LA INVERSION CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Juan A. Tirao

En el número anterior de esta revista definimos la inversión con respecto a una circunferencia C de centro o y radio r como aquella transformación, que a cada punto $p \neq o$ del plano de C le hace corresponder el punto p' de la semirrecta $\overrightarrow{op}$ tal que

$$op \cdot op' = r^2 .$$

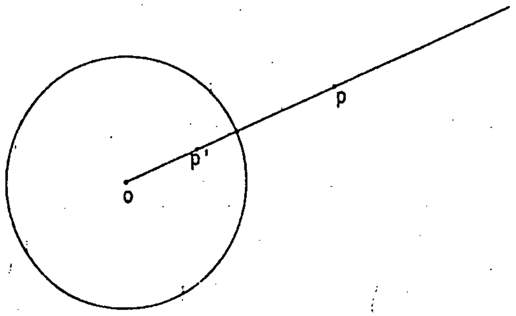

FIG. 1

Esta definición no asigna una imagen al centro o . Pero como cuando p se acerca a o, p' se aleja cada vez más en el plano, decimos que la imágen de o en la inversión es el *punto del infinito*. Claramente la inversión es una biyección cuya inversa es ella misma. Además intercambia el interior y el exterior del círculo C y los únicos puntos del plano que quedan fijos son los puntos de la circunferencia C .

También demostramos que la inversión con respecto a C transforma:

a) Una recta que pasa por o en una recta que pasa por o .

b) Una recta que no pasa por o en una circunferencia que pasa por o .

c) Una circunferencia que pasa por o en una recta que no pasa por o .

d) Una circunferencia que no pasa por o en una circunferencia que no pasa por o .

Otra propiedad importante de la inversión, que probamos en el número anterior, es la siguiente: la inversión conserva la congruencia de los ángulos entre dos curvas secantes, aunque invierte su sentido.

Para finalizar este rápido repaso recordemos, mirando sólo la Fig. 2, cómo se contruye el inverso p' de un punto p exterior a C, usando sólo el compás.

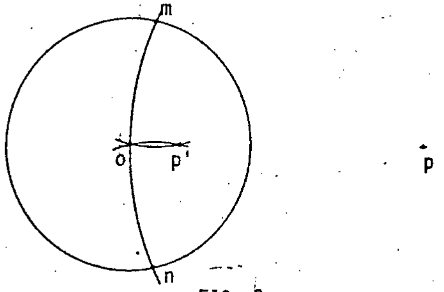

FIG. 2

Para construir el inverso de p cuando p es interior a C, primero prolongamos $\overline{op}$ con el compás tantas veces (digamos n) como para salir fuera de C, determinando un punto q exterior a C. Luego construimos q' inverso de q. Entonces el punto $p' \in \overrightarrow{op}$ tal que $\overline{op'} = n \cdot \overline{oq'}$ es el inverso de p.

Veamos cómo podemos construir un instrumento mecánico para dibujar el inverso de un punto. Como se ve en la Figura 3

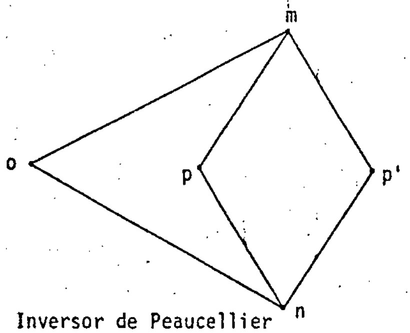

FIG. 3 Inversor de Peaucellier

el aparato consta de seis varillas rígidas, dos de longitud a y cuatro de longitud menor b. Las varillas están articuladas en los puntos o, p, p', m y n; todo el instrumento puede moverse sujeto a estas condiciones.

