SOBRE SEGMENTOS INTERIORES DE UN TRIANGULO

Graciela S. Birman

Las madianas, bisectrices, y alturas de un triángulo se hallan entre los elementos geométricos que se estudian con mayor interés. Estos elementos son casos particulares de lo que se llama *ceviana* de un triángulo.

Definición: Una ceviana de un triángulo es el segmento que une cualquier vértice con un punto del lado opuesto a dicho vértice.

Es nuestro propósito obtener la expresión de una ceviana de un triángulo en término de sus lados y como consecuencia la expresión de medianas, bisectrices y alturas en términos de los lados del triángulo.

Notación: Llamaremos $\overline{AB}$ a la recta determinada por los puntos A y B. La expresión "en magnitud y signo" significará que denotamos AB la longitud del segmento AB y AB = - BA; por AB^2 se entenderá el producto de la longitud del segmento AB por sí misma.

Veamos un resultado que facilitará la obtención de las mencionadas fórmulas.

Teorema

Dado tres puntos colineales A,B, y C, y P otro punto del plano, entonces en magnitud y signo se cumple

$$PA^2.BC + PB^2.CA + PC^2.AB + BC.CA.AB = 0$$

Demostración : Debemos considerar dos casos: si P es colineal con A,B y C y si no lo es.

a) Si P es colineal con A,B y C tenemos

fig. 1

$$PA^2.BC+PB^2.CA+PC^2.AB+BC.CA.AB =$$
$$=PA^2.BC+(PA+AB)^2.CA+(PA+AC)^2.AB+BC.CA.AB =$$
$$=PA^2.BC+PA^2.CA+2PA.AB.CA+AB^2.CA+PA^2.AB+$$
$$+2PA.AC.AB+AC^2.AB+BC.CA.AB =$$
$$=PA^2(BC+CA+AB)+2PA.AB.CA-2PA.CA.AB+AB^2.$$
$$.CA+AC^2.AB+BC.CA.AB = AB^2.CA+AC^2.AB+BC.CA.AB=$$
$$=AB.CA(AB+CA+BC)=0$$

Es fácil ver que se repite el razonamiento si P está entre A y B, si está entre B y C, o si está a derecha de C, (fig. 1).

b) Si P no pertenece a $\overline{AB}$, sea P' el pie de la perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por P, (fig. 2). Por el teorema de Pitágoras

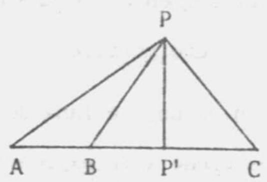


fig. 2

$$PA^2 = P'A^2+P'P^2$$
$$PB^2 = P'B^2+P'P^2$$
$$PC^2 = P'C^2+P'P^2$$

Volviendo a la expresión que nos ocupa,

$$PA^2.BC+PB^2.CA+PC^2.AB+BC.CA.AB =$$
$$=P'A^2.BC+P'B^2.CA+P'C^2.AB+BC.CA.AB+P'P^2(BC+CA+AB)=$$
$$=P'A^2.BC+P'B^2.CA+P'C^2.AB+BC.CA.AB$$

pero ahora A,B,C y P' son colineales y remitiéndonos al caso a) obtenemos la tesis.

Fórmula de la ceviana

Sea el triángulo de vértices A,B,C, en el que BC=a, AC=b, AB=c. En él consideremos la longitud de la ceviana AD (fig. 3) y definimos

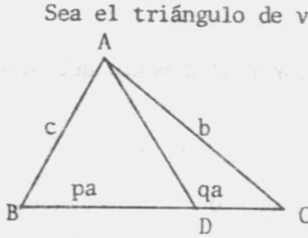


fig. 3

$$p = \frac{BD}{BC} \quad \text{y} \quad q = \frac{DC}{BC} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema anterior a los cuatro puntos A,B,C,D, que da

$AB^2.CD+AC^2.DB+AD^2.BC+CD.DB.BC=0$

y reemplazando según (1), se obtiene

$c^2.CD+b^2.DB+AD^2.BC+CD.DB.BC=0$

Despejando AD^2,

$AD^2 = \frac{BD}{BC} b^2 + \frac{DC}{BC} c^2 - DC.BD$, es decir,

$$AD^2 = p.b^2+q.c^2- p.q.a^2 \qquad (2)$$

Ejercicio 1: Obtener la fórmula de las medianas de un triángulo en términos de sus lados.

