CONSTRUCCION DEL PENTAGONO REGULAR CON REGLA Y COMPAS

Elsa Malisani

Introducción

La construcción de polígonos regulares mediante la utilización de la regla y el compás se remonta a los geómetras griegos, junto con los problemas de la duplicación del cubo, de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo. Los griegos habían desarrollado procedimientos de construcción para ciertos polígonos regulares, tales como el pentágono y el exágono, en tanto que, para el heptágono regular y el polígono regular de 17 lados, sus técnicas constructivas fracasaban.

Las soluciones a estos dos problemas no aparecieron sino hasta el siglo XIX, con los trabajos de Gauss y Galois. Por un lado Gauss descubrió un procedimiento para construir el polígono regular de 17 lados y, por el otro, a partir de la Teoría de Galois se pudo demostrar que era imposible construir el heptágono regular con regla y compás. Véase el artículo del profesor Gentile en este número.

Este trabajo pretende, primero, demostrar algebraicamente que es posible construir un pentágono regular con regla y compás, luego, describir el procedimiento clásico utilizado por los griegos para realizar dicha construcción y, por último, mostrar que la medida del lado del pentágono así construído, coincide con la medida obtenida a partir de la justificación algebraica. Cabe aclarar que en ambos casos se utiliza un pentágono inscripto a una circunferencia de radio unitario. Al final del artículo y a modo de corolario se demuestra que el pentadecágono regular es construible.

Consideraciones previas.

A continuación detallaremos las definiciones y propiedades que se utilizarán en el desarrollo específico del tema.

Definición 1. En las construcciones geométricas, el uso de la regla y el compás está restringido a las siguientes operaciones,

a) Dados dos puntos a y b del plano, se puede construir la recta determinada por a y b (es decir, la regla no se utiliza para medir longitudes de segmentos).

b) Dados un punto p y un segmento ab de longitud $|ab| = r > 0$ se puede construir la circunferencia de centro p y radio r.

Definición 2. Dado un segmento de longitud unitaria se dice que un número real α es *construible* si existe un segmento de longitud $|\alpha|$ que puede ser construido con regla y compás.

Nota. Suponemos que el lector conoce los procedimientos para construir el punto medio de un segmento y una recta paralela o perpendicular a otra desde un punto dado.

Lema 1. Si α y β son números construíbles entonces $\alpha \pm \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α/β (cuando $\beta \neq 0$) son construibles.

Demostración. Dejamos al lector la demostración de que $\alpha \pm \beta$ es construible. En lo que sigue suponemos que α y β son positivos (ver Nota 1 al final) y tomamos el siguiente segmento como unidad:

(i) Veamos que $\alpha \cdot \beta$ es construible.

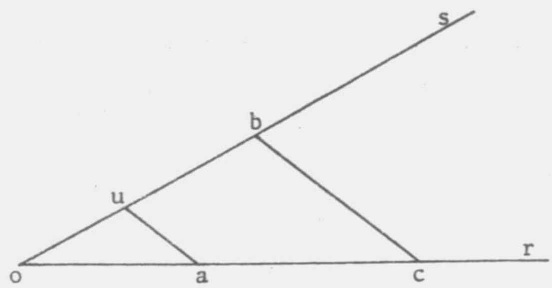

Fig. 1

a) Se trazan dos semirrectas con origen en o : or y os como muestra la figura 1.

b) Sobre or se dibuja oa tal que $|oa| = \alpha$

c) Sobre os se traza ou tal que $|ou| = 1$ y a continuación ub tal que $|ub| = \beta$.

d) Se une u con a y por el punto b se traza una paralela a ua (método geométrico conocido).

e) El punto $c = bc \cap or$ determina ac tal que $|ac| = \alpha . \beta$ pues, aplicando el teorema de Thales tenemos,

$$\frac{\alpha}{|ac|} = \frac{|oa|}{|ac|} = \frac{|ou|}{|ub|} = \frac{1}{\beta} \quad ,$$

por lo tanto $|ac| = \alpha . \beta$.

(ii) Probamos ahora que α/β $(\beta \neq 0)$ es construible. Para es_ to consideramos la figura 2.

Si se realiza la construcción indicada en la figura 2 y se aplica el teorema de Thales se obtiene, $|ac| = \alpha/\beta$.

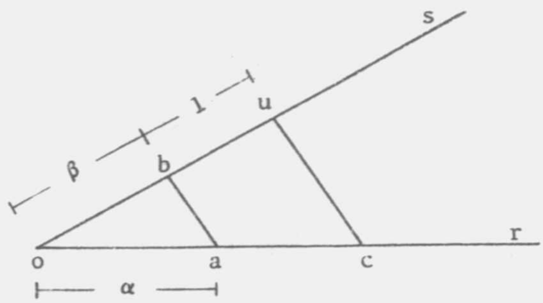

Fig. 2

Lema 2. Si $\alpha > 0$ es un número construible entonces $\sqrt{\alpha}$ es construible.

Demostración. Consideramos la siguiente figura,

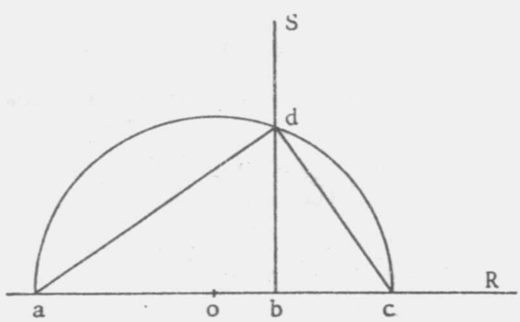

Fig. 3

a) Sobre R se traza ab tal que $|ab| = \alpha$ y a continuación el segmento unitario, como muestra la figura 3.

b) Se determina el punto medio o del segmento ac (procedimiento geométrico conocido).

c) Se dibuja una semicircunferencia con centro en o y radio $|oc| = (\alpha + 1)/2$.

d) Se traza una recta S perpendicular a R por el punto b (procedimiento conocido). Se intersecta a la semicircunferencia en el punto d . Veamos que $|bd| = \sqrt{\alpha}$. Los triángulos abd y bcd son semejantes, entonces tenemos

$$\frac{|ab|}{|bd|} = \frac{|bd|}{|bc|}$$

de donde se obtiene $|bd|^2 = \alpha$, como queríamos probar.

El pentágono regular es construíble.

El problema consiste en demostrar que el decágono regular es construíble, pues a partir de ello se prueba algebraicamente que el pentágono también lo es. Consideremos un decágono regular inscripto en una circunferencia de radio unitario (ver Nota 2 al final).

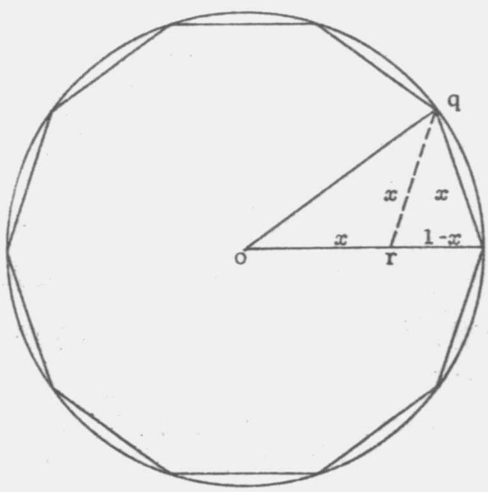

Fig. 4

a) Sea x la medida del lado del decágono y llamemos oqp al triángulo formado por el lado del decágono y los dos radios de la circunferencia unitaria. Claramente, el tríangulo oqp es isósceles. Observar que el ángulo poq (ángulo central subtendido por el lado pq) mide 36°, esto implica que los ángulos qpo y oqp miden 72°.

b) Se traza la bisectriz, qr, del ángulo oqp. Obtenemos así dos triángulos isósceles, rqp y oqr. En efecto, med(rqp) = = 36° y med(qpo) = 72°. Esto dice que med(prq) = 72°, lo cual implica que $|rq| = |qp| = x$, es decir, el triángulo rqp es isósceles. Análogamente, como med(oqr) = 36° = med(poq) resulta $|rq| = |or| = x$. Se sigue entonces que oqr es isósceles. Como $|op| = 1$ y $|rp| = |op| - |or|$ resulta $|rp| = 1 - x$.

c) Los triángulos oqp y rqp son isósceles y tienen sus ángulos respectivamente congruentes, por lo tanto, son semejantes. Esto implica que,

$$\frac{|oq|}{|qp|} = \frac{|qp|}{|pr|}$$

es decir,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} .$$

Esto dice que x satisface la ecuación $X^2 + X - 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación se obtiene $x = (-1 + \sqrt{5})/2$. De los lemas 1 y 2, se deduce que x es un número construible, con lo que queda demostrado que el decágono regular es construible. En la figura siguiente se indica como construir x,

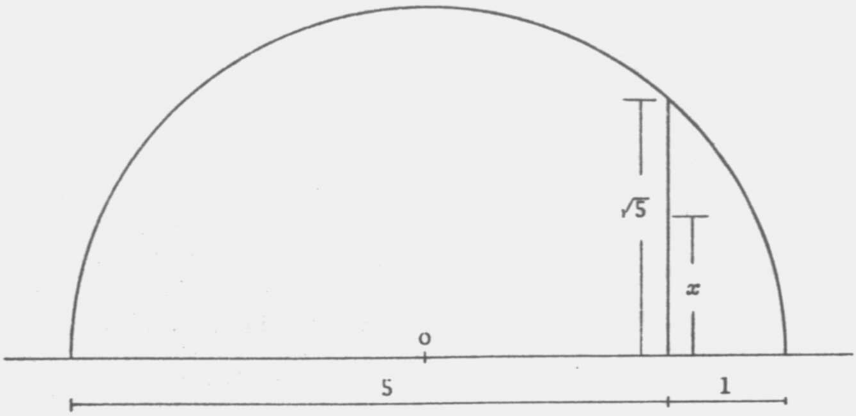

Fig. 5

A continuación, trazamos una circunferencia de radio unitario y construímos el decágono regular (figura 6). Uniendo los segundos vértices del decágono obtenemos el pentágono regular.

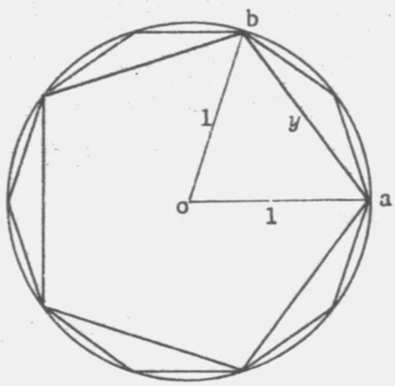

Fig. 6

Para hallar la longitud del lado del pentágono procedemos como sigue,

a) El triángulo aob es isósceles y el ángulo aob mide 72°, por ser un ángulo central del pentágono regular. Llamamos y a la medida del segmento ab (lado del pentágono regular).

b) Para calcular y aplicamos el teorema del coseno en el triángulo aob,

$$y^2 = |oa|^2 + |ob|^2 - 2|oa||ob|\cdot \cos(aob)$$

de donde resulta,

(I) $$y^2 = 2 - 2\cos 72°$$

c) A continuación, expresamos $\cos 72°$ en términos de x (lado del decágono). Para ello nos remitimos a la figura 4. Aplicando el teorema del coseno en el triángulo rpq tenemos,

$$|rq|^2 = |pq|^2 + |pr|^2 - 2|pq||pr| \cos(qpr)$$

es decir,

$$x^2 = x^2 + (1-x)^2 - 2x(1-x)\cos 72° .$$

Simplificando obtenemos,

(II) $$\cos 72° = \frac{1-x}{2x} .$$

d) Reemplazando (II) en (I) obtenemos,

(III) $$y^2 = \frac{3x-1}{x} .$$

Como $x = (-1+\sqrt{5})/2$, de (III) resulta $y = (\sqrt{10-2\sqrt{5}})/2$, que es lo que queríamos calcular.

Observaciones.

1) De los lemas 1 y 2 se deduce que y (lado del pentágono) es un número construible, por lo tanto, se puede realizar directamente la construcción del pentágono regular, sin pasar por las

del decágono.