Es evidente que o, p y p' están alineados. Para calcular $op \cdot op'$ denotemos con x el centro del rombo $pmp'n$ y observemos

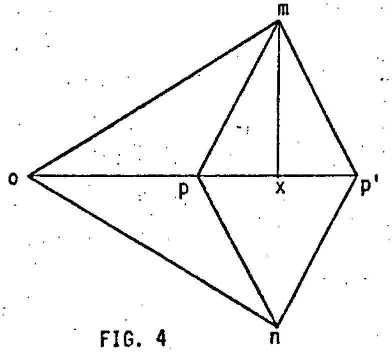

FIG. 4

que

$$op \cdot op' = (ox - px)(ox + xp') = ox^2 - px^2$$
$$= om^2 - mx^2 - (pm^2 - mx^2) = a^2 - b^2$$

Como la cantidad $a^2 - b^2$ es constante, vemos que p y p' son puntos inversos con respecto a la circunferencia de centro o y radio $r = (a^2 - b^2)^{1/2}$. De esta manera podemos dibujar el inverso de cualquier punto q de la corona circular definida por $a - b < oq < a + b$.

Este instrumento fue inventado por Peaucellier, oficial naval francés, en 1864 con el propósito, en la época de la máquina de vapor, de convertir un movimiento circular en rectilíneo.

Aplicación al problema de Apolonio.

Un buen ejemplo de la utilidad de la inversión es la siguiente solución geométrica del problema de Apolonio (200 años a.C.). Este es uno de los más famosos problemas clásicos de construcción, en el cual se dan tres circunferencias del plano y se pide trazar otra, tangente a las tres. En general el problema tiene ocho soluciones que corresponden a las condiciones de que las circunferencias pedidas sean tangentes interior o exteriormente a cada una de las circunferencias dadas. Se debe admitir que algunas de las circunferencias dadas o de las solucio nes, degeneren en un punto o en una recta. También puede suceder que el número de soluciones sea menor y hasta que no exista solución real del problema como ocurre si las tres circunferencias dadas son concéntricas.

Mediante una inversión, el problema de Apolonio correspondiente a tres circunferencias dadas se transforma en el mismo problema para otras circunferencias. Ahora, si podemos resolver el problema para esta terna de circunferencias, lo habremos resuelto para aquella, invirtiendo cada una de las soluciones halladas (¿por qué?). Veamos un ejemplo: supongamos que partimos de tres circunferencias de centros a, b y c como se indica en la Fig. 5.

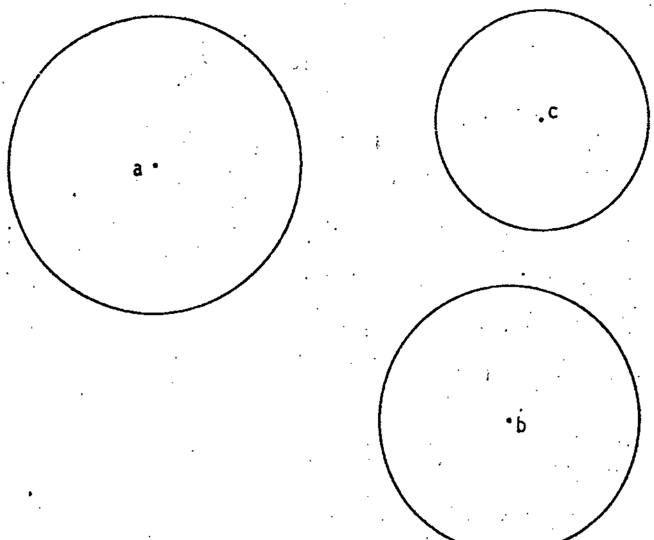

FIG. 5

Si queremos determinar la circunferencia tangente exteriormente a las tres circunferencias dadas, podemos reemplazar éstas por otras tres que tengan respectivamente los mismos centros y cuyos radios se hayan incrementado una misma cantidad d de tal manera que dos de ellas sean tangentes en un punto m .

