LA ENSEÑANZA DE LAS PROBABILIDADES Y DE LA ESTADISTICA AL NIVEL SECUNDARIO

Luis A. Santaló

I. PROBLEMAS GENERALES

En la mayoría de los países, la Estadística no figura en los planes de estudio del ciclo secundario de la enseñanza. Hay algunas excepciones, principalmente de escuelas especiales (enseñanza comercial o técnica), en las que esa enseñanza se ha introducido, pero de todas maneras se puede afirmar que la gran mayoría de la población estudiantil, entre las edades de 12 a 17 años, no es introducida en las ideas ni en las técnicas de la Estadística.

Sin embargo, hay también consenso unánime de que esta enseñanza debe introducirse, no sólo en el nivel medio, si no incluso en los últimos grados de la escuela primaria. La Estadística, acompañada de unas nociones de probabilidad, es una herramienta indispensable para tomar parte activa en el mundo de hoy y para poder comprender el complejo andamiaje de interrelaciones y correlaciones que lo sustentan.

Por esto, ante la inminencia de que la Estadística empiece a introducirse de manera generalizada en la enseñanza media, conviene meditar mucho y recabar opiniones para que esta introducción, que ya ha tardado demasiado tiempo, se haga por lo menos de la manera mejor y más eficaz.

Hay varios problemas urgentes que son, a nuestro entender, de primera prioridad, a saber:

1. Formación de profesores. Hay que introducir o intensificar los cursos de Estadística y Probabilidad en los institutos o escuelas en que se forman los profesores de enseñanza media. Hay que introducirlos en Estadística y también en la metodología y didáctica de su enseñanza. No bastan cursos más o menos estándard de Estadística, si no se considera, al mismo tiempo, la manera de hacer la transferencia de estos conocimientos a niveles cada vez más inferiores de la enseñanza. Hay que aprender la Estadística de nivel terciario, pero luego hay que saber hacer la transferencia al nivel secundario, lo que no es trivial ni fácil: se necesita mucha experimentación.

Para los profesores en actividad, que no estudiaron estadística durante su formación, es urgente organizar cursos de actualización en los que se les informe de esta disciplina y de su didáctica.

2. Publicación de textos. Existe una gran abundancia de textos de Estadística para el nivel terciario, pero son prácticamente inexistentes los textos para la escuela media, sobre todo para los primeros años de la misma, en los cuales debe iniciarse al alumno en los conceptos y técnicas de la Estadística. Habría que alentar la publicación de textos, para luego someterlos a la experimentación. Por tratarse de la enseñanza de un tema nuevo, para este ciclo, conviene experimentar textos y colecciones de ejercicios y luego evaluar detenidamente estas experiencias, de manera de ir obteniendo los contenidos que se pueden dar a cada edad y la forma más adecuada de enseñarlos.

3. La Estadística integrada o separada de la Matemática. Hay opiniones diversas sobre la conveniencia de separar la enseñanza de la Estadística de los cursos regulares de Matemática (como se hace con la Física) o de su integración con estos cursos. A nuestro entender, debería integrarse como parte esencial de la enseñanza de la Matemática. Con ello ganarían ambas disciplinas. Tánto para los alumnos que luego van a seguir estudios terciarios, como para aquellos en que la segunda enseñanza es terminal, la continua comparación del pensar probabilista de la Estadística, con el pensar determinista de la Matemática, es altamente formativa. La vida de todos los días necesita de los dos y una buena enseñanza debe saber balancear y coordinar el uno con el otro.

Al decir que la Estadística debe formar parte de los cursos de Matemática, no nos referimos a que en los programas de esta última deban añadirse una, dos o más unidades de Estadística, que el profesor dará por separado cuando llegue el turno. Entendemos que debe hacerse una verdadera integración y que, en toda oportunidad que se presente, el profesor de Matemática debe utilizar conceptos y métodos de la Estadística, como fuente de ejercicios y como ampliación de los conceptos deterministas. Gráficos, cambios de escala, valores medios, interpolaciones y extrapolaciones, correlaciones, etcétera, son ideas y prácticas muy útiles a la matemática misma. El método de Monte Carlo, la simulación, el uso de tablas de números al azar, son útiles para resolver problemas de pura matemática y se pueden buscar ejemplos al alcance de los alumnos de los primeros años de la escuela media.

