SOLUCIONES ENVIADAS

Ejercicio 11, Vol. 1 N°3. Dado un segmento $\overline{AB}$ en el espacio para todo punto C exterior trazar los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Determinar todos los puntos C para los cuales el ángulo $\hat{ACB}$ es recto.

La siguiente solución fue enviada por Raúl D. Katz - Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Rosario.

Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (x, y, z)$ donde x, y, z son las coordenadas cartesianas usuales. Entonces $\overline{AC} = (x-a_1, y-a_2, z-a_3)$, $\overline{BC} = (x-b_1, y-b_2, z-b_3)$ y como C es un punto exterior al segmento $\overline{AB}$ tenemos $\overline{AC} \neq 0$ y $\overline{BC} \neq 0$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\hat{ACB} \text{ es recto} &\iff \overline{AC} \perp \overline{BC} \\
&\iff \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0 \\
&\iff (x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)+(z-a_3)(z-b_3) = 0 \\
&\iff \left(x-\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\right)^2 + \left(y-\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)\right)^2 + \left(z-\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right)\right)^2 = R^2
\end{aligned}$$

donde $R^2 = \left(\frac{a_1-b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2-b_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_3-b_3}{2}\right)^2 \neq$ puesto que $A \neq B$.

Concluímos entonces que el conjunto de puntos C tal que $\hat{ACB}$ es recto, es una esfera con centro $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$, que es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, y radio R.

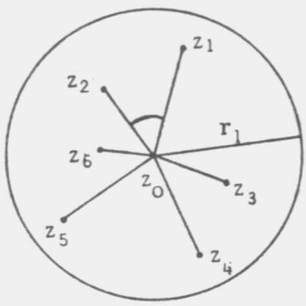
Ejercicio 1, Vol. 2 N°3. Pruebe que si 6 círculos contienen un punto en común, al menos un círculo contiene el centro de otro círculo.

La siguiente solución fue enviada por el Dr. Oscar Cámpoli - IMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

Supongamos que los seis círculos tienen centros $z_1, z_2, \ldots, z_6$ y radios $r_1, r_2, \ldots, r_6$ respectivamente. Supongamos además que r_1

es el mayor de los radios y llamemos z_0 al punto común a los seis círculos. Claramente, podemos suponer que z_0 no es uno de los centros.

Trazamos una circunferencia con centro z_0 y radio r_1, es claro que los seis centros están en su interior. Luego, deben existir al menos un par de centros, digamos z_1, z_2 tales que el ángulo central que determinan es menor o igual que 60°(ver figura).



Como a menor ángulo se opone menor lado, el segmento de z_1 a z_2 no puede ser el mayor lado del triángulo $\overset{\Delta}{z_0 z_1 z_2}$. Esto finalmente (usando que z_0 está en los círculos de centros z_1 y z_2) significa que z_1 están en el círculo de centro z_2 o z_2 en el círculo de centro z .

Independientemente de la demostración analítica que acabamos de dar, es conveniente convencerse gráficamente con papel y lápiz.