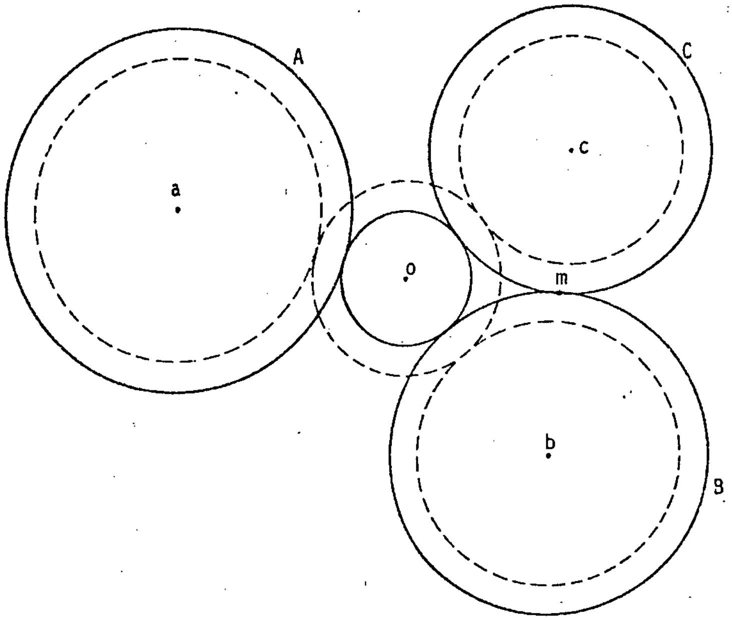

FIG. 6

Evidentemente, si hallamos la circunferencia H de centro o y radio r tangente exteriormente a estas tres, la circunferencia del mismo centro y radio r + d será la circunferencia buscada. A continuación invertimos toda la figura respecto de una circunferencia de centro m. Las circunferencias de centro b y c se transforman en un par de rectas paralelas B' y C' y la circunferencia de centro a en una circunferencia A' contenida en la franja limitada por B' y C'.

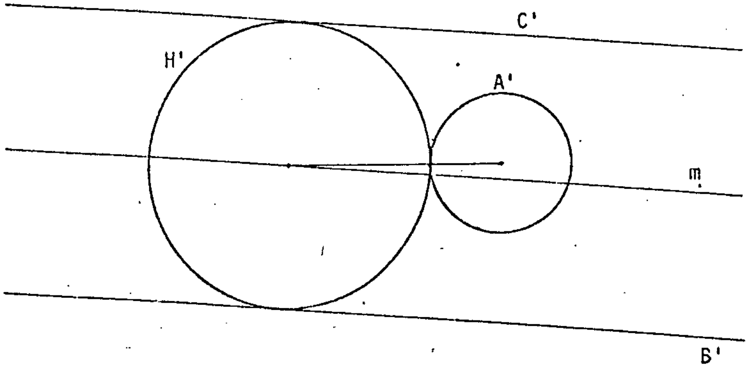

FIG. 7

La circunferencia desconocida H se transforma en una circunferencia H' tangente a A', B' y C' y su radio es la mitad de la distancia entre B' y C'. Su centro es uno de los dos puntos de intersección de la paralela media entre B' y C' con la circunferencia del mismo centro que A' y radio igual al radio de A' más el radio de H'. Finalmente construyendo la inversa de H' obtenemos la circunferencia H, buscada.

Construcciones geométricas. Teorema de Mascheroni.

Los problemas de construcción usando solamente la regla y el compás han sido siempre un tema favorito en geometría. En todos estos problemas la regla se utiliza como borde rectilíneo para dibujar rectas, no para medir distancias. En principio, cabe esperar que si permitimos usar solamente el compás la clase de construcciones posibles sea más restringida. Naturalmente que no podemos trazar la recta que une dos puntos sin la regla, pero podemos suponer que la recta está dada por dos de sus puntos. Veamos algunos ejemplos de construcciones usando sólo el compás.

Duplicación de un segmento $\overline{ab}$.

Esta construcción la vimos en el número anterior de esta revista.

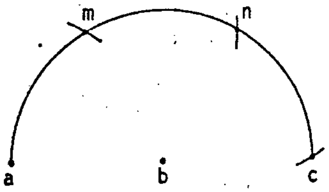

FIG. 8

Como no tenemos regla, el segmento $\overline{ab}$ viene dado solamente por sus extremos. Con centro en b trazamos una circunferencia de radio ab y marcamos sobre ésta a partir de a los puntos m, n, c, tales que am = mn = nc = ab. Entonces c es el punto buscado, ya que los triángulos $\overset{\triangle}{amb}$, $\overset{\triangle}{bmn}$, $\overset{\triangle}{bnc}$ son equiláteros y en consecuencia los puntos a, b, c están alineados.

