SOLUCIONES ENVIADAS

Soluciones a ejercicios del artículo Número Reales de Jorge A. Vargas, REM Vol. 1 Nº 2 p. 29. Estas soluciones fueron enviadas por Malva A. Alberto de Toso, Ayudante de Primera U.T.N. Filial Santa Fe.

Ejercicios (pág. 31)

1) Pruebe que $-x = (-1)\cdot x$.

Indicamos con $-x$ "el opuesto de x". Por la unicidad del opuesto de un número es suficiente probar que $x + (-1)x = 0$

$x + (-1)x = 1\cdot x + (-1)x$ — 1 es neutro multiplicativo

Pero $1x + (-1)x = x\cdot 1 + x(-1)$ — conmutativa

$= x\cdot(1 + (-1))$ — distributiva

$= x\cdot 0$ — opuesto de 1 es (-1)

$x + (-1)x = 0$ — por ejercicio 2

Luego $(-1)x$ "es un opuesto de x, la unicidad del opuesto (C.1) implica que $-x = (-1)x$. OED

2) Probar $x\cdot 0 = 0$

$x\cdot 0 = x\cdot(0+0)$ por ser 0 neutro aditivo

$= x\cdot 0 + x\cdot 0$ distributividad

$x\cdot 0 = x\cdot 0 + 0 = x\cdot 0 + x\cdot 0$ por ser 0 neutro aditivo

por ejercicio 3 (simplificación)

$x\cdot 0 + 0 = x\cdot 0 + x\cdot 0 \Rightarrow 0 = x\cdot 0$

$\therefore$ $x\cdot 0 = 0$ (conmutatividad) QED

3) Si $b+d = b+h$ $d = h$

$d = d+0 = d + (b+(-b)) = (d+b)+(-b) = (b+h)+(-b) =$

$$d \underset{\substack{\downarrow \\ \text{0 neutro} \\ \text{aditivo}}}{=} d + 0 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{opuesto}}}{=} d + [b + (-b)] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{asociatividad}}}{=} (d + b) + (-b) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{hipótesis}}}{=} (b + h) + (-b) =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{conmutatividad}}}{=} (h + b) + (-b) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{asociatividad}}}{=} h + [b + (-b)] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{opuesto}}}{=} h + 0 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{neutro aditivo}}}{=} h$$

$$d = h$$

QED

4) Qué relación hay entre los tres últimos ejercicios?

Para resolver 1) hace falta resolver 2) y para resolver 2) es necesario resolver 3).

5) Si $b \cdot d = b \cdot h$ y $b \neq 0$ entonces $d = h$

$$d \underset{\substack{\downarrow \\ \text{neutro}}}{=} d \cdot 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{inverso} \\ b \neq 0\ \exists b^{-1}}}{=} d \cdot (b \cdot b^{-1}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{asociati-} \\ \text{vidad}}}{=} (d \cdot b) b^{-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{conmuta-} \\ \text{tividad}}}{=} (b \cdot d) \cdot b^{-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{hipótesis}}}{=} (b \cdot h) b^{-1} =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{conmuta-} \\ \text{tiva}}}{=} (h \cdot b) b^{-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{asociati-} \\ \text{vidad}}}{=} h (b \cdot b^{-1}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{universo}}}{=} h \cdot 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{neutro}}}{=} h$$

$$\therefore \ d = h$$

QED

Como $0 \cdot 1 = 0 \cdot 0$ inferimos que la hipótesis $b \neq 0$ es necesaria.

6) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

$$0 = a + (-a) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ejer.2)}}}{=} [a + (-a)] \cdot b \underset{\substack{\downarrow \\ \text{conmut.}}}{=} b \cdot [a + (-a)] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{distrib.}}}{=} b \cdot a + b(-a) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{conmut.}}}{=}$$

$0 = ab + (-a) \cdot b \quad \therefore \quad -(a \cdot b) = (-a) b$ por C.1 (1)

$0 = b + (-b) = a \cdot [b + (-b)] = ab + a(-b)$

$\therefore \quad -(ab) = a(-b)$ por C.1 (2)

De (1) y (2) $a\cdot(-b) = -(a\cdot b) = (-a)\cdot b$ QED

7) $a\cdot b = (-a)\cdot(-b)$

$$\underbrace{0 = a + (-a)}_{\text{opuesto}} \underbrace{= [a + (-a)]\cdot(-b)}_{\text{ej.2) y conmut. } x\cdot 0 = 0 = 0\cdot x} \underbrace{= a(-b) + (-a)\cdot(-b)}_{\text{distrib. conmut.}} \underbrace{=}_{\text{ej.6)}}$$

$= [-(a\cdot b)] + (-a)\cdot(-b)$ $\therefore$ por prop. del opuesto

$-[(-a)\cdot(-b)] = -(a\cdot b)$

por ej. 1)

$(-1)[(-a)\cdot(-b)] = (-1)(a\cdot b) \Rightarrow$ (por ej. 5)) $(-a)\cdot(-b) = (ab)$

O bien por conmutatividad $a\cdot b = (-a)\cdot(-b)$ QED

8) $(-1)\cdot(-1) = 1\cdot 1$ por ejer. 7

$1\cdot 1 = 1$ por ser 1 neutro multiplicativo

$\therefore$ $(-1)\cdot(-1) = 1$ QED

9) ¿Qué relación hay entre los ejercicios 6, 7, 8?

Para resolver 8) es necesario conocer el resultado de 7) (6).

10) ¿Es cierto que si $a + a = 0$ entonces $a = 0$?

Si $a + a = 0 \Rightarrow \underbrace{a + a = 0}_{\text{hipótesis}} \underbrace{= a + (-a)}_{\text{opuesto}}$

Como $a + a = a + (-a) \Rightarrow a = (-a)$ (*)

por ej 3

supongo que $a \neq 0$ $\underbrace{1\cdot a = a}_{\text{neutro multip.}} \underbrace{= (-a)}_{(*)} \underbrace{= (-1)\cdot a}_{\text{ej 1)}} \Rightarrow$ conmutativa

$a\cdot 1 = a(-1)$ y $a \neq 0$ por 5) $\Rightarrow 1 = -1$ absurdo

$\therefore$ $a = 0$

<u>El órden en R</u> (demostraciones pág. 33)

<u>C.4</u>

1) Si $0 < a$; $0 < b$ entonces $0 < a \cdot b$

por axioma e) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces

$$0 \cdot b < ab$$

pero por ejerc. 2) $0 \cdot b = 0$, consecuentemente $0 < a \cdot b$.

2) Si $a < 0$, $b < 0$ entonces $0 < a \cdot b$ como $b < 0$ entonces $0 < -b$ por C.3.

Tenemos $a < 0$; $0 < -b$ entonces por axioma e) es

$a \cdot (-b) < 0 \cdot (-b) = 0$,

nuevamente por C.3 $0 < -[a \cdot (-b)] = a \cdot b$ $\therefore$ $0 < a \cdot b$.

3) Si $a < 0$; $0 < b$ entonces $ab < 0$.

Por axioma e) $a < 0$ y $0 < b \Rightarrow a \cdot b < 0 \cdot b = 0$

luego $a \cdot b < 0$.

4) Si $0 < a$; $0 < b$ entonces $0 < a + b$.

Como $0 < a$ entonces por axioma d) es

$0 + b < a + b$, luego por ser 0 neutro

$b < a + b$.

Como $0 < b$ y $b < a + b$ por axioma b) es $0 < a + b$.

5) Si $a < 0$; $b < 0$ entonces $a + b < 0$.

