GEOMETRIAS NO EUCLIDEANAS

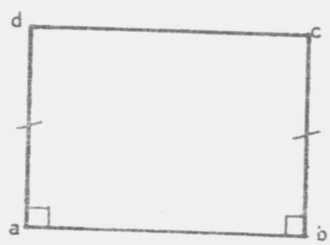
En el libro "El Plano", de J. Tirao, se prueba que aceptando solamente los axiomas de incidencia, órden y congruencias por un punto exterior a una recta pasa siempre al menos una recta paralela a la recta dada, en este trabajo reproducimos un modelo de geometría donde por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas. También, este trabajo muestra las bondades de los métodos axiomáticos puesto que aquí observamos cómo estudiar varios ejemplos simultáneamente, a partir de sus propiedades esenciales.

Hay un axioma de la geometría euclidiana "cuya verdad" o su correspondencia con datos empíricos, no es de ninguna manera obvia. Se trata del postulado de la única paralela que por Euclídes fue enunciado así: "Si una recta corta a otras dos, de modo tal, que en uno de sus lados se forman ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se encuentran en aquella parte en la cual los ángulos interiores suman menos que dos rectos". Hoy se lo conoce por su equivalente: "por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una sola paralela a la misma", expresión mucho más simple que debemos al matemático escocés Playfair.

El aspecto de este postulado lo muestra como una aseveración, acerca de toda la extensión de una recta, imaginada como extendiéndose indefinidamente en ambas direcciones, ya que dos rectas se dicen paralelas cuando su intersección es vacía, por muy lejos que se busque la intersección. Como la máxima longitud de una regla real, de un hilo, o incluso de un rayo de luz visible con telescopio es ciertamente finita, se deduce que este axioma nunca puede ser verificado por experimentación. El hecho de que el axioma de la paralela no sea experimentalmente verificable nos lleva a la cuestión de ver si es o no independiente de los axiomas de incidencia, órden y congruencias, pues si él fuera una consecuencia lógica de estos axiomas, sería posible eliminarlo como tal y considerarlo un teorema*.

La búsqueda de esta demostración llevó a los matemáticos varias centurias de esfuerzo, la mayoría de ellos sólo llegaron a "reemplazarlo" por otro axioma equivalente, para lograr la demostración.

Un párrafo aparte merece el intento hecho por el jesuita Gerolamo Saccheri (1667-1733), que usa por primera vez un método indirecto que consiste en "admitir lo contrario y obtener consecuencias absurdas", para ello se vale de una figura auxiliar: el cuadrilátero birrectángulo isósceles, conocido también con el nombre de "cuadrilátero de Saccheri"



$\widehat{dab}$ y $\widehat{abc}$ son rectos

los lados $\overline{ad}$ y $\overline{bc}$ son congruentes

Aceptando solamente los axiomas de incidencia, órden y congruencia se demuestra la existencia del punto medio m del $\overline{ab}$ y que la simetría axial de eje, la perpendicular a $\overleftrightarrow{ab}$ por m, lleva al punto d en c (ver pág. 17 de "El Plano"). Por lo tanto, Saccheri concluye:

$\widehat{adc}$ es congruente al $\widehat{dcb}$

y dice: caben aquí tres hipótesis

- ambos son rectos
- ambos son agudos
- ambos son obtusos

---

*En el Teorema 1.14 de "El Plano", se prueba que aceptando los axiomas de incidencia, órden y congruencias siempre pasa al menos una paralela.

Saccheri demuestra que el postulado de las paralelas equivale a la primer hipótesis y trata luego de probar que las restantes conducen a un absurdo. En el intento demuestra "Si en el cuadrilátero birrectángulo isósceles abcd se verifica la hipótesis del ángulo recto, del ángulo agudo o la del obtuso, entonces resultará respectivamente $\overline{ab} = \overline{cd}$ o $\overline{ab} < \overline{cd}$ o $\overline{ab} > \overline{cd}$", en otro de sus teoremas logra demostrar "Si se verifica la hipótesis del ángulo recto, agudo u obtuso, en todo triángulo la suma de sus ángulos será respectivamente, igual, menor o mayor que dos rectos".