Ahora, que sabemos duplicar un segmento y hallar el inverso de un punto usando solamente el compás podemos determinar también el punto medio de un segmento (ver Ejercicio 3). Otra construcción interesante es la de determinar el centro de una circunferencia dada. Elegimos un punto p de la circunferencia y con centro en él trazamos otra circunferencia de menor radio que corta a la dada en los puntos m y n. Con estos centros trazamos arcos de radio pm que se cortan en p y q. Comparando con la Fig. 2, vemos que el inverso de q respecto de la circunferencia con centro en p es precisamente el centro buscado q'.

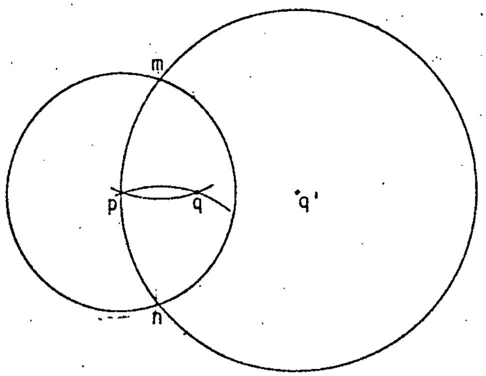

FIG. 9

El matemático italiano Mascheroni (1750-1800) estableció, para sorpresa de muchos, que *toda construcción geométrica posible mediante la regla y el compás puede lograrse sólo con el compás*. Naturalmente que no podemos dibujar la recta que pasa por dos puntos sin la regla, pero sí podemos admitir que la recta está dada si conocemos dos de sus puntos. Es con esta salvedad como debemos entender el teorema de Mascheroni.

Toda construcción con regla y compás consiste en la aplicación de una sucesión finita de algunas de las siguientes operaciones elementales:

a) Trazar una circunferencia dados su centro y su radio.

b) Determinar los puntos de intersección de dos circunferencias secantes.

c) Hallar los puntos de intersección de una recta y una circunferencia, cuando éstas se cortan.

d) Hallar el punto de intersección de dos rectas no paralelas.

Evidentemente, que para establecer el teorema de Mascheroni sólo basta demostrar que las dos últimas operaciones pueden realizrse usando solamente el compás.

Para resolver c) consideremos una circunferencia C de centro o y radio r y una recta dada por los puntos a y b que dista de o menos que r.

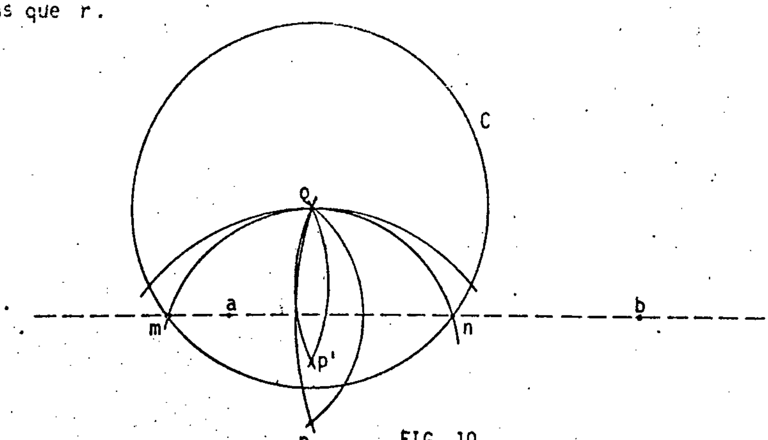

FIG. 10

Con centros a y b trazamos dos arcos de circunferencias de radios ao y bo, respectivamente. Estos se cortan en o y p, salvo cuando a, o y b están alineados. Este caso lo consideraremos a continuación Hallamos el inverso p' de p con respecto a C y con centro en p' trazamos la circunferencia de radio op', determinando sobre C los puntos m y n. Para demostrar que m y n son los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{ab}$ con la circunferencia C, basta verificar que m y n equidistan de o y p . Pero esto resulta de recordar que para construir el inverso de p' se trazan dos arcos de radio r con centros en m y n.