Como $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$ por C.3

$b < 0 \Rightarrow 0 < -b$ por C.3

por C.4 4) $0 < (-a) + (-b) \underset{\text{por } (*)}{=} -(a + b) \Rightarrow a + b < 0$

(*) Demostraremos que $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

Demostración $(-a) + (-b) = -(a + b)$

$$\underset{\text{ejerc. 1}}{(-a) + (-b) \overset{\downarrow}{=}} (-1).a + (-1).b \underset{\text{distrib.}}{\overset{\downarrow}{=}} (-1)(a + b) \underset{\text{ejerc. 1}}{\overset{\downarrow}{=}} -(a + b)$$

6) Ver ejercicio 10) pag. 31. R.E.M. Otra forma de resolverlo es:

Si $a \neq 0$, entonces $a > 0$ ó $a < 0$. C.4 4) a 5) dicen que

$a + a > 0$ ó $a + a < 0$ absurdo.

<u>C.7</u> $x \neq 0 \quad 0 < x^2$

$x \neq 0$ por axioma c) $x < 0$ ó $0 < x$

Por C.4. 2) $x < 0$; $x < 0 \Rightarrow 0 < x.x \Rightarrow 0 < x^2$

ó

Por C.4. 1) $0 < x$; $0 < x \Rightarrow 0 < x.x \Rightarrow 0 < x$

$\therefore 0 < x^2$ QED

$x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$

Debemos mostrar dos teoremas

$\Leftarrow$) $x = y = 0$ entonces $x^2 + y^2 = 0$

$\Rightarrow$) $x^2 + y^2 = 0$ entonces $x = y = 0$

$\Leftarrow$) $x = 0 \Rightarrow x.x = 0.0 = 0$

$y = 0 \Rightarrow y.y = 0.0 = 0$ luego $x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$

supongo que $x \neq 0$ ó $y \neq 0$ (negamos la tesis).

Analizamos cada caso

i) $x \neq 0$; $y = 0$. Como $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x^2$

$y = 0 \Rightarrow y^2 = 0$

Entonces $0 = y^2 = 0 + y^2 < x^2$ $y^2 = 0$ (por hip)

$\therefore 0 < 0$ absurdo

ii) $x = 0$; $y \neq 0$ con la misma demost. ant. llegamos a un absurdo

iii) $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow 0 < x^2 \quad 0 < y^2$

Como vale C.4 4) $0 < x^2$ y $0 < y^2$ entonces

$0 < x^2 + y^2 = 0$ (por hip)

$\therefore 0 < 0$ absurdo

En cualquiera de los casos i) ii) iii) al negar la tesis llegamos a un absurdo $\therefore$

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \qquad \text{QED}$$

Ejercicio: $-(-a) = a$

Por axioma del opuesto como $(-a) + a = a + (-a) = 0$. Entonces la unicidad del opuesto implica $-(-a) = a$

Pregunta:

¿Es siempre -a negativo?. No, justificado en C.3.

si $0 < a \Rightarrow -a < 0$

si $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$

cuando a es negativo, -a es positivo

si $a = -1 \Rightarrow -(-1$ $\quad -a = 1$ es positivo

¿y $-a^2$?

si $a \neq 0$ sabemos por C.7 $0 < a^2 \Rightarrow -a^2 < 0$ por C.3.

si $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow -a^2 = -0 = 0$

Conclusión: si a es un número real, entonces $-a^2 \leq 0$

Ejercicio: si $x = -x \Rightarrow x = 0$

Supongo $x \neq 0$ $\quad 1.x \underset{\substack{\downarrow \\ \text{neutro}}}{=} x \underset{\substack{\downarrow \\ \text{hip}}}{=} -x \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ej.1)}}}{=} (-1)x \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{absurdo}}}{1 = -1}$

que provino de suponer que $x \neq 0$ $\therefore x = 0$

Ejercicio: $x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow -y \leq -x$

Demostraremos

$$x \leq y \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 \leq y - x \overset{(2)}{\Rightarrow} x - y \leq 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} -y \leq -x \overset{(4)}{\Rightarrow} x \leq y \quad \text{con}$$

lo que probaremos todas las equivalencias

(1) $x \leq y \Rightarrow 0 \leq y - x$ por el hecho fundamental

(2) $0 \leq y - x$

$0 + (x-y) \leq (y-x) + (x-y)$ por axioma d)

$x - y \leq y + [(-x) + x] + (-y) = y + (-y) = 0$ por axiomas que verifican "+" ; "."