Saccheri continúa estos desarrollos deductivos hasta que en uno de ellos concluye que en la hipótesis del ángulo obtuso "las rectas deberían ser finitas". Esto es, en cada recta existirían un par de puntos tal que todo otro punto de dicha recta estaría entre ellas dos, lo que toma como el absurdo deseado y excluye esta posibilidad. En cambio para la hipótesis del ángulo agudo no consigue llegar a ninguna contradicción y llevado por su prejuicio, comprensible para la época en que vivió, declara "La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa porque repugna a la naturaleza de la línea recta".

De no mediar ese "prejuicio", quizás Saccheri hubiese sido el descubridor de las geometrías no euclideanas, pues estuvo muy cerca de ello. Pero debió transcurrir un siglo más para conocerse las primeras publicaciones sobre éstas geometrías, de Lobatchevsky en 1829 y de Bolyai en 1832, aunque se sabe que 15 años antes Gauss hizo un manuscrito en que desarrolla este sistema y por primera vez lo llama "geometrías no euclideanas".

La capacidad intelectual de Gauss, Lobatchevsky y Bolyai, mostraron que tal geometría se basa en un sistema de axiomas no euclideano que es perfectamente consistente.

Para mostrar la consistencia de la nueva geometría no necesitamos construir un vasto cuerpo de teoremas no euclideano, como lo hicieron Lobatchevsky y Bolyai, sino construir simples modelos geométricos que satisfagan todos los axiomas de Euclides, excepto el de la paralela.

Uno de los modelos más simples fue construido por Poincaré a fines del siglo pasado. A continuación describiremos dicho modelo y observaremos que se verifican los axiomas de incidencia, órden y congruencia y continuidad como están formuladas en el libro "El Plano". Como punto de partida aceptaremos que tenemos un plano euclideano π en el cual se verifican los axiomas de incidencia, órden, congruencia, paralelismo y continuidad como están formuladas en "El Plano". Fijemos para siempre una recta A en π (que la pensaremos horizontal) y denotemos por H el semiplano abierto superior determinado por A.

Definición: Llamaremos plano no Euclideano al conjunto H.

Definición: Llamaremos *rectas no euclideanas* en H a los subconjuntos de H que se obtienen al intersectar H con:

a) Rectas perpendiculares a A

o con

b) Circunferencias con centro en A.

Definición: El órden que fijamos en las *rectas no euclideanas* es: si es perpendicular a A, el órden usual, si es una semicircunferencia, el órden natural de giro horario u antihorario.

A continuación verificamos que este plano no euclideano H junto con las rectas no euclideanas y el órden fijado en ellas verifican los axiomas de incidencia y órden como están formulados en "El Plano".

El axioma 1.1 para H se verifica pues valen Teorema 1.1 y el axioma 1.5 para π.

El axioma 1.2 para H es consecuencia del teorema 1.1 y el axioma 1.11 para π.

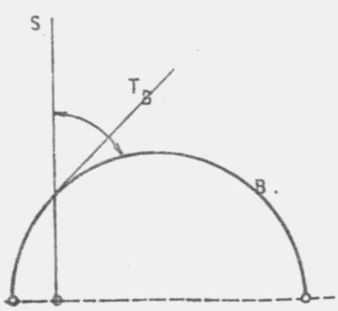
El axioma 1.3 para H se verifica pues vale para π y porque dados dos puntos exteriores a una recta A por ellos pasa una única circunferencia con centro en A.

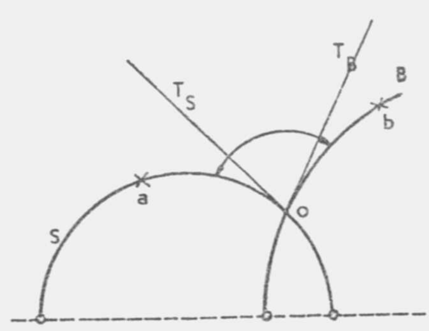
El axioma 1.4 para H se verifica por la definición de órden dada en las rectas no euclideanas.

El axioma 1.5 para H se verifica por los axiomas 1.5 y 1.11 para π y pues H es un semiplano euclideano abierto.

