \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}$, de esto $(x + \sqrt{3})^3 = 2$, lo cual simplica $x^2 + 1 = 2x\sqrt{3}$ de esto $(x^2 + 1)^2 = 12x$ ... [J. Vargas]

17) Dados un número finito de puntos en el plano con la propiedad que toda tecta que une dos de ellos contiene otro punto de los dados, probar que los puntos son colineales. [E. Gentile]