La enseñanza de la Estadística debe ir unida con la idea de probabilidad, y un problema importante de la didáctica actual consiste en estudiar las edades mínimas en que las ideas probabilistas pueden ser asimiladas por los alumnos. Hay un trabajo inicial de Piaget e Inhelder (1951), y posiblemente haya otros posteriores, pero creemos que debería estimularse la experimentación en este terreno, por la importancia que van adquiriendo las ideas probabilistas y estadísticas en todos los campos de la técnica y de las ciencias positivas y humanas.

La enseñanza de la Estadística ha preocupado desde hace varios años al I S I (International Statistics Institute) que ha organizado varias reuniones al respecto, a saber: "New techniques of Statistical Teaching" (Oisterwijk, Holanda, 1970), "The Teaching of Statistics at the Secondary School level" (Viena, 1973), "The Teaching of Statistics in Schools" (Varsovia, 1975). En el corriente año se han tratado y discutido temas de enseñanza de la Estadística, a todos los niveles, en la reunión 43 del I S I celebrada en Buenos Aires del 30 de noviembre al 11 de diciembre (1981). El próximo año tendrá lugar la importante "International Conference on Teaching Statistics", University of Sheffield, Inglaterra, del 8 al 13 de Agosto de 1982, en la cual deberán discutirse los más importantes temas que tiene actualmente planteados la enseñanza de la Estadística en todos los niveles.

II. LAS OPINIONES DE PIAGET E INHELDER.

La obra de Piaget-Inhelder a que hemos hecho referencia es el libro titulado "La Genese de l'idée de Hasard chez l'enfant" (Presses Universitaires de France, París, 1951). Las conclusiones a que llegan los autores, después de realizar y analizar múltiples experiencias, son las siguientes:

a) En un primer periodo, hasta los 7-8 años de edad, el niño no distingue entre lo que es "posible" que ocurra y lo que "necesariamente" debe ocurrir. Su pensamiento oscila entre lo previsible y lo imprevisible y no hay para él nada previsible de manera segura, ni nada fortuito o imprevisible. Como carece de un sistema de referencia consistente en operaciones deductivas, no tiene conciencia del azar ni de la probabilidad.

b) A partir de los 7-8 años, empieza a practicar operaciones lógico-aritméticas, y empieza a desarrollarse en su pensamiento la idea de azar. El descubrimiento de la necesidad deductiva u operacional, le permite concebir, por antítesis, el carácter no deducible de las transformaciones fortuitas, y por tanto, empieza a diferenciar lo "necesario" de los simplemente "posible". Si un conjunto A es la unión de los conjuntos X e Y, y un elemento x pertenece a A , entonces pertenece a X ó a Y , y esta noción de distintas posibilidades implican la idea de probabilidad. Habría que experimentar cómo, variando el tamaño de X e Y , el niño va intuitivamente midiendo la probabilidad de que el elemento pertenezca a X o a Y.

c) Entre los 11-12 años, siempre según Piaget-Inhelder, el alumno está en condiciones de estructurar un sistema de probabilidad, englobando lo fortuito a la operación determinista, mediante la construcción de sistemas combinatorios. Comprende que un caso aislado es intedeterminado e imprevisible, pero que el conjunto de los casos posibles es determinado, y trata de relacionar (a través de la combinatoria) el conjunto de los casos favorables con el de los posibles. La idea de probabilidad va unida al génesis de las operaciones combinatorias. A través de la ruleta, monedas, dados, va concibiendo, experimentalmente, la ley de los grandes números.

La introducción de la Probabilidad y de la Estadística en la escuela media está, por tanto, plenamente justificada desde el punto de vista de las posibilidades de aprendizaje de los alumnos.

III. UN EJEMPLO.

Una técnica que debe introducirse en los cursos de matemática de la escuela media, es la de la simulación de los problemas mediante esquemas probabilísticos, que luego pueden resolverse experimentalmente con aproximación suficiente para las necesidades prácticas. Vamos a considerar un ejemplo.

Dos jugadores P y Q juegan a cara y ceca, tirando alternativamente la moneda, de manera que al tirar P gana la partida si sale cara y al tirar Q, gana la partida si sale ceca. Juegan hasta que uno de los jugadores gana. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el que empieza primero?