2) El desarrollo anterior fue efectuado para un pentágono regular inscripto en una circunferencia unitaria, con el objeto de que las demostraciones y construcciones sean más simples. Sin embargo, resulta igualmente válido para una circunferencia de radio arbitrario r, en este caso los lados del decágono y del pentágono medirán,

$$x = (-1 + \sqrt{5})\,r/2 \quad , \qquad y = (\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\,r/2$$

respectivamente. La prueba se deja para el lector.

Procedimiento geométrico.

Para construir el pentágono regular con regla y compás, existe un procedimiento más simple que el descripto en el párrafo anterior. Dicho procedimiento responde a la construcción clásica descubierta por los griegos. A continuación, describimos este método.

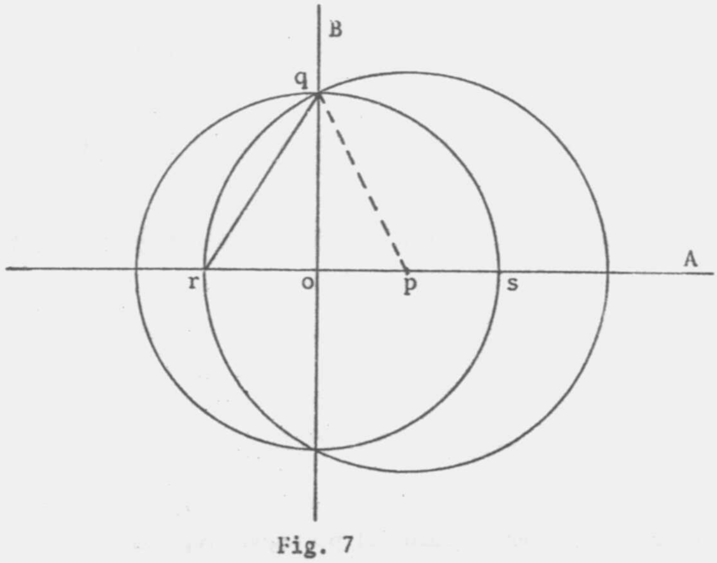

Fig. 7

a) Se traza una circunferencia unitaria de centro o .

b) Se dibujan dos rectas A y B perpendiculares en o , utilizando un procedimiento conocido.

c) Se determina el punto medio del radio os . Llamamos p a este punto.

d) Se construye una circunferencia de centro p y radio pq (ver figura 7). Esta circunferencia intersecta a la recta A en el punto r perteneciente a uno de los radios de la circunferencia unitaria.

En esta construcción quedan determinados los segmentos or y qr. Demostraremos a continuación que,

(i) or es el lado del decágono regular.

(ii) qr es el lado del pentágono regular.

En efecto, veamos (i). Sabemos que $|oq| = 1$ y $|op| = 1/2$, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo opq obtenemos, $|pq| = (\sqrt{5})/2$. Entonces,

$$|or| = |pr| - |op| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = (-1 + \sqrt{5})/2$$

que, como sabemos, es la longitud del lado del decágono regular.

Para probar (ii) aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo oqr ,

$$|qr|^2 = |or|^2 + |oq|^2$$

$$|qr|^2 = [(-1 + \sqrt{5})/2]^2 + 1$$

$$|qr| = (\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})/2 \quad .$$

Por lo tanto, qr es el lado del pentágono regular.

El pentadecágono regular es construible.

Para construir el pentadecágono regular aplicamos la siguiente proposición.

Proposición. Supongamos que n y m son primos relativos y que es posible construir polígonos regulares de n y m lados respectivamente. Entonces, el polígono regular de nm lados es construible.

Demostración. Como n y m son primos relativos, existen enteros a y b tales que $an - bm = 1$. Esto implica que,

$$(*) \qquad a\left(\frac{2\pi}{m}\right) - b\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{nm} \; .$$

Ahora, $2\pi/m$ y $2\pi/n$ son ángulos construibles, por ser los ángulos centrales de polígonos regulares construibles de m y n lados respectivamente, por lo tanto (*) implica que $2\pi/nm$ es construible. Como $2\pi/nm$ es el ángulo central de un polígono de nm lados, concluímos que éste es construible.