$x - y \leq 0$

(3) $x - y \leq 0$

$(x-y) + (-x) \leq 0 + (-x)$ por axioma d)

$[x + (-x)] + (-y) \leq -x$ conmutativo, asoc.

$-y \leq -x$ elemento opuesto

(4) $-y \leq -x$

$-y + y \leq -x + y$ por d)

$0 \leq -x + y$ por d) y

$0 + x \leq (-x+y) + x = (-x+x) + y = 0 + y = y$ axiomas de la "+".

$x \leq y$

Otras propiedades

⊛ $0 < x \leftrightarrow 0 < x^{-1}$

$\rightarrow$) Supongo que $x^{-1} \leq 0$, por hipótesis $0 < x$

$x.x^{-1} \leq x.0 = 0 \Rightarrow 1 \leq 0$ absurdo que provino de suponer que $x^{-1} \leq 0$ $\therefore 0 < x^{-1}$

$\leftarrow$) Supongo que $x \leq 0$, por hipótesis $0 < x^{-1}$

$x^{-1}.x \leq x^{-1}.0 = 0 \Rightarrow 1 \leq 0$ absurdo que provino de suponer que $x \leq 0$, luego $0 < x$

⊛ $x < 0 \leftrightarrow x^{-1} < 0$

$\rightarrow$) Supongo $0 \leq x^{-1}$

Como $x < 0$ y $0 \leq x^{-1}$ entonces $x.x^{-1} \leq 0.x^{-1}$.

de donde $1 \leq 0$ absurdo. Por consiguiente $x^{-1} < 0$

$\leftarrow$) Idem razonamiento anterior.

⊛ si d,b tienen la misma positividad

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow ad < cb$

supongo $0 < d$; $0 < b$

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \underset{0<d}{\leftrightarrow} \frac{a}{b}.d < \frac{c.d}{d} \underset{0<b}{\leftrightarrow} \frac{a.d.b}{b} < cb \leftrightarrow$

$\leftrightarrow a.d < cb$.

Supongo $d < 0$; $b < 0$ $\therefore$ $0 < -d$; $0 < -b$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \underset{0<(-d)}{\iff} \frac{a.(-d)}{b} < \frac{c\ (-d)}{d} = -\frac{c.d}{d} \underset{0<(-b)}{\iff}$$

$$\iff \frac{a(-d).(-b)}{b} < (-c).(-b)$$

$$\iff ad < c.b$$

por distintos axiomas utiliza_ dos reiteradamente.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1) "Analizar la validez del siguiente razonamiento...." (Gentile - pág. 71).

$\nexists\ x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 = x - 1$

a lo que es igual $\nexists\ x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4.1.1 = 1 - 4 = -3$ como el discriminante de la ecuación es negativo, la misma no se satisface para ningún nú_ mero real.

3) "Sean $x,y \in \mathbb{R}$ " (Gentile - pág. 72).

a) Probar i) $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$

ii) vale = si y sólo sí $x = y = 0$

b) Probar que $x^2 \pm xy + y^2 \geqslant 0$ con = si y sólo sí $x = y = 0$

$2\ (x^2 \pm xy + y^2) = 2\ x^2 \pm 2\ xy + 2\ y^2 = x^2 + y^2 \pm 2\ xy + x^2 + y^2$

$= (x \pm y)^2 + x^2 + y^2 \geqslant 0$ con = sii $x = y = 0$

c) $x^2 \pm x + 1 > 0$

Caso particular de a) y b) cuando $y = 1$, además como $y \neq 0$ entonces

$x^2 \pm x + 1 > 0$

Nota:

Este ejercicio nos demuestra lo ya afirmado en ejercicio 1) ya que con lo demostrado ahora es

$x^2 \pm x + 1 > 0$, lo que afirma que $x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 \pm x + 1 = 0$.

4) "Probar que $\forall\, a \in Z$, a impar $16/a^4 - 1$".

Es suficiente probar para $a \in Z^+$ pues $a^4 = (-a)^4$

Método de inducción completa

i) Sea $a = 1$ $16/_{1-1}$ porque $0 \in Z \;/\; 0 = 1-1 = 0.16$.

La proposición es válida para $a = 1$.

ii) Supongo válida para $a = 2n - 1$, es decir por hipótesis inductiva $16/_{a^4-1}$ con $a = 2n-1$, entonces

$$k \in Z^+ \;/\; (2n-1)^4 - 1 = 16.k$$

Demostraremos que vale para $a = 2n + 1$ (impar sucesivo)

$$(2n+1)^4 - 1 = [(2n+1)^2]^2 - 1 = (4n^2+4n+1)^2 - 1 =$$

$$= 16\,n^4 + 16\,n^2 + \cancel{1} + 32\,n^3 + 8\,n^2 + 8\,n - \cancel{1} =$$

$$\downarrow$$

sumo y resto $32\,n^3$ y $8\,n$

$$= \underbrace{16\,n^4 - 32\,n^3 + 24\,n^2 - 8\,n}_{(2n-1)^4-1 = 16\,k \text{ por hipótesis de inducción}} + 64\,n^3 + 16\,n$$

luego

$$(2n+1)^4 - 1 = 16\,k + 64\,n^3 + 16\,n$$

$$= 16\,[\,k + 4\,n^3 + n\,] \;\therefore\; {}^{16}/_{a^4-1} \quad \forall\, a\ Z \text{ a impar}$$

Para otra solución consultar Gentile - Notas de Algebra. Ed. Eudeba.

5) "$a, b \in \mathbb{R}$ $a > 0$; $b > 0$. Probar $a^2 + b^2 = 7\,ab \Rightarrow$
$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$".

Sea entonces $a^2 + b^2 = 7\,ab$.

Sumando miembro a miembro $2\,ab$ obtenemos la igualdad

$a^2 + b^2 + 2\,ab = 9\,ab$, o bien

$(a+b)^2 = 9\,ab$, dividiendo la igualdad por 9

$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = a.b$ aplicando a ambos miembros $\sqrt{\ }$ (tenemos en cuenta que $a > 0$; $b > 0$)

$\frac{a+b}{3} = \sqrt{a.b}$ aplicando logaritmo a ambos miembros resulta

$$\log \frac{a+b}{3} = \log \sqrt{a.b} = \frac{1}{2} \log a.b = \frac{1}{2} [\log a + \log b]$$

QED

También enviaron soluciones las siguientes personas:

-Nora E. Salomón, Estudiante de la Facultad de Ciencias Exactas - UBA. Ej. (5) y (6).

-Clyde D. Monzón de Comodoro Rivadavia. Ej. (5) y (6).

-Francisco F. Villaverde de U.T.N. Filial Haedo. Ej. (3)(b) y (c), Ej. (5) y (6).

Transcribimos a continuación la solución al ej. 6, enviada por el Sr. Villaverde.

$A = bc$

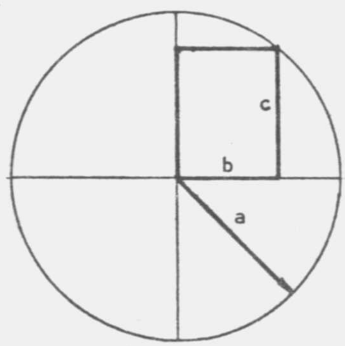
$p = 2\ (b+c)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 + 2A = b^2 + c^2 + 2bc$

$a^2 + 2A = (b+c)^2$

$$\boxed{P = 2\sqrt{a^2 + 2A}}$$



Solución a Problema (7) - Vol. 1 Nº 2, enviada por Dr. Oscar Cámpoli - I.M.A.F.

