

EL USO DE LA CALCULADORA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Norma Gurruchaga de Tarzia

Prólogo

La calculadora ha entrado ya en nuestra vida de cada día, está presente en la casa y en la escuela.

Al no integrársela en la actividad escolar, se verificarían consecuencias negativas, como ser: 1) Los alumnos no usan la calculadora en la escuela porque se les ha prohibido, pero si la usan en su casa. 2) Al no conocerla en su totalidad, hacen un uso limitado y no racional.

En la enseñanza, al enfrentar problemas complejos desde el punto de vista del cálculo pero útiles por el razonamiento lógico que requieren, se corre el riesgo de equivocarse en la técnica del cálculo a mano. Dejando a la calculadora esta parte manual, rutinaria y mecánica, que no obstante exige una atención intensa para evitar errores -como: mala pulsación de teclas- se puede desarrollar en el alumno la capacidad para un trabajo intelectualmente más profundo. Por ejemplo:

Programar el desarrollo del cálculo.

Buscar otras posibles soluciones.

Controlar y verificar los resultados.

Es importante recalcar que ninguna calculadora está capacitada para sustituir la facultad de razonar las operaciones a ejecutar, o sea la resolución cualitativa del problema. La ventaja está en el

hecho de que proporciona rápidamente resultados, los cuales demandarían al alumno mucho tiempo de cálculo manual.

De frente a esta situación y teniendo presente que no podemos oponernos al desarrollo tecnológico de nuestros días y a su creciente penetración en todas partes, considero que la calculadora debe ser usada en la escuela secundaria. Dicho uso debe ser controlado y programado por el docente, tomándola como un instrumento de apoyo, pero no indispensable.

Para muchas personas es suficiente usar una calculadora sin preguntarse cómo funciona o cómo poder usarla más eficazmente. Esto es comprensible en quienes tienen una máquina simple con sólo 4 operaciones. Por el contrario, para aquéllos que tienen una calculadora científica, aunque sea básica, (recomendable en la escuela secundaria), es importante que sepan cómo funciona y cómo puede ser utilizada de manera óptima.

Con este trabajo no se pretende dar una solución integral para el uso de la calculadora en la escuela secundaria, sino un primer aporte para ver cómo encarar la enseñanza de ciertos temas, bajo este nuevo enfoque.

Para esto se presentan algunas aplicaciones de la calculadora, es decir, ciertos temas, algunos de los cuales son dejados de lado por falta de tiempo ya que presentan cálculos engorrosos. Se trata que la ayuda de la calculadora, resulte de interés en la motivación de los alumnos, para despertar en ellos la necesidad de la investigación, para enriquecer su formación matemática.

En el desarrollo del trabajo utilizaré una calculadora TEXAS INSTRUMENTS T.I. 30, que trabaja con una capacidad interna de 11 cifras, de las cuales solo aficha 8 cifras, sin incluir el signo.

Para hacer un buen uso de la calculadora debemos conocerla, ver todas las posibilidades que ella nos brinda.

Por lo tanto es indispensable que analicemos:

- a) Significado y funcionamiento de todas sus teclas.
- b) Precisión y redondeo que aplica en los resultados que nos brinda
- c) Notación algebraica en la cual trabaja.
- d) Notación científica o exponencial!
- e) Acceso a la memoria.

Observación: En este punto es necesario el estudio del manual de cada calculadora, ya que cada una presenta detalles que le son propios.

APLICACIONES DE LA CALCULADORA

1. ¿Cómo se puede obtener la expresión decimal completa de un número periódico?

Sea encontrar el período completo de $\frac{1}{17}$

Con la calculadora, haciendo la siguiente secuencia:

<u>SECUENCIA</u>	<u>PANTALLA</u>	<u>SOLUCION</u>
1 \div 17 $=$.05882353 *	.0588235

* La última cifra se ignora porque puede tener redondeo.

1 $-$ 17 \times . 0588235 .0000005 + resto

Asegurarse que el resto tenga, a partir del punto decimal igual cifras que las tomadas como solución. (en este caso 7), sino se debe completar con ceros.