Si la recta $\overleftrightarrow{ab}$ pasa por o la construcción anterior no es válida. En este caso con centro en a trazamos una circunferencia que corte a C en dos puntos distintos m y n.

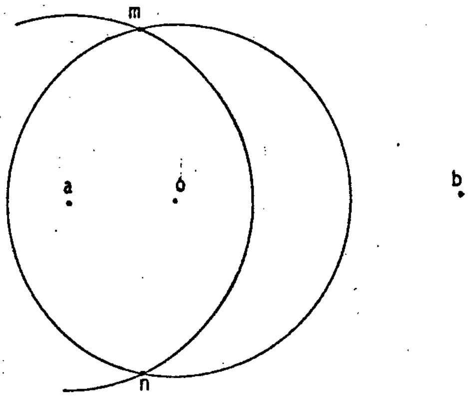

FIG. 11

El problema se reduce entonces a saber bisectar, sólo con el compás, un arco de circunferencia. Sean m y n los extremos de un arco de circunferencia de centro o .

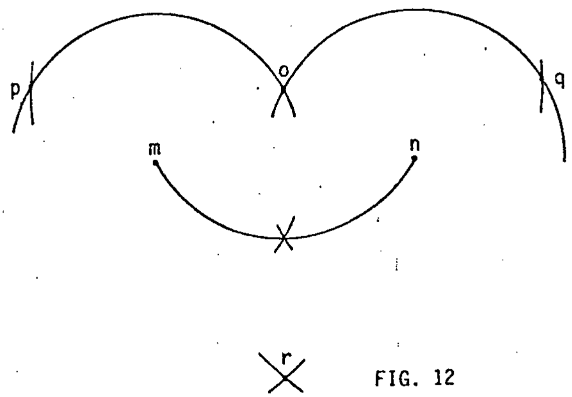

FIG. 12

Con centro en m y n trazamos dos arcos de radio om y a partir de o con;truimos sobre ellos dos arcos op y oq congruentes. al arco dado mn (Fig. 12). Con centro en p ó q describimos un arco que corta al mn. El punto de intersección es el punto medio buscado.

Para hallar el punto de intersección de dos rectas basta saber determinar la circunferencia inversa de la recta que pasa por dos puntos dados. Pero esta construcción fue dada en la primera parte de la solución de c). Con esto queda demostrado el Teorema de Mascheroni.

Problemas

1. b. Sean A y B dos circunferencias (pensamos a las rectas como casos particulares de circunferencias) y sean ι_A y ι_B las inversiones con respecto a A y B respectivamente (si A es una recta, ι_A es la correspondiente simetría axial). Verificar experimentalmente, usando una regla no graduada y un compás, que

$$\iota_A \cdot \iota_B = \iota_{B'} \cdot \iota_A \quad ,$$

donde $B' = \iota_A(B)$.

   b. Deducir que el centro de la inversa de una circunferencia es el inverso en la circunferencia de inversión, del inverso del centro de la circunferencia de inversión en la circunferencia dada.

2. Considérense simultáneamente las figuras 6 y 7.
   a. ¿Cuántas soluciones tiene el problema de Apolonio cuando las circunferencias dadas A, B y C están ubicadas como en la Figura 6?
   b. Construir, usando solamente la regla (no graduada) y el compás, todas las soluciones del problema de Apolonio para las circunferencias A', B' y C' dadas en la Figura 7.
   c. Establecer cualitativamente la correspondencia entre las so

luciones de los problemas de Apolonio referidos en a. y b., generada por la inversión de centro m considerada.

3. Determinar el punto medio de un segmento, usando solamente el compás.

4. Interpretar la solución de la parte c. del Teorema de Mascheroni a la luz del Ejercicio 1.b.

5. Justificar la construcción dada en la Figura 12.

6. Dados solamente los puntos a, b, m, n de las rectas secantes $\overleftrightarrow{ab}$ y $\overleftrightarrow{mn}$, hallar efectivamente usando sólo el compás su punto de intersección.

Instituto de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba