LAS REDES Y SUS APLICACIONES

Vera W. de Spinadel

1. *INTRODUCCION*

La teoría de las redes es una rama de la Investigación Operativa que se aplica en el tratamiento de diversos problemas provenientes del campo económico, sociológico y tecnológico. Históricamente está comprobado que el hombre, ante el planteo de un problema, tiende a hacer un diagrama en el que los puntos representan individuos, localidades, actividades, etapas de un proyecto, etc., uniéndolos por medio de líneas que indican una cierta relación existente entre ellos.

D. Konig fue el primero en proponer que tales diagramas recibieran el nombre de *redes*, haciendo un estudio sistemático de sus propiedades.

Con todo rigor, la exposición de dichas propiedades incluiría un número grande de conceptos y teoremas, entre los cuales algunos son relativamente complicados. Dado que nuestro objetivo es presentar este tema de manera que resulte accesible a un gran número de lectores de distinto nivel científico, presentaremos los conceptos básicos del modo más simple posible, mostraremos como usarlos y daremos algunos métodos que pueden ser de uso fructífero en las aplicaciones.

2. *DEFINICION DE RELACION*

Definición: Dados dos conjuntos denotados por A y B, llamaremos *producto cartesiano* de A por B y lo indicaremos A x B al conjunto constituído por todos los pares ordenados tales que su primer componente pertenece a A y su segunda componente pertenece a B.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Por ejemplo si $A = \{u,v\}$; $B = \{1,2,3\}$ resulta

$$A \times B = \{(u,1),(u,2),(u,3),(v,1),(v,2),(v,3)\}$$

Si $A = B$ y ninguno de los conjuntos es vacío se tiene que

$$A \times B \neq B \times A$$

Vale para el producto cartesiano entre conjuntos una propiedad análoga a la que expresa que el producto de dos números es nulo si por lo menos uno de ellos es cero, a saber:

El producto cartesiano A x B es vacío sii uno al menos de los factores A y B es vacío

$$A \times B = \phi \iff A = \phi \vee B = \phi$$

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B llamaremos *relación de* A *en* B a todo subconjunto del producto cartesiano A x B. La indicaremos:

$$R: A \to B$$

Adoptando un diagrama del producto cartesiano como el de la Figura 1, toda relación R de A en B puede representarse de la manera indicada en la Figura 2. En esta figura está implícita la equivalencia

$$x\,R\,y \iff (x,y) \in R$$

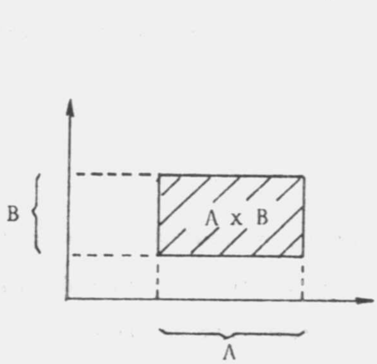


Figura 1

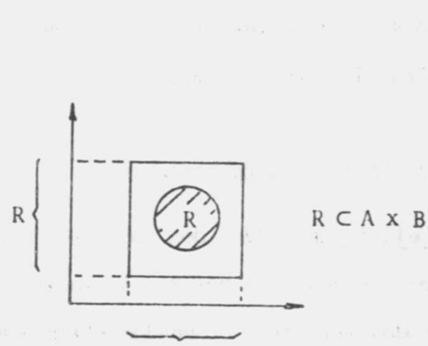


Figura 2

Definición: Sea $R: A \rightarrow B$. Llamaremos *dominio de* R y lo indicaremos D(R) al conjunto de los elementos de A que están relacionados por R con algún elemento de B.

$$D(R) = \{x: x \in A \wedge (x,y) \in R \text{ para } algún\ y \in B\}$$

Definición: Sea $R: A \rightarrow B$. Llamaremos *imagen de* R y la indicaremos Im(R) al conjunto de los elementos $y \in B$ tales que algún $x \in A$ está relacionado por R con y.

$$Im(R) = \{y: y \in B \wedge (x,y) \in R \text{ para } algún\ x \in A\}$$

3. *REPRESENTACION DE RELACIONES*

Las relaciones pueden representarse por: a) diagramas de Euler-Venn; b) diagramas cartesianos; c) diagramas sagitales; d) tablas; e) representación matricial.

En el caso a) los conjuntos se representan por medio de diagramas donde se indica por medio de flechas cuales son los elementos relacionados entre sí.

Por ejemplo: sean A = {a,b,c,d} ; B = {e,f,g,h,i} y sea la relación

$$R = \{(a,i),(b,e),(b,f),(b,g),(c,h),(c,i),(d,f)\}$$

La representación mediante un diagrama de Euler-Venn es la que se indica en la Figura 3.

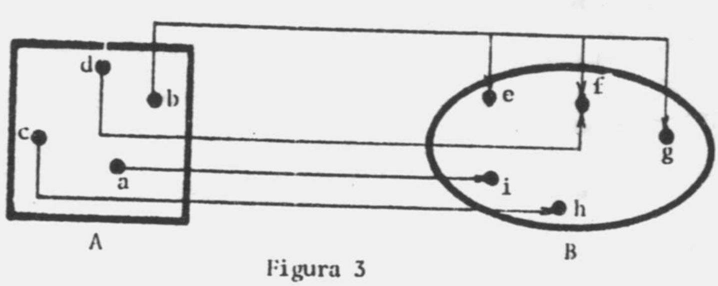


Figura 3

En un diagrama cartesiano, en cambio, se colocan los elementos del primer conjunto sobre un eje horizontal y los del segundo sobre un eje vertical. Se dibuja una cuadrícula con paralelas a dichos ejes por los puntos que representan a los elementos. Se marcan en las intersecciones los elementos que están relacionados entre sí. En nuestro ejemplo sería el diagrama indicado en la Figura 4.