La solución teórica, como veremos al final, es 2/3. Ello confirma el dicho popular de que "quien pega primero pega dos veces", pues la probabilidad de ganar él que juega segundo es 1/3 y la de ganar el que juega primero es 2/3, o sea, dos veces la anterior. Si no se sabe resolver teóricamente el problema, puede procederse experimentalmente. Se puede realizar la experiencia un número grande de veces (por ejemplo unas 100 veces) y constatar la proporción de las partidas en que gana el que sale primero y aquellas en que gana el segundo. Pero también puede resolverse, sin necesidad de moneda alguna, por simulación por una tabla de números al azar. Supongamos que se asignan a P los números pares y a Q los impares, de manera que basta seguir los números de la tabla para tener resultados experimentales, o sea una sucesión de juegos "simulados" que permiten llegar al resultado, con suficiente aproximación, la cual dependerá de las partidas jugadas.

Si no se dispone de una tabla de números al azar, se pueden tomar, por ejemplo, las últimas cifras de los números de una guía telefónica. Estos números *no son realmente números al azar*, pero para cálculos aproximados y como ejercitación para comprender el método, pueden tomarse como tales. Para el problema anterior, tomemos la guía de teléfonos de la ciudad de Buenos Aires y empecemos, por ejemplo, con la última cifra de cada uno de los números correspondientes a la letra A.

Supongamos que empieza P, o sea, el jugador que gana si sale cara, a lo que hemos dicho corresponde un número par (incluído el cero). Las partidas sucesivas son

7 - 4 - 3 - 6 - 7 - 3	(gana Q)
2	(gana P)
0	(gana P)
4	(gana P)
9 - 1	(gana Q)
4	(gana P)
4	(gana P)
0	(gana P)
4	(gana P)
9 - 0 - 0	(gana P)
⋮	
etcétera	

Procediendo hasta 100 partidas, el resultado es que P gana 72 y Q gana 28. Por tanto la probabilidad de ganar P es 0,72. Comparando con la probabilidad teórica $2/3 = 0{,}666\ldots$ se ve que la diferencia no es muy grande y seguramente disminuiría si se siguieran más partidas.

Se podría pedir también cuál es el valor medio del número de jugadas de cada partida. Por ejemplo, en el caso anterior, la primera partida tiene 6 jugadas, la segunda, tercera y cuarta, tienen una sola, la quinta tiene dos jugadas, etcétera. Tomando la tabla de las 100 partidas consideradas, resulta (experimentalmente) que el valor medio del número de jugadas por partida es 1,8. El valor teórico es 2.

Solución teórica. La probabilidad de ganar P (jugador que empieza) en la primera jugada es 1/2, en la tercera jugada es $(1/2)^3$, en la quinta jugada $(1/2)^5, \ldots$ Por tanto, la probabilidad de ganar P es

$$(1/2) + (1/2)^3 + (1/2)^5 + \ldots = 2/3$$

La esperanza matemática o valor medio del número de jugadas por cada partida es

$$1.(1/2) + 2.(1/2)^2 + 3.(1/2)^3 + 4.(1/2)^4 + \ldots = 2$$

La primera serie se suma fácilmente pues es una serie geométrica. La segunda ya no está al alcance de los primeros años de escuela media, pues es el valor, para $x = 1$, de la serie derivada de la geométrica cuya razón es $x/2$.

El uso de las tablas de números al azar es importante desde el punto de vista didáctico, porque evita el uso en clase de monedas, dados o ruletas, cuyo uso en clases numerosas puede originar confusión.

IV. OTROS EJEMPLOS.

Del mismo estilo que el problema anterior, proponemos los siguientes:

1. Supongamos que la probabilidad de nacer varón o mujer es la misma, e igual a 1/2, y que los padres siguen teniendo hijos hasta tener una hija mujer. Se pide: a) ¿Cuál es el valor medio del número de hijos?; b) ¿Cuál será la relación entre el número total de varones y el de mujeres? Solución: a) 2 ; b) 1 .

2. Se distribuyen al azar 9 cartas entre 9 sobres. ¿Cuál es el valor medio del número de cartas que van a parar en el sobre correcto? Solución: 1 .

3. Cada paquete de una marca de galletitas contiene una figurita, las cuales se suponen distribuidas uniformemente entre todos los paquetes. La colección completa de las figuritas consta de 6. Se pide el valor medio del número de paquetes que hay que comprar para tener la colección completa. Solución: 14,7 , o sea, 15 paquetes.

Se puede resolver con una tabla de números al azar, en la cual no se tengan en cuenta los números 0, 7, 8, 9.

4. A partir del problema anterior, si los paquetes de galletitas con figurita cuestan $ 10 más que los que no contienen figurita y la colección completa de estas últimas se vende por separado al precio de $ 200, conviene más comprar esta colección o galletitas con figuritas?

TABLA DE NUMEROS AL AZAR

08750	46968	57727	92862	64521	89917	14264	84582	27581	74914	84618
08751	44191	53263	55877	73329	45003	13484	05729	04427	78220	76217
08752	34398	06224	33816	72811	34792	63534	23099	40080	55316	32791
08753	74978	03065	07713	00184	47458	57074	13049	05127	61346	38744
08754	22146	16086	38337	11333	72081	61350	56485	12948	30934	56629
08755	40039	64003	47346	00921	21100	00586	52854	07373	57683	63391
08756	52337	64456	15477	57873	78198	70698	47480	26203	42053	25502
08757	37592	04093	17322	41090	80873	27459	84244	97917	23758	24200
08758	11025	55748	84743	62267	19201	59253	37137	55489	56732	33907
08759	10337	92634	54713	39974	68482	31749	18810	55285	70057	31117
08760	67592	82547	69116	56520	42239	64164	20308	98764	37933	69635
08761	93507	52000	18543	46802	54872	30543	36982	99793	87083	09298
08762	24432	37280	64342	72346	15361	06321	59697	60262	31624	76034
08763	39916	31838	27107	88884	42320	09702	00049	45005	75827	08035
08764	74621	96754	18289	23369	98907	43572	11682	50895	31791	17954
08765	91033	56081	16619	72514	78212	20525	47263	78039	19064	10200
08766	42576	67672	91036	34846	44013	35362	28805	95505	02161	31754
08767	06366	30615	03723	80158	25370	64856	19564	12928	76497	43950
08768	92709	67089	80871	42549	25946	27826	15413	94875	64696	10638
08769	91088	85352	13048	22300	26364	74404	08848	00744	76515	24159
08770	63859	77417	53500	55034	67482	50111	05451	14315	60403	18459
08771	59541	30913	60422	86303	24641	24328	10016	56207	79830	55981
08772	39183	20923	46581	93403	59289	73102	65474	77039	74173	02265
08773	67433	10912	60195	76378	11901	09715	70018	98178	54848	78342
08774	61753	71956	90753	90356	49927	29527	52874	71252	54624	32313
08775	78109	11160	63196	37458	69035	13660	36535	67706	69038	99124
08776	93237	15809	79080	30771	79322	51961	04403	31206	78919	78895
08777	37554	08263	89925	31172	19172	25190	20036	49660	48019	54484
08778	62131	17117	23292	51385	33359	76925	68579	25711	84440	13366
08779	29899	74703	13203	62245	59986	45389	64948	15587	73815	84642
08780	16948	58269	07173	02989	89809	83625	36530	24914	34035	20920
08781	04931	05875	12988	46093	68168	76011	50465	65845	88725	04611
08782	95714	36897	18851	71308	00537	75046	92452	69721	48222	30832
08783	86053	91435	48681	83657	09624	02807	08747	99108	27124	33203
08784	58306	01041	31006	96377	01899	46019	02708	87233	38882	08086
08785	05453	54051	03989	67627	77818	00864	60443	45424	85208	57732
08786	71851	77460	27851	95556	51364	89232	44404	71038	22524	22996
08787	80203	28098	00109	25751	52831	45531	99732	34007	64544	49921
08788	13507	80273	39668	20128	67517	56633	97475	84244	88092	85806
08789	67926	54145	36779	64621	14395	63670	15744	36269	82307	72877
08790	72567	34426	04628	11535	79269	95728	22259	48062	95489	82386
08791	28868	56494	11587	84536	34459	13851	10683	68781	16773	01936
08792	69574	08044	94608	29493	98014	85057	60607	76960	74220	57717
08793	71200	33079	25741	77834	54450	47742	59757	86499	37031	80338
08794	89985	59822	45124	08271	57332	86950	59150	92579	39428	41870
08795	58748	28114	02010	57794	65577	03942	48568	43159	18704	17460
08796	50547	38181	07812	62545	49612	28841	20001	55893	51606	58563
08797	49337	29010	20652	84463	95867	57869	24416	58610	34103	20093
08798	11850	14365	02858	95688	34296	43548	15701	17783	01348	29104
08799	34224	64194	74270	25777	47937	20285	63757	46969	61343	19215