5 \div 17 $=$.29411765 .05882352941176

Estas cifras se agregan a la solución ya existente.

5 $-$ 17 \times . 2941176 .0000008 + resto

8 \div 17 $=$.47058824 .588235294117647058

A esta altura se observa que las cifras comienzan a repetirse. Hemos logrado el período completo de $\frac{1}{17}$, que contiene 16 cifras.

2. ¿Cómo calcular la raíz cuadrada de un número?

No usando la tecla correspondiente para obtener la raíz cuadrada, existen procesos que permiten obtenerla de manera más o menos trabajosa. Estos diferentes métodos ilustran las nociones de aproximaciones numéricas ya que los resultados no son más que valores aproximados del número buscado:

a) Método de números impares

Este método se puede aplicar en una calculadora con sólo las 4 operaciones. Dado el número $A > 0$, se desea conocer el mayor número entero N tal que $N^2 \leq A$, es decir, $N^2 \leq A < (N+1)^2$

Para encontrar N que responda a esta condición es suficiente sumar los números impares consecutivos hasta que la suma S_{n+1} obtenida supere a A .

Es decir:

$S_1 = 1$ 1^2

$S_2 = 1+3$ 2^2

$S_3 = 1+3+5$ 3^2

.
. .
. . .
. . . .

$S_N = 1+3+5+ \dots + (2N-1)$ $N^2 \leq A$

$S_{N+1} = 1+3+5+ \dots + (2N-1)+(2N+1)$ $(N+1)^2 > A$

En este punto se toma el último valor sumado $2N+1$ y se despeja el valor de N buscado,

Sea Z el último valor sumado. $N = \frac{Z - 1}{2}$

Ejemplo: Sea $A = 7.95$, hallar \sqrt{A}

SECUENCIAS	PANTALLA	SUMA DE NUMEROS IMPARES
. 1	1	1
. $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\text{STO}}$	3	
. $\boxed{+}$	4	4
. 5 $\boxed{\text{STO}}$	5	
. $\boxed{+}$	9	9 > 7.95
. $\boxed{\text{ON/C}}$ $\boxed{\text{RCL}}$	5 = Z	
. $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$	2 = N	

b) Método de Newton

Dado $A > 0$, calcular $x/x = \sqrt{A}$

Si X es un valor aproximado de x , se llama error cometido cuando se reemplaza x por X , a la cantidad $c=x-X$

Entonces se puede escribir:

$$A = x^2 = (X+c)^2 = X^2+2cX+c^2 \text{ que despreciando } c^2, \text{ resulta}$$

$$A \approx X + 2cX, \text{ de donde } c = \frac{A - X^2}{2X}$$

obteniéndose así una nueva aproximación $X' = X+c$

reemplazando:
$$X' = \frac{A - X^2}{2X} + X$$

$$X' = \frac{1}{2} \left(X + \frac{A}{X} \right)$$

Respetando este procedimiento se obtienen aproximaciones cada vez más precisas de A .

Las distintas aproximaciones logradas forman los términos de la sucesión definida así:

$$u_0 = A$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo: Hallar $\sqrt{3}$

SECUENCIAS	PANTALLA	NOTAS
. 3 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$	2	$\mu_0 = 3$
. $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$	1.75	$\mu_1 = 2$
. $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$	1.7321429	$\mu_2 = 1.75$
. $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$	1.7320508	$\mu_3 = 1.7321429$
. $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$	$\boxed{1.7320508}$	$\mu_4 = 1.7320508$

A esta altura resulta que $\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \dots = \mu_n$
 de donde concluimos que el método de Newton es convergente en 4 pasos
 para $\mu_0 = 3$

3. SUCESION DE FIBONACCI. ¿Cómo obtener sus términos?

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

se construye la sucesión: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21... que se conoce con el nombre de sucesión de Fibonacci.

Supongamos que en un determinado momento se tiene en la pantalla de la calculadora afichado el valor de a_{n-1} y en la memoria registrado el valor de a_n .

A continuación se indica un procedimiento para obtener en la pantalla a_n y en la memoria a_{n+1} :

- i) Al contenido de la memoria se le suma lo que está en la pantalla. De esta manera la memoria contiene $a_{n-1} + a_n$.
- ii) A la pantalla se le resta el contenido de la memoria. O sea $a_{n-1} - (a_{n-1} + a_n)$.
- iii) Resta sólo cambiar el signo al valor que aficha la pantalla para obtener a_n .

SECUENCIAS	PANTALLA	MEMORIA
Ciclo Inicial { 1 STO	1 1 = a ₁	1 = a ₂
Ciclo Posterior { SUM - RCL = +/-	1 -1 1 = a ₂	2 2 2 = a ₃
Repetiendo estas 5 teclas del ciclo posterior se obtienen los distintos términos.	1 -2 2 = a ₃	3 3 3 = a ₄
	2 -3 3 = a ₄	5 5 5 = a ₅
	3 -5 5 = a ₅	8 8 8 = a ₆

4. Introducción a la noción de límite

a) Suma de los términos de una progresión geométrica

Se sabe que

$$S_n = \frac{(q^n - 1)}{q - 1} \cdot a_1;$$

Si $|q| < 1$, puede hallarse la suma de la serie geométrica definida por la progresión de la siguiente forma:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = \frac{a}{1 - q}$$

Sea la serie geométrica:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2187} + \dots$$

Calcular la sucesión de sumas parciales (S_n)

SECUENCIAS				SUCESION DE SUMAS PARCIALES
		1	-	$S_1 = 1$
1	÷	3	+	$S_2 = .66666667$
1	÷	9	-	$S_3 = .77777778$
1	÷	27	+	$S_4 = .74074074$
1	÷	81	-	$S_5 = .75308642$
1	÷	243	+	$S_6 = .74897119$
1	÷	729	-	$S_7 = .75034294$
1	÷	2187	+	$S_8 = .74988569$
1	÷	6561	-	$S_9 = .75003811$
1	÷	19683	+	$S_{10} = .74998731$
1	÷	59049	-	$S_{11} = .75000423$
1	÷	177147	+	$S_{12} = .74999859$
1	÷	531441	-	$S_{13} = .75000047$
1	÷	1594323	+	$S_{14} = .74999984$

Conclusión:

Se observa en la tabla que la sucesión de sumas parciales, a medida que n aumenta tiende a la suma de la serie $S = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

b) ¿Cómo calcular el número "e"?

Si se quiere conocer aproximadamente el número irracional:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

se realiza la siguiente secuencia:

$$n \quad \boxed{1/x} \quad \boxed{+} \quad 1 \quad \boxed{=} \quad \boxed{y^x} \quad n \quad \boxed{=}$$

que nos permite construir la siguiente tabla:

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	2
10	2.5937425
10 ²	2.7048138
10 ³	2.7169239
10 ⁴	2.7181459
10 ⁵	2.7182682
10 ⁶	2.7182805
10 ⁷	2.7182818

Al observar la tabla vemos que los valores de la expresión tienden a un número cuyas cifras más significativas son 2.7182818

Dicho valor coincide con el resultado de la secuencia:

$$\boxed{1} \quad \boxed{INV} \quad \boxed{\ln x}$$

o sea la base de los logaritmos naturales.

5. Estudio del comportamiento de funciones en las proximidades de puntos de indeterminación.

a) La función $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, presenta una indeterminación en $x = 0$, ya que numerador y denominador se anulan simultáneamente.

Esta función es par, por lo tanto, tiene igual comportamiento para $x > 0$ y $x < 0$.

Veremos qué ocurre en las proximidades de $x = 0$, acercándonos del lado derecho, o sea con las $x \rightarrow 0^+$.

Con la siguiente secuencia de teclas construimos la tabla:

DRG x STO SIN ÷ RCL =

x	f(x)
1	.84147099
0.6	.94107079
0.3	.98506736
0.07	.99918534
0.04	.99973336
0.009	.99998655
0.002	.99999946
0.0008	1
0.0001	1
0.00006	1

En la tabla observamos que la función $\frac{\text{sen } x}{x}$ tiende a 1 cuando $x \rightarrow 0^+$ y como es una función par, también tiende a 1 cuando $x \rightarrow 0^-$.

Este hecho se expresa en términos matemáticos de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

b) Dada la función $f(x) = x \ln x$, estudiaremos su comportamiento en la proximidades de $x = 0$, acercándonos por el lado derecho, cuando $x \rightarrow 0^+$, ya que $\ln x$ no está definida para $x < 0$.

La secuencia siguiente nos permite construir la tabla:

x STO x RCL ln x =

x	f(x)
10^{-1}	-.23025851
10^{-2}	-.04605170
10^{-3}	-.00690776
10^{-4}	-.00092103
10^{-5}	-.00011513

Cont.

10^{-6}	- .00001382
10^{-7}	- .00000161
10^{-8}	- .00000018
10^{-9}	- .00000002
10^{-10}	- .0000000002
10^{-11}	- .00000000002

Con la tabla concluimos que la función $x \ln(x)$ tiende a 0, cuando $x \rightarrow 0^+$. Matemáticamente lo expresamos así:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

6. Resolución de ecuaciones.

- Aproximación de las soluciones por el *método de dicotomía*: (del griego "cortar en dos")

Recordando que el método de dicotomía se basa en tomar un intervalo y partirlo en otros dos aplicando el siguiente criterio:

Sea resolver la ecuación $f(x) = 0$, el intervalo inicial será $(a; b)$, tal que el signo de $f(a) \neq$ signo $f(b)$, en dicho intervalo se estima que se encuentra la solución buscada c , que verifica $f(c) = 0$. Para realizar la partición tomamos la media aritmética $\frac{a+b}{2}$, obteniéndose así los intervalos $(a; \frac{a+b}{2})$ y $(\frac{a+b}{2}; b)$.

Si resulta $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, entonces $\frac{a+b}{2} = c$, sino según el signo de $f(\frac{a+b}{2})$ se reemplaza el intervalo inicial por:

- $(a; \frac{a+b}{2})$ si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$ o bien
- $(\frac{a+b}{2}; b)$ si $f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(b) < 0$

Con este procedimiento se van logrando intervalos de amplitud menor que contienen a c_{ap} (solución aproximada), la que resulta ser la semi

suma de los extremos del último intervalo considerado: (A ;B).

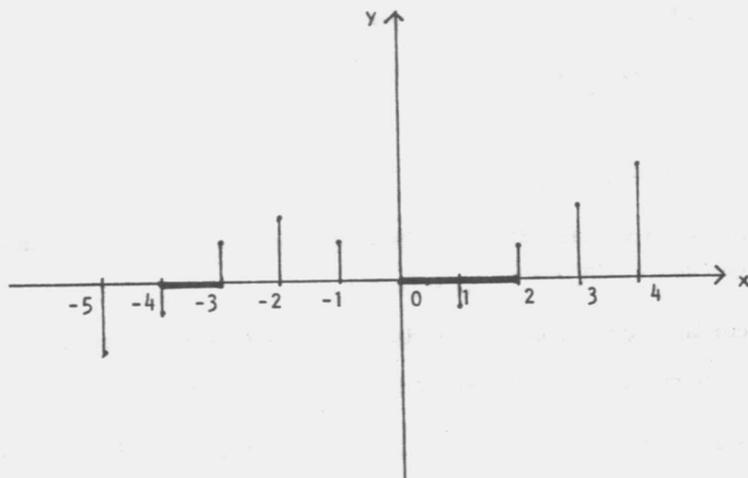
El error ϵ que se comete en la aproximación lo calculamos así:

$$|c - c_{ap}| = \epsilon < \frac{B - A}{2}$$

Ejemplo:

Sea la ecuación: $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$

Para elegir convenientemente los intervalos donde se aproximarán las raíces se realiza previamente un estudio gráfico de la función:



Los intervalos que se tomarán son:

Para aproximar: c_0 : (-4; -3)

c_1 : (0; 1)

c_2 : (1; 2)

La secuencia de teclas para el cálculo de la $f(x)$ es la siguiente:

x y^x 3 + 2 x x x^2
 - 5 x x + 1 =

i) Aproximación de c_0 en $(-4; -3)$

x	f(x)	c_0
-4	< 0	
-3	> 0	$(-4; -3)$
-3.5	> 0	$(-4; -3.5)$
-3.75	< 0	$(-3.75; -3.5)$
-3.625	< 0	$(-3.625; -3.5)$
-3.5625	< 0	$(-3.5625; -3.5)$
-3.5312	< 0	$(-3.5312; -3.5)$

$$c_{0ap} = 3.5156$$

$$\epsilon < \frac{0.0312}{2} = 0.01$$

ii) Aproximación de c_1 en $(0;1)$

x	f(x)	C
0	> 0	
1	< 0	$(0, 1)$
0.5	< 0	$(0; 0.5)$
0.25	< 0	$(0; 0.25)$
0.125	> 0	$(0.125; 0.25)$
0.1875	> 0	$(0.1875; 0.25)$
0.2187	> 0	$(0.2187; 0.25)$

$$c_{1ap} = 0.2343$$

$$\epsilon < \frac{0.0313}{2} = 0.01$$

iii) Aproximación de c_2 en $(1;2)$

x	f(x)	c ₂
1	< 0	
2	> 0	(1; 2)
1.5	> 0	(1; 1.5)
1.25	< 0	(1.25; 1.5)
1.375	> 0	(1.25; 1.375)
1.3125	> 0	(1.25; 1.3125)
1.2812	< 0	(1.2812; 1.3125)

$$c_{2ap} = 1.2968$$

$$\epsilon < \frac{0.0323}{2} = 0.01$$

7. Jugando con la calculadora

a) Para saber el día de nacimiento de una persona sin tener acceso al visor de la calculadora, hacerle seguir la siguiente secuencia de teclas:

- # Introducir el número del mes en que ha nacido. 11
Por ejemplo: noviembre
- # Multiplicarlo por 5 55
- # Sumarle 6 61
- # Multiplicarlo por 4 244
- # Sumarle 9 253
- # Multiplicarlo por 5 1265
- # Sumarle el día de nacimiento: Ejemplo 7 1272
- # Restarle 165 1107

Al mirar la pantalla, ésta indica en las dos cifras de la derecha el día y en las dos cifras de la izquierda el mes de nacimiento. En es el caso 1107 significa: 7 de noviembre.

b) Existen juegos que parecen trucos de magos, a causa de la complicaciones que se pueden hacer. No siempre es fácil comprender qué cosa su

cede, cuando desde el punto de vista matemático son triviales.

Haga experimentar la siguiente secuencia de teclas para conocer un cierto número:

	PANTALLA
# Introducir un número cualquiera de dos cifras	
Ejemplo: 26	26
# Multiplicar por 2	52
# Sumarle 4	56
# Multiplicar por 5	280
# Sumarle 12	292
# Multiplicar por 10	2920
# Restarle 320	2600

En la pantalla aparece el número introducido seguido de dos ceros.

Con nociones elementales de álgebra se pueden construir variaciones sobre este tema, de manera de obtener, por ejemplo, el número de teléfono, el número de la calculadora, etc.

Este trabajo fue comenzado en el año 1982 durante mi estadía en la ciudad de Florencia (Italia). Agradezco a las autoridades del Ist. "Ulisse Dini", por las facilidades otorgadas en la utilización de la biblioteca y al Prof. Sergis Bruno de la Universidad Nacional de Rosario por las sugerencias recibidas. Este material se está poniendo en práctica con los alumnos del Liceo Aeronáutico Militar a partir de 3er. año.

