SOLUCIONES ENVIADAS

a problemas del número anterior

Ejercicio Nº 2: Cuándo es $\sqrt[n]{m} \geqslant \sqrt[m]{n}$?

Solución:

$$\sqrt[m]{n} \leqslant \sqrt[n]{m}$$

Elevando al exponente $n \cdot m$, y debido a la propiedad de monotonía de la potenciación en $\mathbb{N}$.

$$(\sqrt[m]{n})^{n \cdot m} \leqslant (\sqrt[n]{m})^{n \cdot m}$$

Simplificando

$$n^n \leqslant m^m$$

Esta última desigualdad es equivalente a la dada, y se satisface obviamente (debido a la monotonía de la potenciación) si $m \geqslant n$.

Vemos qué pasa si $m < n$:

$$m < n \Rightarrow m^m < n^m < n^n$$

donde la primera desigualdad del consecuente de la implicación se justifica por la monotonía con respecto a la base, y la segunda por la monotonía con respecto al exponente.

$$\therefore \quad m < n \Rightarrow m^m < n^n$$

De esta manera, el caso $m < n$ queda descartado y obtenemos:

$$\sqrt[n]{m} \geqslant \sqrt[m]{n} \Leftrightarrow m \geqslant n$$

Ejercicio Nº 3(a): Anillos de Boole (Festival de problemas propuestos por E. Gentile).

Un anillo asociativo R se dice booleano si $x^2 = x \quad \forall \ x \in R$.

Si R es un anillo Booleano probar que es conmutativo y de característica 2.

Solución: Veremos primero que $x + x = 0 \quad \forall \ x \in R$, es decir, que es de característica 2 :

$$-x = (-x)^2 = x^2 = x \qquad -x = x \qquad x + x = 0 .$$

Sean ahora x e y dos elementos cualesquiera de R :

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = \\ &= x(x+y) + y(x+y) = \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 = \\ &= x + xy + yx + y .\end{aligned}$$

Pero $(x+y)^2 = x + y$, por lo tanto:

$$\cancel{x} + \cancel{y} = \cancel{x} + xy + yx + \cancel{y}$$

donde las simplificaciones hechas se justifican por ser R un grupo con respecto a la suma

$$\therefore \; xy + yx = 0 .$$

Por ser R de característica 2 , es $xy = -xy$, y por lo tanto:

$$xy + yx = 0 \Rightarrow yx = -xy = xy \Rightarrow R \text{ es conmutativo.}$$

Ejercicio Nº 3(c): Anillos de Boole (Festival de problemas propuestos por E. Gentile).

Un anillo asociativo R se dice booleano si $x^2 = x \;\; \forall x \in R$.

Si $R = P(X)$, donde X es un conjunto no vacío, probar que respecto de: $x + y = (x - y) \cup (y - x)$

$x \cdot y = x \cap y$,

R es un anillo de Boole.

Solución: Designamos con $\bar{x}$ al complemento de x , es decir, $\bar{x} = X - x$.

Entonces: $x + y = (x - y) \cup (y - x) = (x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y)$,

ya que $x - y = x \cap \bar{y}$.

Utilizaremos, para probar que R es un anillo booleano, las leyes básicas de la teoría de conjuntos.

Probaremos primero que R es un grupo abeliano con respecto a la suma:

•) $x + y = (x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y) =$

$= (\bar{y} \cap x) \cup (y \cap \bar{x}) =$

$= (y \cap \bar{x}) \cup (\bar{y} \cap x) = y + x$

•) $(x + y) + z = [(x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y)] + z$

$= \{[(x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y)] \cap \bar{z}\} \cup \{\overline{(x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap u)} \cap z\}$

$= [(x \cap \bar{y} \cap \bar{z}) \cup (\bar{x} \cap y \cap \bar{z})] \cup [\overline{(x \cap \bar{y})} \cap \overline{(\bar{x} \cap y)} \cap z]$

$= (x \cap \bar{y} \cap \bar{z}) \cup (\bar{x} \cap y \cap \bar{z}) \cup [(\bar{x} \cup y) \cap (x \cup \bar{y}) \cap z]$

$= (x \cap \bar{y} \cap \bar{z}) \cup (\bar{x} \cap y \cap \bar{z}) \cup$

$\cup \{[(\bar{x} \cap x) \cup (y \cap x) \cup (\bar{x} \cap \bar{y}) \cup (y \cap \bar{y})] \cap z\}$

Dado que $\bar{x} \cap x = y \cap \bar{y} = \phi$, entonces:

$(x + y) + z = (x \cap \bar{y} \cap \bar{z}) \cup (\bar{x} \cap y \cap \bar{z}) \cup \{[(y \cap x) \cup (\bar{x} \cap \bar{y})] \cap z\}$

$= (x \cap \bar{y} \cap \bar{z}) \cup (\bar{x} \cap y \cap \bar{z}) \cup (y \cap x \cap z) \cup (\bar{x} \cap \bar{y} \cap z)$

