SOBRE TRIANGULOS RECTANGULOS

Jorge A. Vargas

No existe un triángulo rectángulo cuyos lados midan números naturales y las longitudes de sus catetos son cuadrados de números naturales.

En efecto, supongamos que existe un tal triángulo. Sean x,y los catetos y Z la hipotenusa del triángulo. Por hipótesis, existen naturales p, q tal que

$$p^2 = x, \; q^2 = y$$

Además, por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$Z^2 = x^2 + y^2 = p^4 + q^4$$

Notemos que $Z \geqslant 2$, puesto que $Z = 1$, implica $x = 1, y = 0$ o $x = 0, y = 1$, lo cual es absurdo. Sea $A = \{Z \in \mathbb{N}$: existen naturales p,q con $Z^2 = p^4 + q^4\}$. Como estamos suponiendo que existe un triángulo ..., tenemos que A es no vacío. Por el principio de Buen Orden A tiene un primer elemento que por lo observado es mayor o igual a 2.

Fijemos de ahora en mas, p,q,Z tal que

$$Z^2 = p^4 + q^4$$

$$Z = \text{primer elemento de } A$$

Es fácil ver que como Z es primer elemento de A, entonces Z, p, q son coprimos. En Courant y Robins. Que es la matemática E.D. Aguilar pág. 49. Esta probado que existen naturales m,n tal que

$$Z = m^2 + n^2 \ , \quad p^2 = m^2 - n^2, \quad q^2 = 2\ m\ n$$

m, n coprimos, (m par, n impar) o (n par m impar)

Pero p^2 es impar y $m^2 = p^2 + n^2$, implican que m es impar.

En consecuencia, tenemos que:

$$Z = m^2 + n^2 \qquad p^2 + n^2 = m^2 \ , \ q^2 = 2\ m\ n$$

m impar, n par, m y n coprimos. Aplicando el resultado sobre Pitágoras a $p^2 + n^2 = m^2$, tenemos que existan naturales b, c coprimos tal que

$$m = b^2 + c^2, \qquad n = 2\ b\ c, \qquad p = b^2 - c^2$$

como n es par tenemos que $n = 2\ r$, en consecuencia

$$q^2 = 4\ m\ r$$

lo cual inplica que $m = u^2$, $r = t^2$, por tanto

$$n = 2\ t^2 = 2\ b\ c$$

lo cual implica que $b = a^2$, $c = d^2$, a, d naturales. Por tanto

$$u^2 = a^4 + d^4$$

lo cual dice que $u \in A$. Como $u^2 = m$, tenemos que $u < m < m^2 < m^2 + n^2 = Z$, absurdo. Este absurdo provino de suponer que existe un triángulo...

Ejercicio: Plantearse problemas del mismo tipo.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física (IMAF)
Universidad Nacional de Córdoba
Valparaíso y R. Martínez - Ciudad Universitaria
5000 Córdoba.