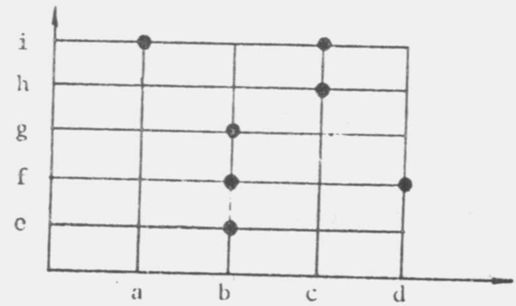


Figura 4

También se puede confeccionar un diagrama sagital o de flechas colocando los elementos del conjunto A y los de B enfrentados con flechas que los unen en el caso de existir relación entre ellos. En el caso del ejemplo considerado, el diagrama sagital se indica en la Figura 5.

La misma relación puede también tabularse en una tabla de doble entrada, tal como puede apreciarse en la Figura 6.

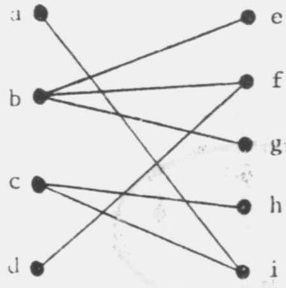


Figura 5

A \ B	e	f	g	h	i
a					(a,i)
b	(b,e)	(b,f)	(b,g)		
c				(c,h)	(c,i)
d		(d,f)			

Figura 6

Finalmente se puede adoptar una representación matricial en la cual los elementos del primer conjunto se disponen verticalmente y los del segundo, horizontalmente. Se indican los pares que están relacionados con un 1 en la intersección de las rectas que corresponden a ambos elementos y un 0 en la intersección de rectas correspondientes a elementos que no están relacionados entre sí. El cuadro así formado se llama *matriz*. Esto es, los elementos a_{ij} (donde el subíndice i indica la fila y j la columna) de la matriz A son tales que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{si } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

La matriz correspondiente a nuestro ejemplo es la que se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *RELACIONES EN UN CONJUNTO*

En la mayoría de las aplicaciones, cuando se trabaja con relaciones, los conjuntos A y B son iguales y entonces se trata de relaciones entre los elementos de un mismo conjunto. Estas relaciones se llaman simplemente "relaciones en el conjunto A".

Definición: Llamaremos *red* al par constituído por un conjunto A y una relación R definida en el conjunto A. Indicaremos la red por:

$$G = (A, R)$$

Ejemplo: Las relaciones de parentesco existentes en un conjunto de individuos definen una red, las conexiones en un circuito eléctrico también definen una red.

Naturalmente una red puede representarse por cualquiera de las maneras indicadas en 3., siendo la manera más habitual un diagrama sagital donde se representan los elementos del conjunto A dispuestos de manera arbitraria sobre el plano y uniendo con líneas con o sin flechas las relaciones entre ellas (según interese o no, indican las flechas el sentido de la relación). La representación matricial de una red es, obviamente, una matriz cuadrada.

Ejemplo: Sea el conjunto constituído por las personas {a,b,c,d,e,f,g} cuyas estaturas son las siguientes:

a: 1,80 m ; b: 1,77 m ; c: 1,78 m ; d: 1,77 m ; e: 1,65 m ; f: 1,70 m ; g: 1,85 m

y la relación R es: "es más bajo que". La red correspondiente se muestra en la Figura 7.

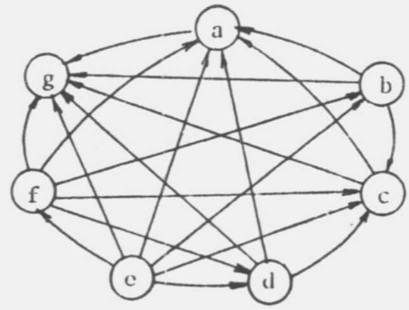


Figura 7

5. *PROPIEDADES DE LAS RELACIONES EN UN CONJUNTO*

a. *Propiedad reflexiva*: una relación R definida en un conjunto A es reflexiva sii todo elemento de A está relacionado con sí mismo, o sea

Reflexividad $\qquad x \, R \, x$ para todo $x \in A$

Representando la relación R con un diagrama sagital, hay un arco cerrado en cada punto, por ejemplo, la relación representada en la Figura 8 es reflexiva. En la representación matricial correspondiente se nota que el hecho de que la relación sea reflexiva implica que los elementos que figuran en la diagonal principal (la que baja de izquierda a derecha) son todos 1

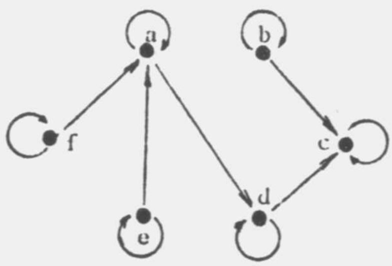


Figura 8

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En un conjunto de personas, la relación "tener el mismo peso que" es reflexiva.

b. *Propiedad simétrica*: una relación R definida en un conjunto A es simétrica sii cada vez que un elemento a está relacionado con un elemento b, el elemento b está relacionado con a. Es decir

$$\text{Simetría} \quad a\,R\,b \Longleftrightarrow b\,R\,a \quad \text{para todo par} \quad a \text{ y } b \in A$$

Ejemplo: La siguiente relación es simétrica. La matriz correspondiente tiene simetría de ceros y unos con respecto a la diagonal principal

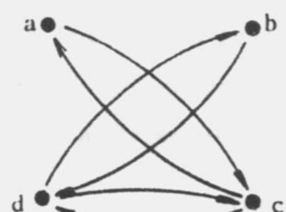


Figura 9

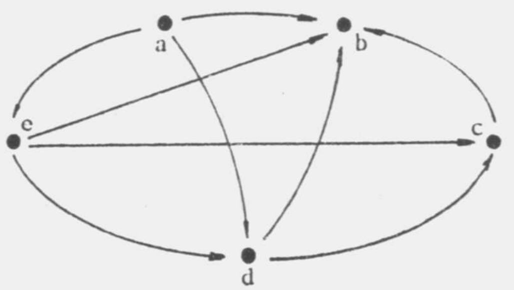
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En conjunto de personas de sexo masculino, la relación "ser hermano de" es simétrica.

c. *Propiedad transitiva*: una relación R definida en un conjunto A es transitiva si cuando un elemento a está relacionado con un elemento b y, a su vez, el elemento b está relacionado con un elemento c, forzosamente a debe estar relacionado con c.

Transitividad $\quad a \; R \; b \wedge b \; R \; c \Rightarrow a \; R \; c$

Ejemplo: la relación de la Figura 10 es transitiva.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 10

En el conjunto de los números naturales N, la relación "ser mayor que" es transitiva.

d. *Propiedad arreflexiva:* Si en una relación R definida en un conjunto A, ningún elemento de A está relacionado con sí mismo, la relación es arreflexiva.

Arreflexividad $\quad a \not R \; a \quad$ para todo $a \in A$

Evidentemente, la relación es arreflexiva si ningún punto tiene un arco cerrado y en la matriz correspondiente no figura ningún 1 sobre la diagonal principal. La relación $x < y$ es arreflexiva en el conjunto de los números reales R.

e. *Propiedad asimétrica:* Una relación R definida en un conjunto A es asimétrica si cuando un elemento a está relacionado con otro b, b no está relacionado con a. Esto es:

Asimetría $\quad a \; R \; b \Rightarrow b \not R \; a$ para todo par $a,b \in A$

En el diagrama sagital, la asimetría implica que si hay un arco que une al elemento a con el b, no puede haber un arco que vaya del b al a. En la matriz correspondiente, no puede haber ningún par de unos ubicados simétricamente respecto a la diagonal principal. Una relación asimétrica debe ser arreflexiva puesto que si fuera reflexiva

$$a \ R \ a \wedge a \ R \ a \Rightarrow a \ R \ a$$

y por ello sería simétrica cuando $b = a$. La relación "ser jefe de" es asimétrica si se admite que no se puede ser jefe de uno mismo.

f. *Propiedad antisimétrica:* Una relación R definida en un conjunto A es antisimétrica cuando un elemento a está relacionado con otro cualquiera b sii a = b.

$$\text{Antisimetría} \quad a \ R \ b \wedge b \ R \ a \Rightarrow a = b$$

En el diagrama sagital no puede haber arcos dobles entre dos puntos cualesquiera pero si puede haber arcos cerrados en cualquiera de sus puntos La relación "a divide a b" definida en el conjunto de los números enteros Z es antisimétrica. También la relación de inclusión entre conjuntos: $a \subseteq B$ es antisimétrica puesto que si $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

6. *RELACIONES DE EQUIVALENCIA*

Definición: Diremos que la relación R que indicaremos con el símbolo $\equiv$, definida en el conjunto A es una *relación de equivalencia* si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

(1)	reflexividad	$x \equiv x$
(2)	simetría	$x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$
(3)	transitividad	$x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$

para todo $x, y\ z \in A$.

Toda relación de equivalencia permite efectuar una *partición* del conjunto A en una familia de subconjuntos $A_i \subset A$ tales que:

a) $A_i \neq \phi$

b) $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$

c) $\bigcup_i A_i = A$

Las clases de la partición se llaman *clases de equivalencia*, es decir, una clase de equivalencia está constituída por todos los elementos de A que son equivalentes a uno dado. Ejemplos de relaciones de equivalencia son la igualdad, el paralelismo entre rectas del plano, tener el mismo grupo sanguíneo en un conjunto de individuos, correr a la misma velocidad en un conjunto de deportistas, etc.

Ejemplo: Sea la relación R definida en el conjunto de los números naturales N

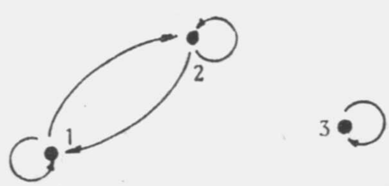
$$x \; R \; y \Rightarrow x \wedge y \text{ son pares } \vee \; x \wedge y \text{ son impares}$$

Esta relación es de equivalencia y determina dos clases de equivalencia en N, el conjunto P de los números pares y el conjunto I de los impares.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y la relación

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$$

Es una relación de equivalencia que se indica mediante el diagrama de la Figura 11.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 11

7. *RELACION DE ORDEN AMPLIO*

Definición: Diremos que la relación R, que indicaremos $\leqslant$, es de *orden amplio* si cumple con las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, esto es:

(1) reflexividad $a \leq a$

(2) antisimetría $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

(3) transitividad $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Ejemplos de relación de orden amplio se tienen en las relaciones "ser mayor o igual que" o "ser menor o igual que" en el conjunto de los números reales; la relación $\subseteq$ entre conjuntos, etc.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ y la red dibujada en la Figura 12.

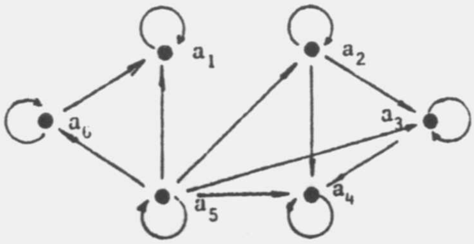


Figura 12

Nótese que en una relación de orden amplio, existe una equivalencia entre aquellos elementos que cumplen con la igualdad pero, además, la relación "ordena" el conjunto.

8. *RELACION DE ORDEN ESTRICTO*

Definición: Diremos que la relación R que indicaremos $<$ es de *orden estricto* si cumple con las propiedades arreflexiva, asimétrica y transitiva, esto es:

(1) arreflexividad $a \not< a$

(2) asimetría $a < b \Rightarrow b \not< a$

(3) transitividad $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Ejemplos de relación de orden estricto son las relaciones "ser menor que" en el conjunto de los números reales, $\subset$ entre conjuntos, "ser más alto que", "ser más gordo que", "ser más joven que" en un conjunto de individuos, etc.

Si R es una relación de orden estricto y hacemos $R \cup \Delta$ donde Δ es el conjunto de unos en la diagonal principal de la matriz de la relación, tenemos una relación de orden amplio y recíprocamente. En el ejemplo de 7., si consideramos la red sin los arcos cerrados en cada punto, tenemos una relación de orden estricto:

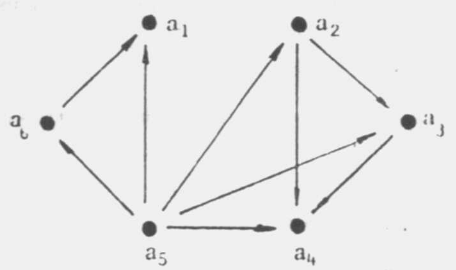


Figura 13

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que la relación de orden estricto no ordena completamente los elementos de un conjunto, salvo que se identifique, como si se tratara de un único elemento, todos los elementos que cumplen con la igualdad.

9. *COMPOSICION DE RELACIONES*

Definición: Sean tres conjuntos A, B y C entre los que se definen las relaciones

$$R \subset A \times B \qquad\qquad S \subset B \times C$$

Llamaremos *composición* de ambas relaciones y la indicaremos $S \circ R$ al conjunto

$$S \circ R = \{(x,z): \exists\, y \in B \wedge (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{-1,0,1\}$; $B = \{1,3\}$; $C = \{0,3/2,5/2\}$ y las relaciones

$$R: x \to x^2 \qquad\qquad S: x \to x/2 + 1$$

La composición $S \circ R = \{(-1,3/2);(1,3/2)\}$

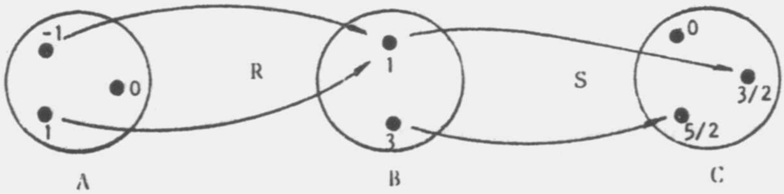


Figura 14

Nota: en general la composición de relaciones no es conmutativa, vale decir: $R \circ S \neq S \circ R$. Si las dos relaciones que se componen son iguales, indicaremos

$$R \circ R = R^2$$

Ejemplo: Si R es la relación "es padre de", obviamente R^2 será la relación "es abuelo de". Si volvemos a componer

$$R^2 \circ R = R^3$$

que será la relación "es bisabuelo de", etc. En ese caso, la red correspondiente es el "árbol genealógico" que se contínua hasta que no haya más descendientes, o lo que es equivalente, hasta que

$$R^k \circ R = \phi$$

10. *CLAUSURA TRANSITIVA*

Dada una relación R, si efectuamos la composición de dicha relación con si misma en forma sucesiva, nos conduce a una sucesión de relaciones $R, R^2, R^3, R^4, \ldots, R^n, \ldots$

Definición: Llamaremos *relación identidad* y la indicaremos R^0 a la siguiente relación

$$x \; R^0 \; y \quad \text{sii} \quad x \text{ es idéntico a } y$$

<u>Definición</u>: Llamaremos *clausura transitiva* de una relación R a la relación:

$$\hat{R} = R^0 \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$

En teoría, podemos seguir efectuando composiciones y uniones de modo que la cantidad de composiciones y uniones podría ser infinita.

<u>Ejemplo</u>: Sea la relación R "ser padre de" y el árbol genealógico siguiente

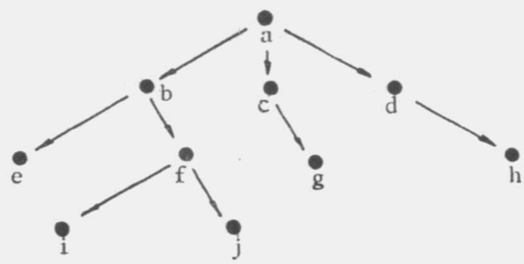


Figura 15

$R^0 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f),(g,g),(h,h),(i,i)\}$

$R^1 = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,e),(b,f),(c,g),(d,h),(f,j),(f,j)\}$

$R^2 = \{(a,e),(a,f),(a,g),(a,b),(b,i),(b,j)\}$

$R^3 = \{(a,i),(a,j)\}$

$R^4 = \phi$

Como puede observarse, en R están todos los pares unidos por un solo arco, en R^2 los pares unidos por dos arcos consecutivos y en R^3 los unidos por tres arcos consecutivos. Esto es, si $x \hat{R} y$ ello implica que existe alguna manera de llegar de x a y.

11. *CONCEPTOS ORIENTADOS EN UNA RED*

Hemos visto que una red no es más que un conjunto con una relación definida entre los elementos del conjunto. Antes de entrar a discutir aplicaciones de esta teoría, presentaremos algunos conceptos importantes para fijar la nomenclatura que usaremos.

<u>Vértices</u>: son los puntos que representan los elementos del conjunto.

arcos: son las líneas orientadas que unen los pares de elementos del conjunto que están relacionados entre sí.

Extremo inicial y extremo final de un arco: vértice del que parte un arco y vértice al que llega.

Arcos adyacentes: arcos que tienen un extremo común y son diferentes.

Subred: red que se obtiene suprimiendo uno o más vértices así como los arcos que de ellos llegan o parten, de la red original.

Camino: sucesión de arcos adyacentes tales que el extremo final de uno coincide con el inicial del siguiente.

Longitud: número de arcos del camino.

Circuito: camino en el cual el vértice inicial coincide con el final.

Bucle: circuito de longitud uno.

En la red de la Figura 16 se ejemplifican estos conceptos

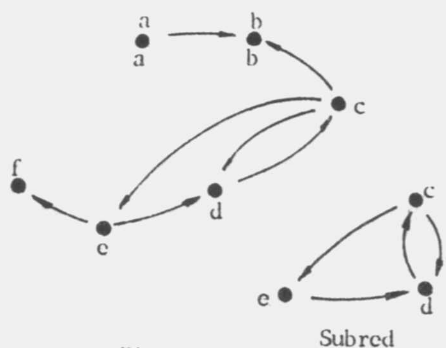


Figura 16

a,b,c,d,e,f: vértices

(a,b)(a,a)(c,b)(c,d)(c,e)(d,c)

(e,d)(e,f): arcos

(a,b) y (a,a) }
(c,d) y (c,e) } arcos adyacentes

(c,ed): camino de longitud 2

(c,e,d,c,b): camino de longitud 4

Definición: Diremos que una red es *fuertemente conexa* si entre dos vértices cualesquiera existe un camino de cualquier longitud que va de uno a otro.

Ejemplo: La red de la Figura 17 es fuertemente conexa. Una *componente fuertemente conexa* es toda subred fuertemente conexa de una red. Por ejemplo en la red de la Figura 18, (a,b,c) y (a,c,d) son dos componentes fuertemente conexas.

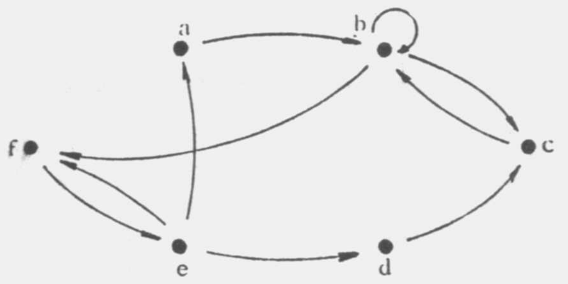


Figura 17

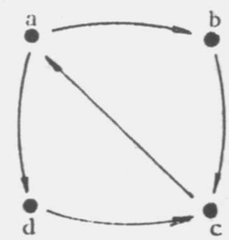


Figura 18

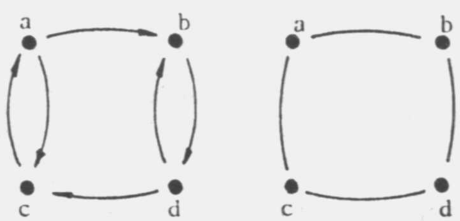
12. *CONCEPTOS NO ORIENTADOS EN UNA RED*

Arista: existe una arista entre dos vértices x,y distintos de la red si existe un arco que va de x a y y/o de y a x.

Cadena: es una sucesión de aristas adyacentes.

Ciclo: es una cadena finita en la que el vértice inicial coincide con el final.

Ejemplo: En la red de la Figura 19 hay 6 arcos pero tan sólo 4 aristas.



(a,b,c) es una cadena pero *no* un camino

(a,b,c,d,a) es un ciclo pero *no* un circuito

Figura 19

Definición: Una red es *conexa* si entre dos vértices cualesquiera x e y distintos entre sí, existe una cadena.

TODA RED FUERTEMENTE CONEXA ES CONEXA PERO LA RECIPROCA NO ES CIERTA

13. *REDES CON CIRCUITOS*

Un problema importante en una red es determinar si existen o no circuitos en ella. Si existe algún circuito debe pertenecer a una componente fuertemente conexa. Entonces, si tomamos dos vértices x e y de un circuito, es decir que $x\ R\ y$ significa que x coincide con y o bien existe un camino de cualquier longitud que va de x a y. Por otra parte, como esto se cumple para cualquier vértice, debe ser $y\ R\ x$.

Introduciremos una nueva relación $\bar{R}$ tal que

$$x\ \bar{R}\ y \quad \text{sii} \quad x\ \hat{R}\ y\ \wedge\ y\ \hat{R}\ x$$

Ejemplo: en la red de la Figura 20, si efectuamos el análisis vértice por vértice llegamos a las siguientes componentes fuertemente conexas: (a,b) y (c,e,d,f).

La relación $\bar{R}$ es una relación de equivalencia puesto que es:

(1) reflexiva ya que todo vértice está en relación con sí mismo por estar incluída en $\hat{R}$ la relación R^0

(2) simétrica puesto que si $x\ \hat{R}\ y \Rightarrow y\ \hat{R}\ x$

(3) transitiva ya que si $x\ \hat{R}\ y\ \wedge\ y\ \hat{R}\ z \Rightarrow x\ \hat{R}\ z$

Las clases de equivalencia son las componentes fuertemente conexas de la red. Cualquier otra componente fuertemente conexa, por ejemplo, (d,e) en la Figura 20 es un subconjunto de una clase de equivalencia.

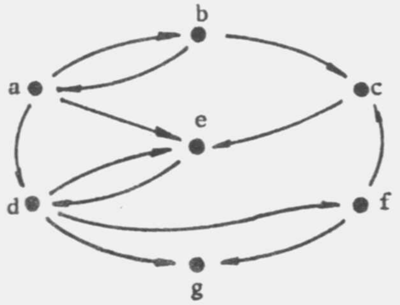


Figura 20

14. *REDES SIN CIRCUITOS*

En este caso no hay simetría pues si existe un camino que va de un vértice x a otro y no puede haber camino de retorno ya que se tendría un circuito. Si introducimos la clausura transitiva $\hat{R}$ en una red sin circuitos, resulta que esta relación es de orden amplio. En efecto $\hat{R}$ es:

(1) reflexiva pues $\hat{R}$ incluye la relación idéntica R^0

(2) antisimétrica ya que si $x \hat{R} y \wedge y \hat{R} x \Rightarrow x = y$

(3) transitiva porque si $x \hat{R} y \wedge y \hat{R} z \Rightarrow x \hat{R} z$

La clausura transitiva $\hat{R}$ nos permite efectuar un ordenamiento de los vértices de la red.

Definición: En una red sin circuitos x es un *ascendiente* de y (o bien y es un *descendiente* de x) si existe un camino que va de x a y.

El ordenamiento de los vértices de la red nos clasifica los vértices en distintos niveles de modo que todos los vértices que estén en el nivel cero N_0 serán ascendientes de los vértices que estén en el primer nivel N_1 y así siguiendo. Si el número de vértices no es muy grande, se puede efectuar el ordenamiento por niveles aliminando los vértices que no tienen ascendientes (aquellos a los que no llega ninguna flecha). Se borran los arcos de los cuales los vértices eliminados son extremos y se procede en forma similar con las subredes que se van obteniendo después de individualizar los elementos de cada nivel. Así por ejemplo, en la red de la Figura 21 el ordenamiento por niveles es el que se indica:

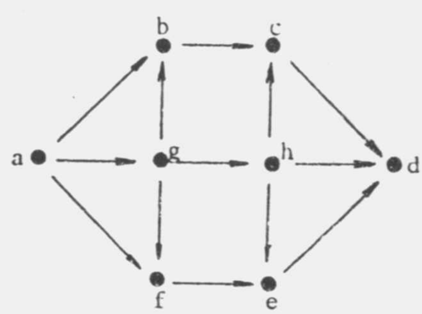
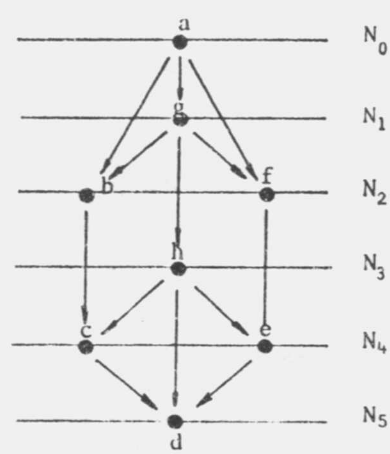


Figura 21



Otro método para ordenar por niveles consiste en usar la matriz asociada a la red. Se comienza borrando las columnas de ceros (elementos que no tienen ningún ascendiente). Estos son los elementos del nivel N_0. Se suprime fila y columna de dicho elemento (arcos que llegan o salen) y se procede en forma similar con las submatrices que se van obteniendo. En el ejemplo de la Figura 21, este método aplicado a la matriz asociada a la relación nos conduce al mismo resultado, como puede verificar el lector.

Cuando la red es más compleja, se puede efectuar el ordenamiento por niveles usando la matriz asociada a la clausura transitiva, como veremos más adelante.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15. *MATRICES BOOLEANAS*

Definición: Llamaremos *matriz booleana* a una matriz cuyos elementos son unos o ceros. Así, la matriz asociada a una red es una matriz booleana. Introduciremos ahora dos operaciones generalizadas, la suma y el producto booleano.

Definición: Llamaremos suma booleana y la indicaremos con $\dot{+}$ a la operación entre ceros y unos definida por

$$1 \dot{+} 1 = 1 \qquad 1 \dot{+} 0 = 1 \qquad 0 \dot{+} 0 = 0 \qquad 0 \dot{+} 1 = 1$$

o, lo que es equivalente, $a \dot{+} b = \text{máx}\,(a,b)$.

Llamaremos *producto booleano* y lo indicaremos $\dot{x}$ a la operación definida por

$$1 \dot{x} 1 = 1 \qquad 1 \dot{x} 0 = 0 \qquad 0 \dot{x} 0 = 0 \qquad 0 \dot{x} 1 = 0$$

o, lo que es equivalente, $a \dot{x} b = \text{mín}\,(a,b)$.

Extenderemos estas operaciones a las matrices definiendo dos operaciones: la operación "o" o suma booleana de matrices y la operación "y" o producto booleano de matrices.

Definición: Dadas las matrices booleanas $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se llama suma booleana a la matriz

$$C = A \dotplus B \qquad \text{tal que} \qquad c_{ij} = a_{ij} \dotplus b_{ij}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = A \dotplus B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que para efectuar la suma booleana de matrices basta ubicar unos en ambas matrices en el mismo lugar para que el resultado dé uno, los restantes elementos son todos nulos.

Definición: Dadas las matrices booleanas $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se llama producto booleano a la matriz

$$D = A \dot{x} B \qquad \text{tal que} \qquad d_{ij} = a_{ij} \dot{x} b_{ij}$$

Ejemplo:

Si hacemos el producto booleano de las matrices anteriores obtenemos:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que para efectuar el producto booleano de matrices, sólo aparecen unos en el resultado cuando hay unos colocados en los lugares correspondientes de ambas matrices. Los restantes son todos nulos.

Finalmente, el producto habitual entre matrices se extiende también a las matrices booleanas. Para ello, el número de columnas del primer factor debe ser igual al de filas del segundo y el producto se efectúa de la misma manera que con matrices cualesquiera, multiplicando filas por columnas, pero haciendo uso de las operaciones booleanas. En el caso de operar con matrices asociadas a una relación, como son cuadradas, para poder multiplicarlas entre sí deben tener la misma dimensión. Al igual que con matrices cualesquiera, el producto de matrices booleanas *no* es conmutativo, salvo en algunos casos especiales.

Ejemplo: el producto $P = A \cdot B$ de las matrices del ejemplo anterior es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que como en la suma booleana basta que uno de los sumandos sea un uno para que el resultado sea uno, basta tener un sólo producto que sea igual a uno (no hace falta seguir haciendo los restantes). Además, como para que un producto booleano sea igual a uno es necesario que ambos factores sean unos, la matriz producto se construye fácilmente colocando unos en los lugares en que figuran en ambas matrices unos.

Al multiplicar una matriz por sí misma se obtiene: $A \cdot A = A$ (caso en que el producto de matrices es conmutativo). La matriz *identidad* será

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } A \cdot I = I \cdot A = A$$

La matriz *cero* es la matriz que sólo tiene ceros y es obvio que:

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$$

16. *MATRIZ DE LA CLAUSURA TRANSITIVA*

Se puede demostrar el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>: Sean dos redes $G = (X, R_1)$ y $H = (X, R_2)$ con matrices asociadas A y B respectivamente. A la suma booleana $A \dot{+} B$ le corresponde la red $(X, R_1 \cup R_2)$ y al producto le corresponde la red $(X, R_2 \circ R_1)$.

<u>Corolario</u>: Si la red $G = (X, R)$ tiene matriz asociada M, a la relación R^2 le corresponde la red (X, M^2), a la relación R^3 le corresponde la red (X, M^3), etc.

A la relación identidad R^0 le corresponde la matriz identidad I. Por lo que antecede, la matriz $\hat{M}$ asociada a la clausura transitiva

$$\hat{R} = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$

se obtiene de la siguiente manera

$$\hat{M} = I \dot{+} M \dot{+} M^2 \dot{+} M^3 \dot{+} \ldots \dot{+} M^n \dot{+} \ldots$$

Esta sucesión de sumas booleanas se simplifica teniendo en cuenta lo siguiente: a) efectuar $I \dot{+} M$ equivale a agregar unos en la diagonal principal de la matriz M; b) efectuar $I \dot{+} M \dot{+} M^2$ es equivalente a hacer $(I \dot{+} M)^2$ como puede apreciarse en el ejemplo que sigue:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I \dot{+} M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I \dot{+} M \dot{+} M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (I \dot{+} M)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) de manera análoga $I \dot{+} M \dot{+} M^2 \dot{+} M^3 = (I \dot{+} M)^3$, etc.; d) si se sigue efectuando esta operación llegará un momento en que la relación R^k será vacía (como en el caso del árbol genealógico) y su matriz asociada la matriz cero. Como la suma booleana de una matriz con la matriz cero da la misma matriz, obtendremos $(I \dot{+} M)^k = (I \dot{+} M)^{k-1}$.

Esta matriz es la matriz $\hat{M}$ asociada a la clausura transitiva $\hat{R}$. Vamos a ver a continuación cómo se usa esta matriz en el análisis de una red. Hay que notar que otro método más sencillo para obtener la matriz $\hat{M}$ consiste en buscar en la red los caminos posibles de cualquier longitud y agregarle la diagonal principal de unos. Obviamente, este método es aplicable si el número de vértices de la red no es muy grande.

17. *DETERMINACION DE COMPONENTES FUERTEMENTE CONEXAS EN UNA RED CON CIRCUITOS*

Dada una red con circuitos, hemos visto que la matriz M asociada a la clausura transitiva R nos indica todos los vértices x,y para los cuales x R y. La matriz *transpuesta* M^* (obtenida cambiando filas por columnas) será la matriz en la que se ha cambiado el sentido de todos los arcos de la red y representa los vértices para los cuales y R x. Si efectuamos la suma booleana $M \dot{+} M^* = M_1$ veremos que en la matriz M_1 hay filas iguales. Las cambiamos de lugar colocándolas una a continuación de la otra, cambiando el nombre del elemento. Permutamos las columnas de modo análogo. Los cuadrados de unos que aparecen son las componentes fuertemente conexas de la red.

Ejemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

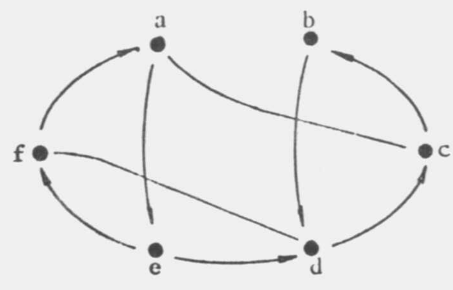


Figura 22

Como el lector puede comprobar resulta: $(I \dot{+} M)^4 = (I \dot{+} M)^3$ y la matriz $\hat{M}$ es

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{M}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las componentes fuertemente conexas resultan ser: (b,c,d) y (a,e,f).

18. *ORDENAMIENTO POR NIVELES EN UNA RED SIN CIRCUITOS*

Dada una red sin circuitos, una vez hallada la matriz M hay que tachar en ella las filas que tienen un solo uno en la diagonal principal. Estos serán los elementos sin descendientes, por lo tanto estarán en el último nivel. Se suprimen fila y columna correspondientes a estos vértices. Queda una submatriz en la cual se procede de manera análoga hasta agotar todos los elementos de la red.

Ejemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

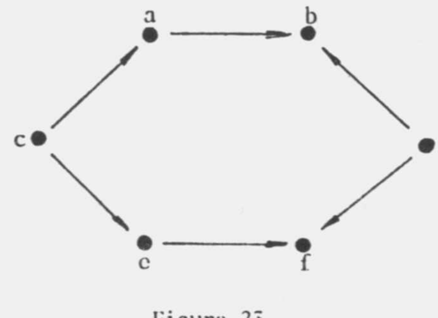


Figura 25

Como puede comprobarse: $(I \dot{+} M)^3 = (I \dot{+} M)^2$ y la matriz $\hat{M}$ resulta:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

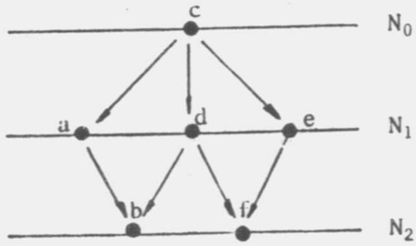


Figura 24

19. *REDES CUALESQUIERA*

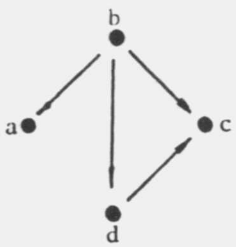
En el caso que la relación que define la red no sea ni de equivalencia ni de orden, se puede proceder de la siguiente manera:

a) Se ordena por niveles, sea borrando, sea con la matriz asociada a la red, sea con la matriz asociada a la clausura transitiva $\hat{M}$.

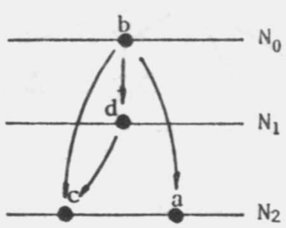
b) Cuando no se puede seguir la operación indicada en a), esto indica la presencia de un circuito. Los vértices de dicho circuito se consideran como un único vértice que se pone en el nivel correspondiente y se sigue el proceso de ordenamiento.

c) Con respecto a los elementos que puedan quedar aislados, tales elementos pueden ser incluídos en el nivel que aparecen o ser llevados al último nivel. Hay que observar que si se hace la convención de mandar los elementos aislados al último nivel, coinciden los resultados borrando y por la matriz de la clausura transitiva. Si, en cambio, ponemos los elementos aislados en el nivel que aparece, coinciden los resultados borrando y por medio de la matriz M asociada a la relación.

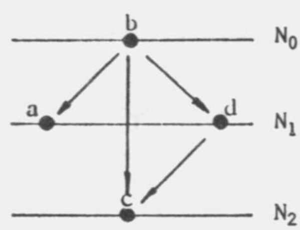
Ejemplo:



a) borrando



b) por la matriz M



c) por la matriz $\hat{M}$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

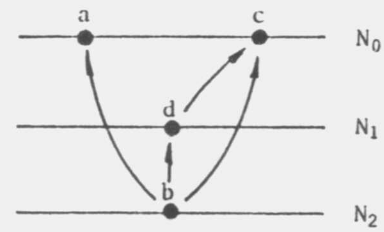


Figura 25

20. *APLICACION A UN SOCIOGRAMA*

El estudio de las estructuras de comunicación o de atracción/rechazo/ liderazgo en un grupo humano, tiene importancia tanto en educación como en psicología laboral. Una de las herramientas para este estudio es el "sociograma" que no es más que la expresión gráfica mediante una red de relaciones entre los distintos constituyentes del grupo. Supongamos que la pregunta que se formula a un conjunto de 12 personas sea del tipo: *"¿A quién elige usted para ...?"*

La relación definida en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ es

$$R = \{(x,y) \in A: \text{"x es elegido por y"}\}$$

Sea

$$R = \{(1,2),(1,5),(1,12),(3,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,11),$$
$$(5,12),(6,5),(7,5),(7,11),(8,5),(8,11),(9,5),(9,11),(10,5),$$
$$(10,6),(11,5),(12,5),(12,1)\}$$

La red correspondiente es la de la Figura 26

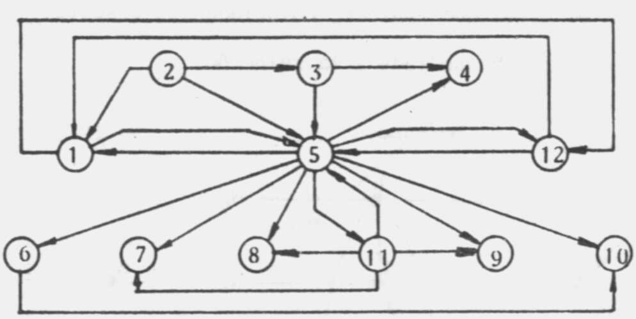


Figura 26

Ordenando por niveles según el procedimiento indicado en 19., tenemos los siguientes niveles si se hace la convención de mandar al último nivel los elementos sueltos:

N_0 : 2 N_1 : 3 N_2 : 1 - 5 - 11 - 12 CIRCUITO N_3 : 6

N_4 : 4 - 7 - 8 - 9 - 10

La red ordenada por niveles adopta el aspecto de la Figura 27

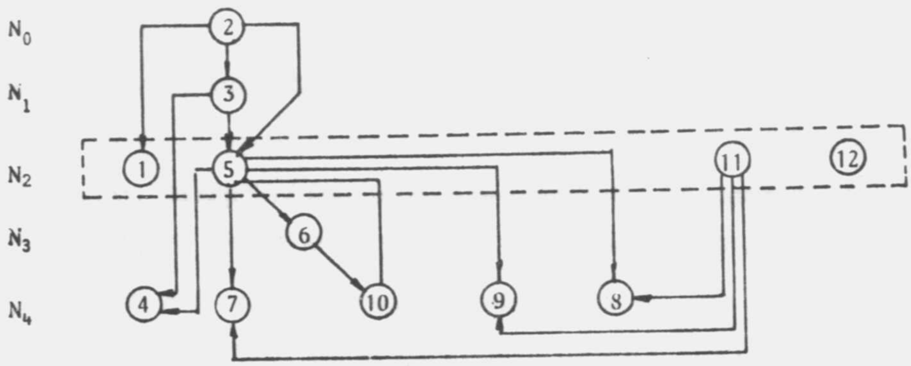


Figura 27

La interpretación de este sociograma indica que el elemento 2(nivel cero) no ha sido elegido por nadie por lo que se puede suponer que es muy independiente y con pocas aptitudes para el trabajo grupo o es un marginado. En el nivel dos se presenta un circuito integrado por 1., 5, 11 y 12, lo que indica una fuerte cohesión con grandes posibilidades de éxito en cualquier tarea grupal, siendo 5 el candidato a líder. En el nivel tres está 6 que sólo eligió a 10, siendo elegido únicamente por 5. Ello indica poca sociabilidad. Finalmente, en el último nivel, están todos los elementos que no eligieron a nadie y sólo fueron elegidos por 2 de los 12 integrantes del grupo. Son indiferentes, aunque tengan una pequeña popularidad.

BIBLIOGRAFIA

[1] Alsina, C. - Trillas, E. - "Lecciones de Algebra y Geometría", Ed. Gili, 1984.

[2] Berge, C. - "Teoría de las redes y sus aplicaciones" CECSA, 1967.

[3] Hall, A. - "Ingeniería de sistemas", CECSA, 1971.

[4] König, D. - "Théorie der Endlichen und Unendliche Graphen". 1936, Akad. Verl. y Nueva York, 1950, Chelsea.

[5] Kaufmann, A. - Précigout, M. - "Curso de Matemáticas nuevas", CECSA. 1970.

[6] Kaufmann, A. - "Métodos y modelos de la Investigación Operativa", tomo II, CECSA, 1982.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad de Buenos Aires.