SOLUCIONES ENVIADAS

Ejercicio 2, Vol. 2 N° 1. Pruebe que si $a+b+c=1$, entonces $a^2+b^2+c^2 \geq 1/3$.

La siguiente solución fue enviada por Raúl D. Katz - Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.

Recordamos al lector que si $\varphi(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ con $\alpha > 0$, entonces $\varphi(x) \geq \varphi(-\frac{\beta}{2\alpha})$ para todo $x \in R$. En vista de este resultado tenemos,

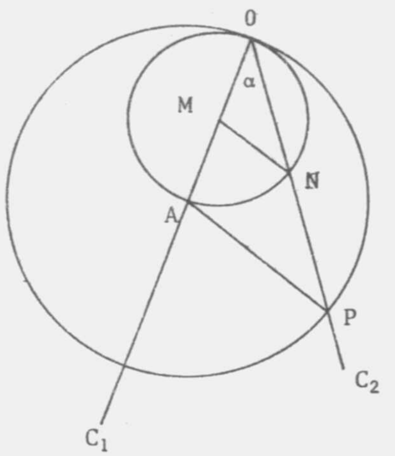
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= a^2+b^2+[1-(a+b)]^2 \\ &= 2a^2-2(1-b)a+2b(b-1)+1 \\ &\geq 2\left(\frac{1-b}{2}\right)^2-2(1-b)\left(\frac{1-b}{2}\right)+2b(b-1)+1 \\ &= \frac{3}{2}b^2-b+\frac{1}{2} \\ &\geq \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3} \quad . \end{aligned}$$

Ejercicio 13, Vol. 2 N°1. Fijar una circunferencia C y un punto O en C . Describir la curva determinada por los puntos medios de las cuerdas de C que pasan por O.

La siguiente solución fue enviada por Raúl D. Katz - Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.

La curva determinada por los puntos medios de las cuerdas de C que pasan por O es una circunferencia, cuyo centro es el punto medio del segmento determinado por O y el centro de la circunferencia dada, y cuyo radio es igual a la mitad del radio de la circunferencia dada. Para ver esto supongamos que la circunferencia C tiene centro A y radio R (ver figura).

Consideremos la cuerda C_1 que pasa por el punto A y otra cuerda cualquiera, C_2, cuyo punto medio indicamos con N. Probaremos que N se halla a una distancia $R/2$ del punto medio del segmento OA.



Los triángulos AOP y MON son semejantes pues:

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|ON|}{|OP|} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad MON = AOP = \alpha \ .$$

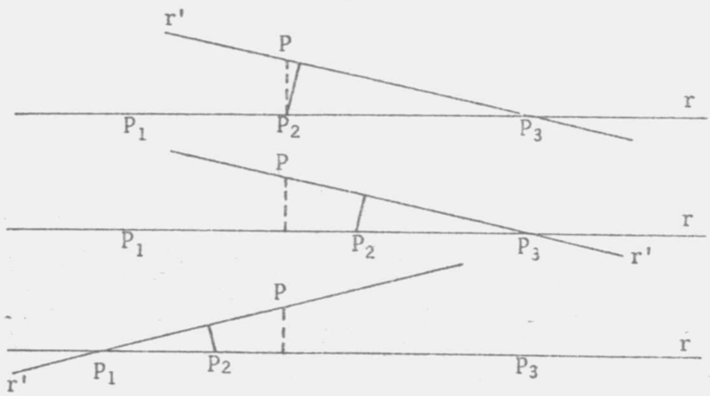
Por lo tanto, $\dfrac{|MN|}{|AP|} = \dfrac{1}{2}$ es decir $|MN| = \dfrac{|AP|}{2} = \dfrac{R}{2}$

Ejercicio 3, Vol. 2 N° 2. Dado un número finito de puntos del plano con la propiedad que toda recta que une dos de ellos contiene otro punto de los dados, probar que los puntos son colineales.

La siguiente solución fue enviada por Enzo R. Gentile - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Supongamos que los puntos dados no son colineales. Denotemos con P el conjunto de puntos y con R el conjunto de rectas que ellos determinan. P y R son finitos. Cada $p \in P$ y cada $r \in R$ con $p \notin r$ determinan un número real positivo, a saber, la distancia de p a r. Por finitud hay un punto p y una recta r, con $p \notin r$ y tal que la distancia de p a r es mínima.

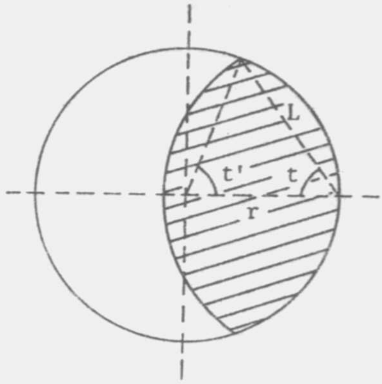
La recta r tiene al menos tres puntos $p_1 < p_2 < p_3$ (para indicar ubicación relativa). Caben tres posibilidades, que dibujamos para simplificar, de la ubicación de p respecto de p_1, p_2, p_3.



En cualquier caso resulta que la distancia de p_2 a la recta r' es menor a la distancia de p a r, contradicción.

Ejercicio 6, Vol. 2 N° 2. Consideremos un corral circular de radio conocido r. En él se encierra un caballo atándolo en un punto del perímetro con una cuerda de longitud L (ver figura). Se desea conocer L de modo que el caballo pueda moverse sólo en un área que sea la mitad del total.

La siguiente solución fue enviada por Enzo R. Gentile - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.



Se trata de determinar L de manera tal que el área rayada sea la mitad del área total. Debemos resolver la ecuación,

$$\frac{t\ L^2}{2} + \left(\frac{t'r^2}{2} - \frac{r^2 \text{sen } t'}{2}\right) = \frac{\pi}{4} r^2 .$$

Se tienen las relaciones,

$$t' + 2t = \pi$$

$$L = r\sqrt{2(1-\cos t')} \qquad \text{(Usar Teorema del coseno)}$$

donde $t, t' < \pi/2$, medidos en radianes. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r = 1$. Operando resulta la ecuación,

$$(\pi - t') \cos t' + \text{sen } t' = \frac{\pi}{2}$$

Para hallar un valor de t', utilizando una calculadora de bolsillo TI 57 damos valores a t' buscando el cambio de signo de la función

$$A(t') = (\pi - t') \cos t' + \text{sen } t' - \frac{\pi}{2}$$

Llegamos, luego de varios ensayos, a obtener un cambio de signo como sigue:

$$A(1{,}235) = 0{,}0016$$

$$A(1{,}236) = -\,0{,}0001$$

Por lo tanto $t' = 1{,}235$ es una solución aproximada que corresponde a un ángulo de 70,76 grados o sea $70°45'$ (valor aproximado). El valor aproximado de L es $L = 1{,}1580$.

PROBLEMAS

1) Determine todas las horas del día en que coinciden las agujas de un reloj (por ejemplo, a las 12 hs). [R. Miatello]

2) Un censista visita a un aficionado a la matemática. Luego de preguntarle la edad y otros datos personales el censista pregunta: ¿Quiénes más viven en la casa? obteniendo como respuesta: -"Viven tres personas más?. El producto de sus edades es 1296 y su suma es el número de esta casa". El censista piensa y pregunta:-¿La edad de alguno de los tres coincide con la suya? Ante la respuesta negativa el censista se retira satisfecho. ¿Cuál es el número de la casa?. [R. Miatello]

3) Un hombre cobra un cheque en un banco. En la calle el hombre nota que el cajero ha intercambiado el valor de los pesos con el de los centavos. Luego de gastar 5 centavos el hombre observa que tiene exactamente el doble del valor original del cheque. ¿Cuál era éste?. [R. Miatello]

4) Para resolver mentalmente:

   a) Un ladrillo pesa un kilogramo más medio ladrillo. ¿Cuánto pesa un ladrillo y medio?