Hacemos primero el caso $n = 5$, $m = 3$ como sugerido. Para ello, graficamos la tabla de los sucesivos trasvasamientos.

$$\begin{array}{ccccc}
3 & & 5 & & 8 \\
C_1 & & C_2 & & C_3 \\
0 & & 0 & \leftarrow & 8 \\
0 & \leftarrow & 5 & & 3 \\
3 & & 2 & & 3 \\
0 & \leftarrow & 2 & & 6 \\
2 & & 0 & \leftarrow & 6 \\
2 & \leftarrow & 5 & & 1 \\
3 & & 4 & & 1 \\
0 & & 4 & & 4
\end{array}$$

Caso general. Suponemos $m<n$ y graficamos una serie de trasvasamientos

$$\begin{array}{ccccc}
m & & n & & m+n \\
C_1 & & C_2 & & C_3 \\
0 & & 0 & \leftarrow & m+n \\
0 & \leftarrow & n & & m \\
m & & n-m & & m \\
0 & \leftarrow & n-m & & 2m \\
m & & n-2m & & 2m \\
0 & & n-2m & & 3m
\end{array}$$

Como $(n,m)=1$ (y suponemos $m<n$), el proceso anterior muestra como lograr la posición

$$0 \qquad n-k_1m \qquad (k_1+1)m$$

donde k_1 sea tal que $0<n-k_1m<m$

Luego seguimos

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \leftarrow & n-k_1m & & (k_1+1)m \\
n-k_1m & & 0 & \leftarrow & (k_1+1)m \\
n-k_1m & \leftarrow & n & & (k_1+1)m-n \\
m & & 2n-(k_1+1)m & & (k_1+1)m-n \\
0 & & 2n-(k_1+1)m & & (k_1+2)m-n
\end{array}$$

El proceso anterior muestra como lograr la posición

$$0 \qquad 2n-(k_2+1)m \qquad (k_2+2)m-n$$

donde k_2 sea tal que $0<2n-(k_2+1)m<m$.

Como podemos seguir trasvasando de ésta manera, lo único que restaría ver es que podemos hallar *naturales* r y s tales que

$$\text{(I)} \qquad rn - sm = \frac{m+n}{2}$$

ya que entonces el proceso anterior (que fue hecho dos veces) hecho r veces nos daría la posición

$$0 \qquad rn - sm \qquad (s+1)m-(r-1)n$$

que es la buscada.

Probemos entonces que podemos hallar naturales r,s como en (I).

Como $(m,n) = 1$, podemos entonces hallar *enteros* r_1, s_1 tales que

$$r_1 n - s_1 m = \frac{m+n}{2}$$

Además claramente podemos hallar enteros u, v tales que

$$un + vm = 0$$

Como

$$(-u)n + (-v)m = 0$$

podemos suponer $u > 0$

Como además cualquiera sea el natural k se tiene

$$kun + kvm = 0$$

podemos entonces hallar u tal que $u + r_1 > 0$, $un + vm = 0$

Llamemos $r = u + r_1$, $s = s_1 - v$

Entonces $rn - sm = \frac{m+n}{2}$

Como $\frac{m+n}{2} < n$, $r > 0$ y $0<m<n$ es imposible que sea $s \leq 0$ y luego $s > 0$ como deseábamos.

Parece interesante incluir la siguiente solución al mismo problema enviada por Dr. Enzo R. Gentile - Fac. de Ciencias Exactas - UBA.

Problema 7) Sean m y n impares, $m < n$, $(n,m) = 1$. Se tienen tres recipientes C_1, C_2, C_3 con capacidades para m, n y $m+n$ litros, respectivamente. El recipiente C_3 se encuentra lleno de líquido, C_1 y C_2 estando vacíos. Se desea distribuir el contenido de C_3, usando sólo los tres recipientes, de manera que C_2 y C_3 contengan, cada uno, $\frac{m+n}{2}$ litros. ¿Cómo hacerlo?

Solución: Observemos que n y $\frac{m+n}{2}$ son coprimos, por lo tanto la ecuación lineal de congruencia

$$x.m \equiv \frac{m+n}{2} \pmod{n}$$

admite solución x, $1 \leq x \leq n$.