Ejercicio 2: Obtener la fórmula de los lados de un triángulo en términos de sus medianas.

Fórmula de la bisectriz de un ángulo de un triángulo.

Para esta fórmula necesitamos relacionar ángulos y segmentos como sigue, aplicando el teorema del seno a los triángulos BAD y DAC (fig.4) tenemos,

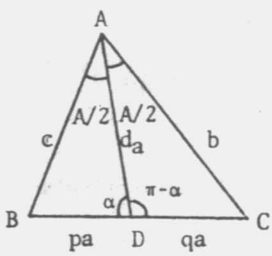


fig. 4

$$\frac{\text{sen } A/2}{BD} = \frac{\text{sen } \alpha}{AB} \qquad (3)$$

$$\frac{\text{Sen } A/2}{DC} = \frac{\text{sen } (\pi-\alpha)}{AC} \qquad (4)$$

De (3) y (4) se obtiene

$$\frac{AB.\text{sen } A/2}{BD} = \frac{AC.\text{sen } A/2}{DC}$$

equivalentemente

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} .$$

Volviendo a la notación usada anteriormentepodemos escribir

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$$

Recordemos que p+q =1, luego

$$p = \frac{c}{b+c} \quad , \quad q = \frac{b}{b+c}$$

Así, si d_a es la longitud del segmento bisectriz correspondiente al ángulo A

$$d_a^2 = \frac{c}{b+c} \cdot b^2 + \frac{b}{b+c} \cdot c^2 - \frac{bca^2}{(b+c)^2}$$, entonces tenemos

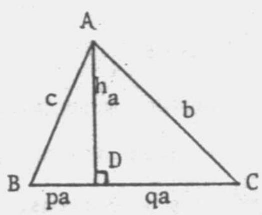
$$d_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2} \qquad \text{donde} \quad s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

o sea,

$$d_a = 2(b+c)^{-1} \cdot \sqrt{bcs(s-a)}.$$

Ejercicio 3: Obtener d_b y d_c.

Fórmula de las alturas de un triángulo.



Llamaremos h_a a la altura correspondiente al lado BC. La fórmula (2), según fig. 5, queda

$$h_a^2 = p.b^2 + q.c^2 - p.q.a^2$$

equivalentemente,

$$h_a^2 = p.b^2 + (1-p)c^2 - p(1-p)a^2$$

Escrita como ecuación cuadrática en p, queda

$$a^2.p^2 - (a^2 - b^2 + c^2)p + c^2 - h_a^2 = 0$$

Como tiene solución única su discriminante debe ser cero, es decir

$$(a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2(c^2 - h_a^2) = 0$$

Despejando h_a se obtiene

$$h_a = \frac{(b^2 - a^2 - c^2)^2 - 4c^2a^2}{4.a^2}$$

$$= \frac{((b^2-a^2-c^2) + 2ac)((b^2 - a^2 - c^2) - 2ac)}{4.a^2}$$

$$= \frac{(b^2 - (a-c)^2)\ (b^2 - (a+c)^2)}{4.a^2}$$

$$= \frac{(b+a-c)(b-a+c)(b-a-c)(b+a+c)}{4.a^2}$$

$$= \frac{16\ s(s-b)(s-c)(s-a)}{4.a^2}$$

de donde,

$$h_a = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

Ejercicio 4: Obtener h_b y h_c.

Ejercicio 5: Obtener la expresión del área del triángulo en términos de sus lados.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires