SOBRE EL POLIGONO DE AREA MAXIMA INSCRIPTO EN UNA CIRCUNFERENCIA

Luis G. Quintas

En este trabajo se prueba que el polígono de N lados de mayor área inscripto en una circunferencia dada, es el polígono regular de N lados.

Esto se obtendrá como corolario de un resultado más general: dado un sector circular, el polígono inscripto de N lados cuya área resulta mayor es aquel cuyos vértices se distribuyen en forma equidistantes entre si sobre el arco de circunferencia.

La demostración es de tipo constructivo, acotando el área de un polígono inscripto cualquiera por las áreas de otros polígonos inscriptos "regulares".

Primero se trabaja dejando libre un punto sobre el arco de circunferencia, luego dos puntos y finalmente N puntos.

Sea σ el ángulo central del sector circular A_oOA_{N+1} de radio r (ver figura 1). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que r = 1. Situamos un punto A_1 sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1} y llamamos α al ángulo determinado por OA_o y OA_1. Si $0 \leq \sigma \leq \pi$. Pediremos solamente que el ángulo α cumpla: $0 \leq \alpha \leq \sigma$ y si $\pi < \sigma < 2\pi$ pediremos además que el ángulo α cumpla la condición:

$$(*) \qquad \sigma - \pi \leq \alpha \leq \pi$$

esta condición es equivalente a pedir que el ángulo α cumpla:

$$(**) \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \quad y \quad 0 \leqslant \sigma - \alpha \leqslant \pi$$

Diremos que el polígono $A_0A_1A_{N+1}O$ está inscripto en el sector circular A_0OA_{N+1} si el ángulo α cumple la condición (*) o su condición equivalente (**). Si $\alpha = \sigma/2$ el área del polígono $A_0A_1A_{N+1}O$ es:

$$\overline{A} = 2 \text{ sen } (\sigma/4).\cos (\sigma/4) \qquad \text{(ver figura 2)}$$

Si ahora tomamos el punto A_1 tal que el ángulo α cumpla (*), el área del polígono $A_0A_1A_{N+1}O$ estará dado por:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \text{sen } (\alpha/2).\cos (\alpha/2) + \text{sen } (\sigma-\alpha/2).\cos (\sigma-\alpha/2) \\ &= \text{sen } (\alpha/2).\cos (\alpha/2)+(\text{sen}(\alpha/2).\cos(\alpha/2)- \\ &\quad \cos(\sigma/2).\text{sen}(\sigma/2)).(\cos(\sigma/2).\text{sen}(\alpha/2)+\text{sen}(\sigma/2).\cos(\alpha/2)) \\ &= \text{sen}(\alpha/2).\cos(\alpha/2).(1-\cos^2(\sigma/2)+\text{sen}^2(\sigma/2))+ \\ &\quad +\cos(\sigma/2).\text{sen}(\sigma/2).(\cos^2(\alpha/2)-\text{sen}^2(\alpha/2)) \\ &= 1/2(\text{sen } \alpha(1-\cos\sigma)+\text{sen}\sigma.\cos\alpha) \end{aligned}$$

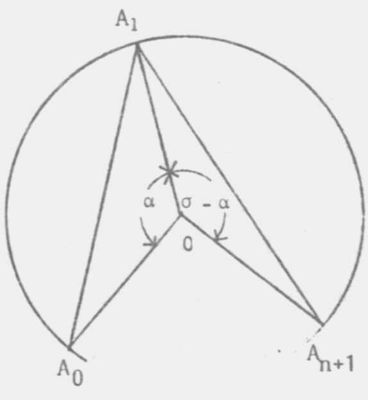


Fig. 1

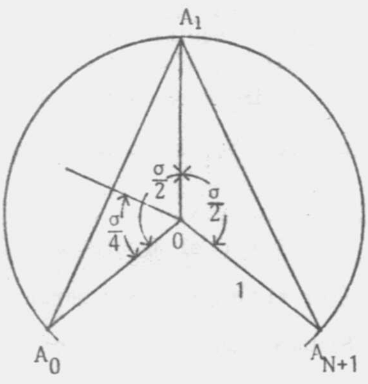


Fig. 2

Para cada sector de ángulo central σ queremos ver cuál es el ángulo α que cumple la condición (*), tal que el área del polígono $A_0A_1A_{N+1}O$ resulte máxima; para ello hacemos:

$$A'(\alpha) = 1/2\ (\cos\alpha.(1-\cos\sigma) - \operatorname{sen}\sigma.\ \operatorname{sen}\alpha) = 0$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\sigma/2)$$

por lo tanto $\alpha = (\sigma/2) + k$, con $k \in Z$. Pero, como el ángulo α debe cumplir la condición (*), resulta $\alpha = \sigma/2$.