Construcción del pentadecágono regular.

En virtud de la proposición anterior, el pentadecágono regular puede construirse a partir del triángulo equilátero y del pentágono regular. Procedemos como se indica en la figura 8.

A partir del punto v construímos el pentágono regular y el triángulo equilátero. Para este último, aplicamos el mismo procedimiento que para construir el exágono regular pero luego unimos los segundos vértices. Tenemos ,

$$voa = voc + coa$$

Ahora, $voa = 2(2\pi/5)$ y $vob = 2\pi/3$, por lo tanto,

$$boa = 2(\frac{2\pi}{5}) - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{15} .$$

Es decir, boa es el ángulo central de un pentadecágono regular y ab es su lado.

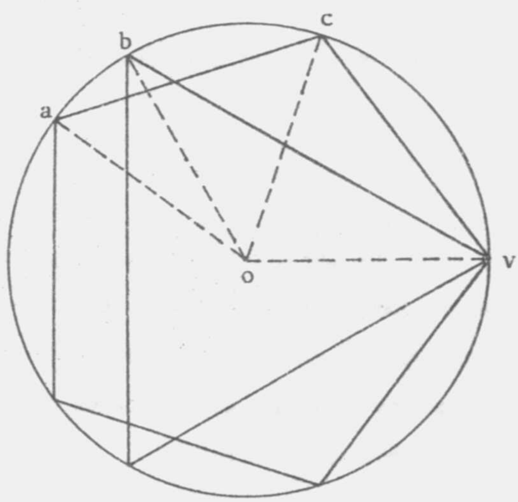

Fig. 8

Notas:

(1) Esta restricción no afecta la generalidad de la prueba, pues si fuese $\alpha.\beta < 0$ ó $\alpha\beta^{-1} < 0$, se construyen los segmentos de longitudes $|\alpha.\beta|$ y $|\alpha\beta^{-1}|$ por el procedimiento detallado a continuación y luego, se representan en la recta numérica como números negativos.

(2) Para una mayor claridad en el dibujo, las figuras 4,6,7 y 8 se han realizado utilizando una unidad de medida distinta a la em

en las otras figuras.

<u>*Bibliografía.*</u>

J. Benson and D. Borkovitz, A new angle for constructing pentagons, The Mathematics Teacher, 75 (4) : 288-290 (1982).

G. Birkhoff and R. Beatley, Basic Geometry , New York, Chelsea, 3^{ra} ed. (1959).

I.N. Herstein, Algebra Moderna, México, Trilles, 4a. ed. (1979).

A. Peressini and D. Sherbert, Topics in Modern Mathematics (for teachers), Holt, Rinehart and Winston (1971).

¡A los "grandes" también les pasa!

André Weil dice en la página 129 de su libro "L'integration dans les groupes topologiques", Hermann y Cie. (1953): *"... se verifica fácilmente que todo entorno de la identidad contiene un entorno invariante por automorfismos interiores...".* En la página 160 (Fe de Erratas) escribe. *"La afirmación hecha en la página 129* (se refiere a lo escrito precedentemente) *lejos de verificarse fácilmente, es inexacta, como lo muestra un contraejemplo de Mostow".*

ALGEBRISTA

(Tango)

Algebrista te volviste
refinado hasta la esencia
oligarca de la ciencia
matemático bacán
y junás a los que sudan
en las otras disciplinas
como dama a pobres minas
que laburan por el pan.

Te acordás...? en otros tiempos
sin mayores pretensiones
mendigabas soluciones
a una mísera ecuación
y hoy la vas de riguroso
revisás los postulados
y junás por todos lados
la más vil definición.

Pero no engrupís a nadie
y es inútil que te embales
con anillos, con ideales
y con Algebras de Boole.
Todos saben que hace poco
resolviste hasta matrices
y encontrabas las raíces
por el método de Sturm.

Pero puede ser que ocurra
que en los tumbos de la vida
tanta cáscara aburrida
te llegue a cansar al fin
y añores tal vez el día
que sin álgebras abstractas
y con dos cifras exactas
te encontrabas tan feliz.

Dr. Enzo Gentile