El axioma 1.6 para H se verifica por los axiomas 1.6 y el 1.11 para π.

Esto concluye la verificación de que el plano no euclideano H junto con las rectas no euclideanas definidas en el H satisfacen los axiomas de incidencia y órden. Por consiguiente, todos los teoremas de la unidad Puntos y rectas en "El Plano" son válidas en H. Proponemos al lector hacer los dibujos correspondientes, además de dibujar triángulos no euclideanos, cuadriláteros no euclideanos, etc. Además, sugerimos que con la ayuda de un transportador calcule la suma de los ángulos interiores en algunos triángulos. Para esto, le informamos al lector que se prueba: la medida de un ángulo no euclideano es igual a la medida en el sistema circular del ángulo euclideano, determinado por las tangentes a las rectas no euclideanas en el vértice del ángulo no euclideano. El dibujo es





Pregunta: ¿Será posible dibujar rectángulos no euclideanos?

Transformaciones rígidas en el plano no euclideano

En "El Plano" se introducen axiomáticamente las transformaciones rígidas de π. A continuación definiremos una familia de funciones biyectivas de H en sí mismo que verificarán los axiomas 7, 8 y 9 del plano. Por consiguiente en H, valen (reformulados para este ejemplo) todos los resultados de la unidad transformaciones rígidas hasta el teorema 1.14 inclusive. En [2] se hace un estudio exahustivo de la inversión con respecto a una circunferencia. Es fácil deducir, de lo desarrollado allí que:

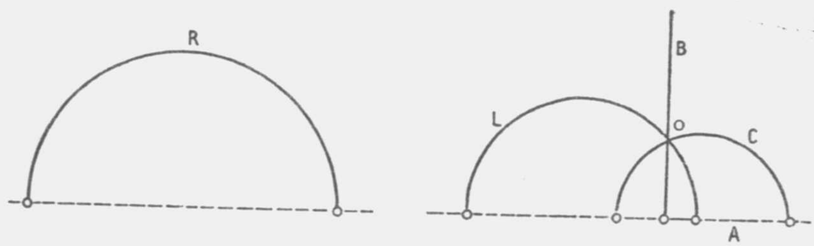
Lema: Cualquier involución con respecto a una circunferencia con centro en A, transforma H en sí mismo.

Además, por Teorema 1.10 de "El Plano", se tiene que la simetría axial con respecto a una recta perpendicular a A, transforma H en sí mismo. Por consiguiente, la siguiente es correcta

Definición: Diremos que una función de H en sí mismo es una *transformación rígida no euclideana* si la obtiene como composición de una o varias simetrías axiales con respecto a las rectas euclideanas que contienen las rectas no euclideanas o involuciones con respecto a circunferencias que contienen rectas no euclideanas.

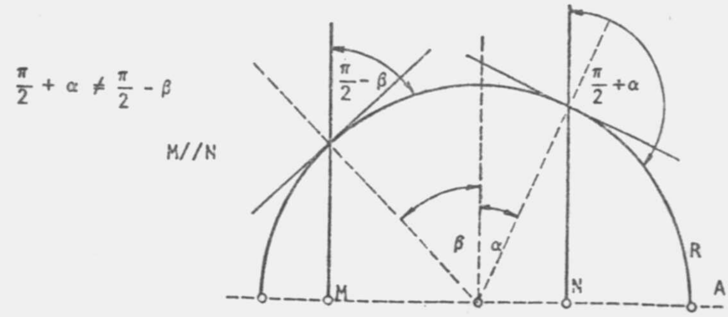
Simbólicamente, $T : H \to H$ es una transformación rígida no euclideana si y sólo si, existen $L_1 \ldots L_r$ rectas no euclideanas tal que $T = S_{L_1} \circ S_{L_2} \circ \ldots \circ S_{L_r}$, donde S_{L_i} denota la reflexión con respecto a la recta euclideana que contiene a L_i o la involución con respecto a la circunferencia que contiene a L_i, según corresponda. Por ejemplo, si L es cualquiera recta no euclideana S_L es una transformación rígida no euclideana. También $T = a$ la aplicación identidad es una transformación rígida no euclideana pues $T = S_L \circ S_L$, donde S_L es la reflexión con respecto a cualquier recta euclideana perpendicular a A. Si $\overline{ab}$, está contenido en una recta paralela a A, la traslación euclideana que lleva a en b es una transformación rígida no euclideana por ejercicio 1.27 de "El Plano".