Bibliografía

1. P. ARDUINI: "Microcomputer nell' insegnamento scientifico medio superiore", Notiziario U.M.I., Suppl. 4 (1979), 76-83.
2. P. DALLA TORRE: "Introduzione ed uso della calcolatrice tascabile

- nella scuola media inferiore", *L'insegnamento della matematica*, 3 (1980), 47-52.
3. M. DEDO: "Le calcolatrice tascabile possono essere uno strumento didattico?", *Notiziario U.M.I.*, Suppl. 4 (1979), 52-61.
 4. M. DEDO: "LE CALCOLATPICE TASCABILE como sussidio didattico". *Notiziario U.M.I.*, Suppl. 4 (1979), 62-66.
 5. R. FARRANDO: "Como programar las calculadoras de bolsillo", Boixareau Editores, Barcelona 1982.
 6. M. GHIDINI VALESÌ - F. SPERANZA: "Micro calcolatori", *Notiziario U.M.I.*, Suppl. 4 (1979), 67-75.
 7. D. GREEN - J. LEWIS: "Le scienze con il calcolatore tascabile", Franco Muzzio Editore, Padova, 1980.
 8. H.R. HYATT - I. DROOYAN - C.C. CARICO: "Matemáticas técnicas", Limusa, México, 1982.
 9. W. JUDD: "Giochi, truchi e rompicapi per un calcolatore tascabile", Sugarco Edizioni, Milano, 1981.
 10. S. MARACCHIA: "Minicalcolatori e didattica"? *Archimede*, 30 (1978), 113-116.
 11. H.J. Müller: "Come si usa el calcolatore tascabile", Franco Muzzio Editore, Padova, 1978.
 12. G. NOEL - J. BASTIER: "Mathematiques et calculatrice de poche", Edit. Technique, Paris, 1978.
 13. A. PAINI: "Uso delle calcolatrici tascabili nella media superiore", *L'Insegnamento della matematica*, 3 (1980), 59-66.
 14. I. REPETTO: "Un' esperienza di studio dell'uso dei calcolatori tascabili in terza media", *L'Insegnamento della matematica*, 4 (1981), 51-65.
 15. C. SITIA: "La didattica della matematica oggi", *Quaderni U.M.I.* 10, Pitagora Editrice, 1979.
 16. P. SUBTIL: "Les calculatrices", *Bulletin del A.P.M.E.P.*, 322 (1980), 73-80.

17. "NUEVAS TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA", Vol IV,
UNESCO, Montevideo, 1979.
18. P. VITRANT: "Calculatrices de poche et informatique", Edit. Masson,
Paris, 1980.

Liceo Aeronáutico Militar
Av. Fuerza Aérea 1901
2132 Funes (Sta Fé)

NOTA HISTORICA: S. RAMANUJAM (1887-1919)

Brillante matemático hindú, famoso por sus contribuciones en la teoría de números. A los 15 años su interés por la matemática fue estimulado por la lectura del libro de G. Carr: Sinopsis de resultados en matemática pura y aplicada, conteniendo unos 6000 teoremas. Ramanujam no sólo asimiló los resultados sino que fue mas allá, desarrollando sus propios teoremas e ideas. En 1903 fue becado por la Universidad de Madras, pero perdió la beca al año siguiente por dedicar todos sus esfuerzos a la matemática descuidando las otras asignaturas. Continuó trabajando en matemática en condiciones precarias sin empleo permanente. Publicó su primer artículo en 1911 y su genio comenzó lentamente a ser reconocido. En 1913 inició correspondencia con el gran matemático inglés G. Hardy (éste relata, de manera singular, en su libro biográfico "Ramanujam" sus sensaciones al recibir la primera carta del prodigio hindú). Invitado a Cambridge por Hardy, recibió de éste clases particulares y colaboró en investigaciones. Su formación de autodidacta mostraba, simultáneamente, ciertas fallencias básicas y un poderoso genio creativo e intuición para las fórmulas notables entre funciones especiales. En Inglaterra obtuvo resultados en la teoría de particiones y en fracciones continuas siendo el primer hindú electo para incorporarse a la "Royal Society", en 1918. Sin embargo, ya enfermo de tuberculosis, decide volver a la India donde fallece en 1919. Hardy en su libro menciona la siguiente anécdota. Al visitar a Ramanujam en el hospital durante su enfermedad, Hardy le comentó que acababa de ver un número que no le sugería nada: 1729. Ramanujam inmediatamente le observó: *maestro, éste es el menor número natural que puede ser escrito como suma de dos cubos en dos formas diferentes:*

$$1729 = 12^3 + 1^3, \quad 1729 = 10^3 + 9^3.$$