08800	05572	30628	23086	61611	75288	15614	62824	56580	36027	65563
08801	37781	60657	12462	29097	78673	90983	80510	20716	75129	04116
08802	23711	50882	64872	80120	46720	58019	27471	57651	58670	68054
08803	42679	84167	44287	14508	19477	63026	72336	89251	85232	68579
08804	05830	38432	62832	74883	08198	48020	20508	77483	51621	02330
08805	60461	84123	74735	17290	40529	54120	89489	82738	81338	38284
08806	32806	47591	98004	06489	29994	63569	91507	37592	80598	29324
08807	79865	37778	06623	74882	71007	82165	65884	58244	78932	27808
08808	45132	33201	08483	64366	37153	50488	79835	31913	91598	18187
08809	20609	74821	41842	27277	89818	33046	15802	65173	66349	84080
08810	67914	48343	25563	32880	99532	75619	80763	25385	07530	96198
08811	86507	69386	35684	53783	47449	25766	59641	64839	26945	46640
08812	66733	83823	38109	51601	10015	97155	89248	83141	00731	38062
08813	55115	02917	73970	42039	20227	11143	00151	01235	09110	08905
08814	23543	38702	92044	97396	57535	70893	09698	78307	46385	03785
08815	41486	77944	57402	91034	58635	11807	41023	97914	40681	00161
08816	03977	17243	27362	45988	82872	63111	44285	89947	83213	52288
08817	90248	34807	41566	81114	77754	86808	80896	38700	06186	32191
08818	98989	74227	11805	11313	03429	11451	22154	86752	09403	46085
08819	74209	42149	86516	99985	43765	58136	11886	83243	08147	80534
08820	94674	88711	84008	59356	43992	17484	13564	19006	30041	96873
08821	58188	48271	23683	31925	65179	08424	91753	61483	86227	08689
08822	31472	82488	49286	97862	23455	33878	65874	49193	91627	60920
08823	45623	10670	92732	78357	15764	05756	54423	54093	55820	87887
08824	31498	71227	41079	17264	63420	66682	71283	64531	99010	33576
08825	69372	22346	10758	36294	44654	62365	71692	08912	16566	17041
08826	93672	15698	42525	31486	24702	51823	23562	40386	11064	61023
08827	77561	83701	32201	87079	20857	78928	17771	55247	15303	51275
08828	37074	77960	75241	53163	25932	76619	53524	99845	12120	60032
08829	72087	10173	46396	03758	22252	08430	02036	26858	38040	68984
08830	55224	84672	50142	44767	84373	28482	64971	36986	20098	04675
08831	69249	89070	29342	53323	12699	05038	83843	22896	03657	09012
08832	01867	71821	91661	18465	48752	69451	40515	33639	77690	62507
08833	51409	40680	61342	84628	11484	89460	65066	37106	19350	53259
08834	58780	28580	29672	74407	67232	02822	62975	96213	41727	07107
08835	33758	85100	33561	58434	28501	66512	81564	35414	63377	49759
08836	58603	74562	09959	31659	35229	17804	97988	02004	38931	39230
08837	72131	29532	87993	28365	40179	25722	68987	91623	53565	60747
08838	22211	31610	52577	14049	85255	53695	57252	57705	38056	25777
08839	97948	36790	68748	81722	38010	43349	38475	76187	15394	38700
08840	09036	85363	29273	16653	39348	88704	35806	95274	99165	20165
08841	29956	14265	05722	72818	09852	45946	03915	53862	51714	73738
08842	81967	89047	41383	63395	05902	67285	23233	07051	56932	38480
08843	44622	08121	57578	50047	26108	72245	72035	17523	38385	67797
08844	68911	21508	02187	45679	21536	34177	15073	98711	19256	21930
08845	29337	76029	09250	94229	07154	06758	29587	58406	19543	11653
08846	54133	81929	64977	37161	78032	40293	86697	67428	08988	40823
08847	75168	56464	93856	80884	15415	78445	11701	31760	47801	01300
08848	36471	70879	03928	51842	95482	73799	98819	44472	06954	23117
08849	29810	82191	23767	28498	26236	65486	88951	48257	17891	62899

GRUPOS DE TRANSFORMACIONES DEL PLANO VIA LOS NUMEROS COMPLEJOS

Enzo R. Gentile

0. INTRODUCCION

El objeto de esta exposición es la determinación de ciertos grupos de transformaciones del plano utilizando la estructura adicional dada por identificación del plano coordenado R^2 con el cuerpo de los números complejos (Plano de Gauss). Más precisamente determinaremos el *grupo euclídeo* $E(R^2)$ de R^2, es decir el grupo de todas las transformaciones de R^2 que preservan la distancia euclídea:

$$x = (x_1, x_2) \quad , \quad y = (y_1, y_2) \quad ,$$

$$d(x,y) = \sqrt{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}$$

O sea, $f \in E(R^2)$ sí y sólo si cualesquiera sean x,y en R^2

$$d(x,y) = d(f(x), f(y))$$

Se suele decir que una tal transformación es "rígida". Las mismas consideraciones permitirán obtener un grupo más grande que el euclídeo, a saber el *grupo de similitudes* de R^2, $Sim(R^2)$. Una similitud es, por definición, toda transformación f de R con la propiedad que existe $r \in R$, $r > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) = r.d(x,y)$$

En otros términos, las similitudes son las composiciones de transformaciones rígidas y homotecias.

Recordemos que (de acuerdo con el famoso *Programa de Erlangen** de Felix Klein, octubre de 1872) cada grupo G de transformaciones de R^2 da lugar a una *geometría*, es decir, el estudio de las propiedades de subconjuntos de R^2 invariantes por G. Así $E(R^2)$, determinará la *geometría euclídea*. En esta geometría podemos por ejemplo analizar la

---

* Se refiere a la disertación inaugural del matemático alemán Felix Klein (1849-1925) al incorporarse como profesor en la Universidad de la ciudad de Erlangen (Alemania Federal). Su título: "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", en octubre de 1872. El "Programa" de Klein consiste en clasificar cada rama de la geometría como teoría de invariantes de un cierto grupo de transformaciones. Así la Geometría Euclídea es el estudio de los invariantes del grupo de transformaciones del plano que preservan la distancia, la *Geometría Proyectiva*, la *Topología*, etc. entran en este "programa".

noción de congruencia de polígonos. Dos polígonos P y P' son *congruentes* si existe $f \in E(R^2)$ tal que $f(P) = P'$. En particular, podemos analizar triángulos y obtener los conocidos criterios de igualdad (o mejor, congruencias). En cambio utilizando $Sim(R^2)$ podemos obtener los conocidos criterios de semejanza.

Este punto de vista, en nuestra opinión, reviste gran importancia pues todo se logra a través de los números complejos y además de elemental resulta natural.

1. GRUPO DE TRANSFORMACIONES

Sea X un conjunto no vacío. Se llama *transformación* sobre X (o en X, o de X) a toda aplicación $f : X \to X$ *biyectiva*. Por ejemplo Id_X ó Id ó 1_X definida por $Id_X(x) = x$, $\forall\ x \in X$, es una transformación, la llamada transformación *identidad*.

Con $Tran(X)$ denotaremos la totalidad de transformaciones de X.

Si $f,g \in Tran(X)$ podemos definir la composición de f con g:

$$f.g : X \to X$$
$$(f.g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad \forall \quad x \in X.$$

Además siendo cada $f \in Tran(X)$ biyectiva está definida la transformación inversa $f^{-1} \in Tran(X)$ por:

$$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$$

La composición de aplicaciones es asociativa y define sobre $Tran(X)$ una estructura de grupo: el *grupo de transformaciones de* X. (Supondremos al lector familiar con la definición y propiedades básicas de grupos).

1.1. Ejemplos

1) Sea $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces $Tran(X)$ se denomina el *grupo simétrico* de grado n y se denota por S_n. Los elementos de S_n suelen denotarse por matrices

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(i) & & f(n) \end{pmatrix}$$

Debajo de cada $i \in X$ está su imagen $f(i)$ por f. Por ejemplo si $f \in S_3$ es