Ahora, $A''(\alpha) = (-\operatorname{sen}\alpha.(1-\cos\sigma) - \operatorname{sen}\sigma.\ \cos\alpha)/2$ de donde obtenemos

$$A''(\sigma/2) = (-\operatorname{sen}(\sigma/2).(1-\cos\sigma) - \operatorname{sen}\sigma.\cos(\sigma/2))/2.$$

Entonces, si suponemos primero que $\pi < \sigma < 2\pi$ tenemos,

$$\operatorname{sen}(\sigma/2) > 0 \qquad \operatorname{sen}\sigma < 0$$

$$1 - \cos\sigma > 0 \qquad \cos(\sigma/2) < 0$$

por lo tanto $A''(\sigma/2) > 0$; es decir que en $\alpha = \sigma/2$ hay un máximo de la función $A(\alpha)$.

Por otra parte, si $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ como el área del triángulo $A_oA_{N+1}O$ es común a la de los cuadriláteros $A_oA_1A_{N+1}O$ y $A_oA_2A_{N+1}O$ siendo ahora A_1 el punto sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1}, tal que α resulte igual a $\sigma/2$ y el punto A_2 otro punto sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1} (ver Figura 3), para comparar cuál de los cuadriláteros es el que tiene mayor área, basta comparar las áreas de los triángulos $A_oA_1A_{N+1}$ y $A_oA_2A_{N+1}$. Como ambos triángulos tienen la misma base basta comparar sus alturas h_1 y h_2, pero es claro que $h_1 > h_2$. Por lo tanto, el cuadrilátero de área máxima es aquel tal que el ángulo α sea igual a $\sigma/2$. Hemos probado entonces el siguiente resultado,

Proposición 1: Dado un sector circular de ángulo central $\alpha < 2\pi$ el cuadrilátero inscripto que tiene mayor área es aquél tal que el ángulo α sea igual a $\sigma/2$.

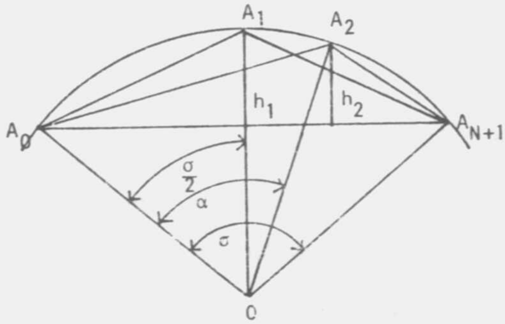


Fig. 3

Sea $A_oA_{N+1}O$ un sector circular y $A_1, \ldots, A_N$ puntos sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1}. Sea α_i el ángulo determinado por $A_{i-1}OA_i$ $i = 1, \ldots, N+1$ (ver figura 4). Supondremos primero que $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi$ para todo $i = 1 \ldots, N+1$; esto asegura que el polígono $A_oA_1 \ldots A_NA_{N+1}$ está inscripto en el sector circular A_oOA_{N+1} y que los puntos $A_1, \ldots, A_N$ están sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1}. Cada sector $A_{i-1}OA_i$ $i = 1, \ldots, N+1$ será llamado un subsector de $A_oA_{N+1}O$.

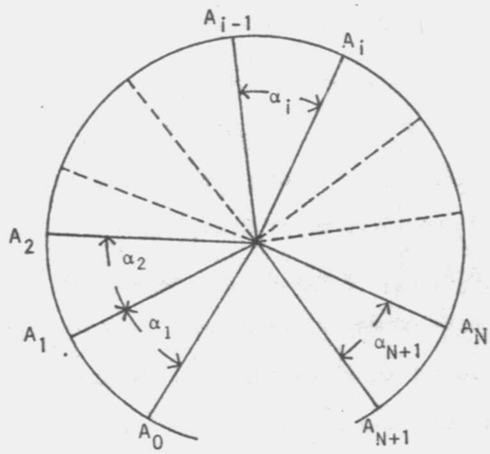


Fig. 4

Supongamos primero que $N = 2$. Es decir, tenemos un sector circular A_oOA_{N+1} de ángulo central σ y 2 puntos A_1 y A_2 sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1} tales que, el polígono $A_oA_1A_2A_{N+1}$ esté inscripto en el sector A_oOA_{N+1}.

Supongamos que el punto A_1 determina junto con el punto A_o el subsector de ángulo central $\alpha(\alpha < \sigma)$. Es claro por lo ya demostrado para un solo punto libre, que el área del polígono $OA_oA_1A_2A_{N+1}$ es mayor que el área del polígono $OA_oA_1A_2^1A_{N+1}$, donde el punto A_2^1 se consigue haciendo la bisectriz del ángulo $\sigma - \alpha$. Ahora tomemos $OA_oA_1^1A_2^1A_{N+1}$, donde el punto A_1^1 se consigue haciendo la bisectriz del ángulo central del subsector $A_oOA_2^1$. Es claro que este polígono tiene mayor área que el polígono $OA_oA_1A_2A_{N+1}$. Prosiguiendo de esta forma se logra acotar el área del polígono inicial $A_oA_1A_2A_{N+1}$ por las áreas de otros polígonos inscriptos en el sector A_oOA_{N+1} que convergen al área del polígono $OA_oA_1^*A_2^*A_{N+1}$, el cual es tal que cada subsector $A_oOA_1^*$; $A_1^*OA_2^*$ y $A_2^*OA_{N+1}$ tienen ángulo central $\sigma/3$. (ver Figura 5).

Definimos $\qquad \bar{\alpha}_0 = \alpha$;

$\bar{\alpha}_1$ = ángulo central del subsector $A_2^1\, OA_{N+1}$

$\bar{\alpha}_3$ = ángulo central del subsector $A_2^2OA_{N+1}$

en general, $\bar{\alpha}_{2n+1}$ = ángulo central del subsector $A_2^nOA_{N+1}$

y $\qquad \bar{\alpha}_2$ = ángulo central del subsector $A_oOA_1^1$

$\bar{\alpha}_4$ = ángulo central del subsector $A_oOA_1^2$

en general, $\bar{\alpha}_{2n}$ = ángulo central del subsector $A_oOA_1^n$

El procedimiento descripto anteriormente muestra que,

$$\bar{\alpha}_o = \alpha$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\sigma - \alpha}{2} = \frac{2^0\sigma+(-1)^1\alpha}{2}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\sigma - \bar{\alpha}_1}{2} = \frac{(2^1-2^0)\sigma+(-1)^2\alpha}{2^2}$$

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{\sigma - \bar{\alpha}_2}{2} = \frac{(2^2-2^1+2^0)\ \sigma+(-1)^3\alpha}{2^3}$$

$$\bar{\alpha}_4 = \frac{\sigma - \bar{\alpha}_3}{2} = \frac{(2^3-2^2+2^1-2^0)\sigma+(-1)^4\alpha}{2^4}$$

en general después de n pasos tendremos,

$$\bar{\alpha}_n = \frac{1}{2^n}\{(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i 2^i)(-1)^{n-1}\sigma+(-1)^n\alpha\}$$

operando se tiene:

$$\bar{\alpha}_n = \{\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+1\}\ \frac{\sigma}{3}+\frac{(-1)^n\alpha}{2^n}$$

por lo tanto cuando $n \to \infty$; $\bar{\alpha}_n \to (\sigma/3)$. Entonces, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 2: Dado un sector circular OA_oA_{N+1} de ángulo central σ y dados los puntos A_1 y A_2 sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1}; el polígono inscripto de área máxima $OA_oA_1^*A_2^*A_{N+1}$ es aquel tal que cada uno de los subsectores $OA_oA_1^*$, $OA_1^*A_2^*$ y $A_2^*A_{N+1}O$ tengan el mismo ángulo central, es decir que cada uno de ellos sea igual a $(\sigma/3)$.

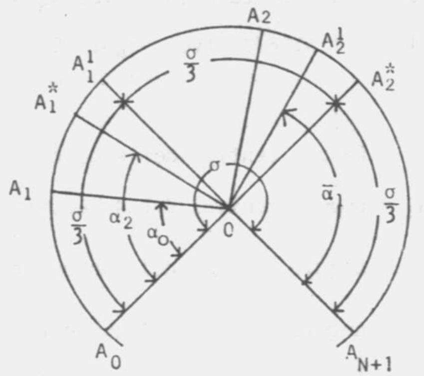


Fig. 5

Dado un sector circular A_oOA_{N+1} de ángulo central $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ y N puntos $A_1,\ldots, A_N$ sobre el arco A_oA_{N+1}, tal que cada subsector $A_{i-1}OA_i$ $i = 1,\ldots, N+1$ tenga ángulo central $\alpha_i \leq \pi$ veremos que el polígono inscripto de mayor área es aquel cuyos subsectores son todos iguales.

Supongamos que el subsector A_oOA_1 tiene ángulo central α con $0 \leq \alpha \leq \pi$. Procediendo a acotar las áreas de los polígonos como en los casos anteriores y teniendo en cuenta que en este caso el ángulo $\bar{\alpha}_{2n-1}$ será el ángulo central del subsector $A_N^nOA_{N+1}$ y el ángulo $\bar{\alpha}_{2n}$

será el ángulo central del subsector $A_oOA_1^n$; se obtienen polígonos ins criptos tales que los ángulos centrales de los mencionados subsectores son:

$$\bar{\alpha}_o = \alpha$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\sigma - \alpha}{N} = \frac{(N^o\sigma + (-1)^1\alpha)}{N^1}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\sigma - \bar{\alpha}_1}{N} = \frac{(N^1 - N^o)\sigma + (-1)^2\alpha}{N^2}$$

en general después de n pasos tendremos:

$$\bar{\alpha}_n = \frac{\{\sum_{i=0}^{n-1}(-N)^i\}(-1)^{n-1}\sigma + (-1)^n\alpha}{N^n}$$

de donde se obtiene

$$\bar{\alpha}_n = \{\frac{(-1)^{n-1}}{N^n} + 1\}\frac{\sigma}{N+1} + \frac{(-1)^n\alpha}{N^n}$$

Por lo tanto cuando $n \to \infty$; $\bar{\alpha}_n \to (\sigma/N+1)$. Hemos probado entonces el siguiente resultado

Teorema 3: Dado el sector circular OA_oA_{N+1} de ángulo central σ y dados N puntos $A_1, \ldots, A_N$ sobre el arco de circunferencia A_oA_{N+1}; el polígono inscripto de N+3 lados cuya área resulta máxima es aquel tal que cada subsector tenga ángulo central $(\sigma/N+1)$.

Corolario 5: Dada una circunferencia y dado un polígono de N vértices inscripto en dicha circunferencia, el polígono inscripto de área máxima es el polígono regular de N vértices.

Demostración: Sean los puntos $A_1, \ldots, A_N$ los vértices de un polígono inscripto en una circunferencia (para una distribución dada de N puntos sobre la circunferencia); supongamos primero que cada subsector A_iOA_{i+1} mod (N), determina el ángulo central $\alpha_i \leqslant \pi$. Sea $\alpha \leqslant \pi$ el ángulo determinado por el origen y dos vértices consecutivos, supongamos que se trate del ángulo que forman los puntos O, A_1 y A_2.

El área del polígono $A_1, \ldots, A_N$ resultará menor que el área del polígono con vértices $A_1A_2A_3^1A_4^1 \ldots A_{N-1}^1A_N^1$ donde los puntos $A_2^1, \ldots, A_N^1$ son tomados sobre la circunferencia de manera tal que los subsectores $A_2OA_3^1, A_3^1OA_4^1, \ldots, A_{N-1}^1OA_N^1$ tengan el mismo ángulo central $\bar{\alpha}_1 = \frac{\sigma - \alpha}{N - 1}$. Procediendo como en los casos anteriores podemos continuar acotando superiormente el área del polígono dado inicialmente por el área de otros polígonos inscriptos en la circunferencia tal que los ángulos centrales de los subsectores sean respectivamente:

$$\bar{\alpha}_o = \alpha$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\sigma - \alpha}{N - 1} = \frac{(N-1)^o\sigma + (-1)^1\alpha}{N-1}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\sigma - \alpha_1}{N - 1} = \frac{((N-1)^1 - (N-1)^o)\sigma + (-1)^2\alpha}{(N-1)^2}$$

en general, después de n pasos tendremos:

$$\bar{\alpha}_n = \frac{\{\sum_{i=0}^{n-1} (-(N-1))^i\}(-1)^{n-1}\sigma + (-1)^n\alpha}{(N-1)^n}$$

de donde se obtiene

$$\bar{\alpha}_n = \{\frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^n} + 1\} \frac{\sigma}{N} + \frac{(-1)^n\alpha}{(N-1)^n}$$

Por lo tanto cuando $n \to \infty$; $\bar{\alpha}_n \to (\sigma/N)$.