$= [(x \cap \bar{y} \cap \bar{z}) \cup (y \cap x \cap z)] \cup [(\bar{x} \cap y \cap \bar{z}) \cup (\bar{x} \cap \bar{y} \cap z)]$

$= \{x \cap [(\bar{y} \cap \bar{z}) \cup (y \cap z)]\} \cup \{\bar{x} \cap [(y \cap \bar{z}) \cup (\bar{y} \cap z)]\}$

$= \{x \cap [(\bar{y} \cup y) \cap (\bar{z} \cup y) \cap (\bar{y} \cup z) \cap (\bar{z} \cup z)]\} \cup$

$\cup \{\bar{x} \cap (y + z)\}$

Dado que $\bar{y} \cup y = \bar{z} \cup z = X$, nos queda:

$(x + y) + z = \{x \cap [(\bar{z} \cup y) \cap (\bar{y} \cup z)]\} \cup \{\bar{x} \cap (y + z)\}$

$= \{x \cap [(\overline{z \cap \bar{y}}) \cap (\overline{y \cap \bar{z}})]\} \cup \{\bar{x} \cap (y + z)\}$

$= \{x \cap [(\overline{(z \cap \bar{y}) \cup (y \cap \bar{z})})]\} \cup \{\bar{x} \cap (y + z)\}$

$= [x \cap (\overline{y + z})] \cup [\bar{x} \cap (y + z)]$

$= x + (y + z)$.

•) $x + \phi = (x \cap \bar{\phi}) \cup (\bar{x} \cap \phi) =$

$= (x \cap X) \cup \phi = x \cup \phi = x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ϕ es elemento neutro de la suma.

•) $x + x = (x \cap \bar{x}) \cup (\bar{x} \cap x) = \phi \cup \phi = \phi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x es el opuesto de x $(\forall\ x \in R)$.

Por todo esto, R es un grupo abeliano respecto a la suma.

Además:

•) $x \cdot (y + z) = x \cdot [(y \cap \bar{z}) \cup (\bar{y} \cap z)] =$

$$= x \cap [(y \cap \bar{z}) \cup (\bar{y} \cap z)] =$$

$$= (x \cap y \cap \bar{z}) \cup (x \cap \bar{y} \cap z) .$$

También:

$$(x \cdot y) + (x \cdot z) = (x \cap y) + (x \cap z) =$$

$$= (x \cap y \cap \overline{x \cap z}) \cup (\overline{x \cap y} \cap x \cap z) =$$

$$= [x \cap y \cap (\bar{x} \cup \bar{z})] \cup [(\bar{x} \cup \bar{y}) \cap x \cap z] =$$

$$= (x \cap y \cap \bar{x}) \cup (x \cap y \cap \bar{z}) \cup (\bar{x} \cap x \cap z) \cup (\bar{y} \cap x \cap z)$$

$$= \phi \cup (x \cap y \cap \bar{z}) \cup \phi \cup (\bar{y} \cap x \cap z) =$$

$$= (x \cap y \cap \bar{z}) \cup (x \cap \bar{y} \cap z).$$

Por lo tanto:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Dado que $x \cdot y = x \cap y = y \cap x = y \cdot x$, entonces:

$$(x + y) \cdot z = z \cdot (x + y) = (z \cdot x) + (z \cdot y) = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

•) $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (y \cap z) = x \cap (y \cap z) =$

$$= (x \cap y) \cap z = (x \cdot y) \cap z = x \cdot y \cdot z .$$

Por lo tanto, R es un anillo asociativo. Falta ver que es booleano:

$$x^2 = x \cdot x = x \cap x = x \quad , \quad \forall\ x \in R.$$

<u>Ejercicio Nº 1</u>: Sea i la unidad imaginaria $(i^2 = -1)$. Para cuántos valores de n es $(n + i)^4$ un entero? (C. Sánchez).

<u>Solución</u>: Aplicamos la fórmula del binomio de Newton y resolvemos

$$(n + i)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} n^{4-j} i^j$$

$$= \binom{4}{0} n^4 i^0 + \binom{4}{1} n^3 i^1 + \binom{4}{2} n^2 i^2 + \binom{4}{3} n^1 i^3 + \binom{4}{4} n^0 i^4$$

$$= n^4 + 4n^3 i - 6n^2 - 4ni + 1$$

$$(n + i)^4 = (n^4 - 6n^2 + 1) + (4n^3 i - 4ni)$$

La condición necesaria y suficiente para que $(n + i)^4$ sea un número entero, es que lo sea la expresión:

$$4n^3 i - 4ni = 4ni(n^2 - 1)$$

Los únicos números enteros n que cumplen esta condición son:

$$n = -1 \; ; \quad n = 0 \; ; \quad n = 1 \; ,$$

ya que debe ser $4n(n^2 - 1) = 0$.

Estas soluciones fueron enviadas por el Sr. Miguel Angel Rubio, alumno de 3er. año de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Rosario.