IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{m}$, $m \in N$.

En esta breve Nota demostraremos el resultado, bien conocido, de la irracionalidad de $\sqrt{m}$, cualquiera sea m natural no cuadrado. El interés de la presente demostración está en que no utiliza la factorización entera, como es habitual en este tipo de demostraciones. Se utiliza simplemente el Principio de Buena Ordenación en N que establece que todo conjunto no vacío en N posee un elemento mínimo y su consecuencia inmediata, el algoritmo de división entera. La motivación de todo lo que sigue está dada por un ejercicio interesante en Análisis I que establece que si p/q es una fracción con $p, q \in N$ tal que aproxima a $\sqrt{2}$ en menos de $d > 0$ entonces la fracción

$$\frac{p+2q}{p+q}$$

aproxima a $\sqrt{2}$ en menos de $d/2$. Se intuye claramente que aquí hay una idea para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$. En efecto, sea p/q una fracción con $p,q \in N$ tal que $\sqrt{2} = p/q$ y tal que el denominador q es mínimo (entre todas esas fracciones). Es claro que si no hay fracciones p/q iguales a $\sqrt{2}$, se sigue que $\sqrt{2}$ es irracional (como debe ser!).

Sea p'/q *una* fracción "anterior" a la p/q en la construcción procedente. Por esto entendemos que

$$\frac{p}{q} = \frac{p' + 2q'}{p' + q'}$$

Para obtenerla simplemente resolvemos el sistema lineal

$$p = p' + 2q'$$
$$q = p' + q'$$

y obtenemos

$$p' = 2q - p$$
$$q' = p - q .$$

Notemos que,

$p' > 0$. En efecto, $p' < 0 \Rightarrow 2q < p \Rightarrow 4q^2 < p^2 \Rightarrow 2 < 1$.

$q' > 0$. En efecto, $p^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow (p-q)\cdot(p+q) = q^2 \Rightarrow p-q > 0$.

$q' < q$. En efecto, $q' \geqslant q \Rightarrow p \geqslant 2q \Rightarrow p^2 \geqslant 4q^2 \Rightarrow 1 \geqslant 2$.

Se tiene entonces

$$\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 - 2 = \left(\frac{2q - p}{p - q}\right)^2 - 2 = \frac{4q^2 + p^2 - 4qp - 2(p^2 + q^2 - 2pq)}{(p - q)^2}$$

Por lo tanto $\frac{p'}{q'} = \sqrt{2}$ con $p' > 0$, $q' > 0$ y $q' < q$ una contradicción. Se sigue que $\sqrt{2}$ es irracional.

Sea ahora $m \in N$, no cuadrado en N. Por analogía con lo anterior sea p/q. con $p,q \in N$, tal que $(p/q)^2 = m$, es decir $p/q = \sqrt{m}$. Supongamos q mínimo con esa propiedad. Es claro que $q > 1$, pues $q = 1$ $\Rightarrow p^2 = m$, caso excluído.

Escribamos, utilizando el algoritmo de división en Z:

$$p = tq + r \quad , \quad 0 < r < q \qquad (r = 0 \Rightarrow m = t^2)$$

Sean $p' = |mq - tp|$ y $q' = p - tq$.

Notemos que,

$p' > 0$. En efecto, $mq = tp \Rightarrow m^2q^2 = t^2p^2 \quad m = t^2$.

$q' > 0$. Klar.

$q' < q$. Klar.

Se tiene entonces

$$\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 - m = \frac{m^2q^2 + t^2p^2 - 2mtpq - m(p^2 + t^2q^2 - 2tpq)}{(p - tq)^2} = 0 .$$

Por lo tanto $p'/q' = \sqrt{m}$, $q' < q$, una contradicción. Q.E.D.

Enzo R. Gentile
Universidad de Buenos Aires