La idea es ir colocando en C_3 : m, $2m$, $3m$, ..., $x.m$ litros, pero cada vez que se superen los n litros en C_3 se vacía C_2 en C_1 y se llena con C_3 el recipiente C_2. Afirmamos que en el paso x se tendrá en C_3 la cantidad de $\frac{m+n}{2}$ litros.

Para fijar las ideas tomaremos el caso $m = 7$ y $n = 9$. La ecuación de congruencia es $x.7 \equiv 8 \pmod 9$ cuya solución es $x = 5$. Razonaremos según el esquema siguiente:

C_1	C_2	C_3	
0	0	16	
0	9	7	←
7	2	7	
0	2	2.7 = 14	←
2	0	2.7 = 14	
2	9	2.7 - 9 = 5	
7	4	2.7 - 9 = 5	
0	4	3.7 - 9 = 12	←
4	0	3.7 - 9 = 12	

C_1	C_2	C_3	
4	9	3.7 - 2.9 = 3	
7	6	3.7 - 2.9 = 3	
0	6	4.7 - 2.9 = 10	←
6	0	4.7 - 2.9 = 10	
6	9	4.7 - 3.9 = 1	
7	8	4.7 - 3.9 = 1	
0	8	5.7 - 3.9 = 8	←

En el proceso general se logrará al cabo de x pasos la situación

$$0 \qquad k \qquad \frac{m+n}{2} + k'.n$$

con $0 \leq k \leq n$ y k' entero.

Se sigue que $k + k'.n = \frac{m+n}{2}$. Ahora k' no puede ser positivo pues $\frac{m+n}{2} < n$. Tampoco k' puede ser negativo pues $0 \leq k \leq n$. Por lo tanto $k' = 0$ y $k = \frac{m+n}{2}$. QED

Solución a problema (9) Vol. 1 Nº 2, enviada por Dr. Enzo R. Gentile, Facultad de Ciencias Exactas - UBA.

Si dos cuerdas de una circunferencia se intersectán en ángulos rectos, la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro segmentos determinados es igual al cuadrado del diámetro (Sánches).

<u>Solución</u>: O.E. det A. sea la circunferencia del plano complejo de centro O y radio R. Esta solución es hecha vía los números complejos, y usa propiedades que señalamos en nuestro artículo Grupo de Transformaciones... del Volumen 1. A saber:

Si z_1, z_2 son dos complejos no nulos y θ es el ángulo formado por los vectores z_1, z_2 entonces

(1) $$z_1.\bar{z}_2 + \bar{z}_1.z_2 = 2.\ |z_1|\ .|z_2|.\ \cos\theta\ .$$

En particular z_1 es perpendicular a z_2 si y sólo sí $z_1 . \bar{z}_2 + \bar{z}_1 . z_2 = 0$. Ilustremos la situación en la figura adjunta. Se sigue de propiedades de ángulos inscriptos en una circunferencia que $\theta_1' + \theta_2' = 180º$. Por lo tanto utilizando (1) se sigue inmediatamente que

(2) $(z_1.\bar{z}_4 + \bar{z}_1.z_4) + (z_2.\bar{z}_3 + \bar{z}_2.z_3) = 0.$

En efecto, $\cos \theta_1' + \cos \theta_2' = 0.$

Siendo $z_1 - z_2$ perpendicular a $z_3 - z_4$ se tiene

$$0 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) + (\bar{z}_1 - z_2)(z_3 - z_4) =$$

$$(z_1.\bar{z}_3 + \bar{z}_1.z_3) + (z_2.\bar{z}_4 + \bar{z}_2.z_4),$$

haciendo uso de (2).

Se sigue del Teorema de Pitágoras y dado que $z_i . z_i^{-1} = R^2$,

$$\sum_{i=1}^{4} |z_i - z_0|^2 = |z_3 - z_1|^2 + |z_4 - z_2|^2 = 4.R^2 - (z_1.\bar{z}_3 + \bar{z}_1.z_3) +$$
$$- (z_2.\bar{z}_4 + z_2.z_4)$$

$$= 4.R^2 \qquad \text{QED}$$