Dejamos como ejercicio para el lector probar que las funciones de H en sí mismo que hemos llamado transformaciones no euclideanas, satisfacen los axiomas 1.7, 1.8 y 1.9. Por consiguiente en H valen todos los teoremas enunciados desde el comienzo hasta, el teorema 1.14 inclusive. Sugerimos al lector reformular cada resultado en este modelo. Notemos que el dibujo



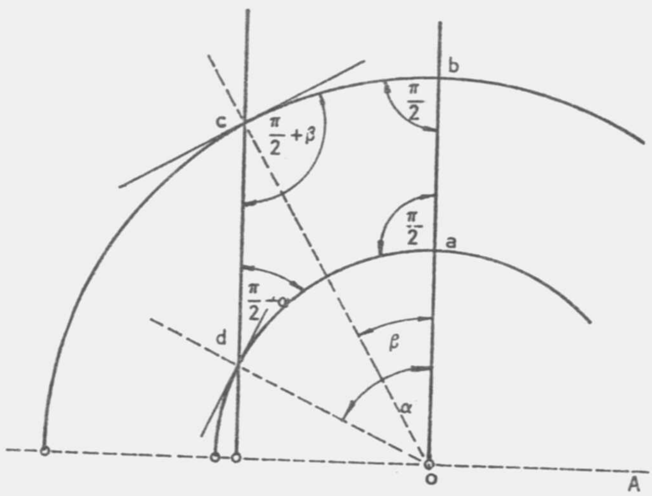
nos dice que en H no se satisface el axioma 1.10, puesto que L,B y C son paralelas a R por O, por tanto, algunos de los resultados enunciados a partir del axioma 1.10 de "El Plano" valen en H y otros no. Por ejemplo:

1) El siguiente dibujo



muestra dos rectas no euclideanas paralelas (M y N) una recta no euclideana transversal (R) tal que los ángulos correspondientes no son congruentes.

2) En un paralelogramo no euclideano los lados opuestos no siempre son respectivamente congruentes. Además, dos ángulos consecutivos, en un paralelogramo no euclideano no siempre son suplementarios, como el dibujo siguiente lo muestra.



3) El dibujo anterior muestra que si $\alpha > \beta$, entonces la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo no euclideano es menor que cuatro rectos, puesto que

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\pi - (\alpha - \beta) .$$

Por consiguiente

4) En algún triángulo no euclideano, la suma de los ángulos interiores es menor que dos rectos.

Un teorema de Legendre y Saccheri afirma, entonces que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo no euclideano es menor que dos rectos. (Haremos una prueba de esto en una próxima nota).

Finalmente, le contamos al lector que: para cualquier triángulo no euclideano vale

$$\pi\text{-suma de los ángulos interiores (medidos en radianes)} =$$
$$= \text{área no euclideana del triángulo}$$

Como indicamos al comienzo, este trabajo sirve para mostrar cómo manejar en forma simultánea varias ejemplos, a partir de sus propiedades esenciales. Proponemos al lector encontrar modelos de la geometría euclideana o no euclideanas, distintos de los dos mencionados aquí. (Las superficies desarrollables pueden ayudar en algo).

Bibliografía

1 Tirao, Juan A. "El Plano", Editorial

2 Tirao, Juan A. "La inversión con respecto a una circunferencia", Revista de Educación Matemática, Vol. 1, Nº 2, pág. 17-28.

Autores:

Prof. Bazán, Norma

Prof. Bazán, Pedro

Prof. Carrizo, Norma

Prof. Orellano de Duobaitis, Teófila

del Colegio Nacional Deán Funes, Ob. Trejo 1250 (5000), Córdoba.

Dr. Vargas, Jorge

del I.M.A.F., Univ. Nac. de Córdoba y del C.O.N.I.C.E.T.