Todo esto lo hemos hecho bajo el supuesto de que cada ángulo α_i cumpla la condición antes mencionada $\alpha_i \leqslant \pi$ para $i = 1, \ldots, N$. Ahora, si dada una distribución de N puntos sobre la circunferencia existiera algún ángulo $\alpha_i \geqslant \pi$ el polígono estaría contenido en un semicírculo por lo tanto tendríamos:

i) En el caso $N = 4$, el área del polígono inscripto regular es $\bar{A}_4 = 2$ (recordar que $r = 1$)y el área del semicírculo es $(\pi/2) < 2$. Por lo tanto estos polígonos no son de interés en la búsqueda de los polígonos inscriptos de área máxima.

ii) En el caso $N \geqslant 4$, dado un polígono inscripto en la circunferencia, (siempre suponiendo que está contenido en el semicírculo, es decir que exista un ángulo $\alpha_i \geqslant \pi$) con vértices $A_1, \ldots, A_N$, éste tampoco resulta de interés en la búsqueda del polígono inscripto de N vértices cuya área sea máxima, ya que:

$$\overline{A}_N \geqslant \overline{A}_4 > (\pi/2) \qquad \text{para todo } N \geqslant 4$$

donde $\overline{A}_N$ es el área del polígono inscripto regular de N vértices.

Las desigualdades anteriores resultan evidentes ya que una vez encontrado el polígono inscripto de cuatro vértices, cuya área es máxima (esto es, el cuadrado $A_1, \ldots, A_4$) agregando un punto A_5 distinto de $A_1, \ldots, A_4$ sobre la circunferencia, se obtiene el polígono de 5 vértices $A_1, \ldots, A_4, A_5$ cuya área $\tilde{A}_5$ es mayor que $\overline{A}_4$ (ver Figura 6), por otro lado este no es el polígono de 5 lados inscripto de área máxima ya que no es regular, por lo tanto $\overline{A}_5 \geqslant \overline{A}_4$. Agregando más puntos se obtiene $\overline{A}_N \geqslant \overline{A}_4$ para todo $N \geqslant 4$.

Es claro que también es válida la desigualdad: $\overline{A}_N \geqslant \overline{A}_M$ para cada $\overline{N} \geqslant \overline{M}$; donde A_N y A_M son las áreas de los polígonos regulares de N y M vértices respectivamente.

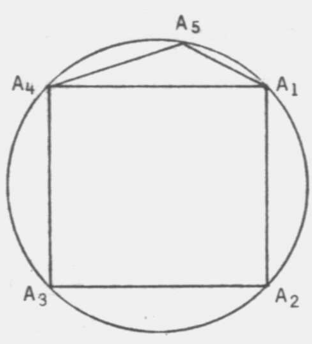
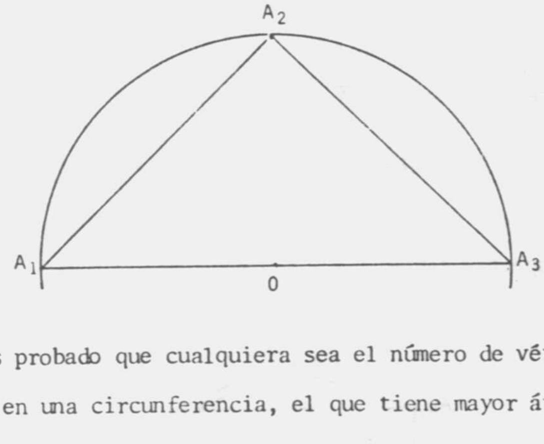


Fig. 6

Finalmente consideramos el caso N = 3. Si el triángulo $A_1 A_2 A_3$ inscripto en la circunferencia es tal que existe un ángulo $\alpha_i \geqslant \pi$, es decir que $A_1 A_2 A_3$ esté contenido en el semicírculo, veremos que tampoco resulta este triángulo de interés en la búsqueda del triángulo inscripto de área máxima. Para ello vamos a comparar el área $\tilde{A}_3$ del mayor triángulo contenido en el semicírculo con el área $\bar{A}_3$ del triángulo equilátero inscripto en la circunferencia (recordemos que siempre nos referimos a la circunferencia y al círculo de radio 1). Veamos que $\bar{A}_3 \geqslant \tilde{A}_3$. Es claro que el triángulo inscripto, contenido el semicíriculo, que tiene mayor área es el triángulo de vértices $A_1A_2A_3$ donde un lado, A_1A_3 por ejemplo, coincide con el radio de la circunferencia y el punto A_2 es equidistante de A_1 y A_3 (ver Figura 7). Su área es $\tilde{A}_3 = 1$. Si áhora consideramos el área del triángulo equilátero inscripto en la circunferencia su área es $\bar{A} = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$. Por lo tanto $\bar{A}_3 > \tilde{A}_3$

Fig. 7



Con esto hemos probado que cualquiera sea el número de vértices de un polígono inscripto en una circunferencia, el que tiene mayor área es el polígono regular.

Instituto de Matemática Aplicada
Universidad Nacional de San Luis.