PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS EN GEOMETRIA

Hugo Cuenya - Marta Bastán

El objeto del siguiente artículo es presentar algunos problemas de máximos y mínimos que surgen en la Geometría Euclideana utilizando el método de "comparación de figuras" para la solución de los mismos.

Dado que los conocimientos requeridos para su resolución son de uso frecuente en la Escuela Media, pensamos que estos problemas pueden ser de interés para los Profesores.

1- *Entre todos los rectángulos de perímetro constante determinar el de área máxima.*

Comenzamos con la siguiente discusión:

Supongamos que nos dan el perímetro igual a 10. Podemos considerar por ejemplo rectángulos de las siguientes dimensiones 2 y 3; $\frac{1}{3}$ y $\frac{14}{3}$; $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$. Al calcular las áreas obtenemos respectivamente 6; $\frac{14}{9}$; $\frac{25}{4}$. Observamos que el área más grande se alcanza en el cuadrado. Probaremos este hecho en general mediante comparación de figuras.

Supongamos tener el rectángulo ABCD como en la Fig. 1 de perímetro P que no sea un cuadrado.

Claramente habrá un lado, digamos $\overline{AB}$, mayor que $\frac{P}{4}$ y otro $\overline{AD}$ menor que $\frac{P}{4}$. En base a esto construímos el cuadrado FGBE de lado $\frac{P}{4}$ como en la figura.

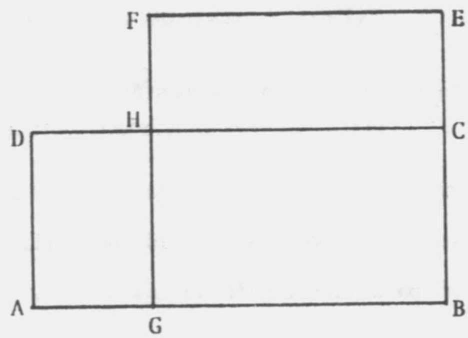


Figura 1

Para conseguir nuestro propósito bastará probar que el área del rectángulo CEFH es mayor que la del ADHG. Notemos que

$\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{P}{2} = \overline{GB} + \overline{BE}$ y como $\overline{AG} + \overline{GB} = \overline{AB}$ y $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE}$ se tiene $\overline{AG} = \overline{CE}$; por otra parte sabemos que $\overline{FE}$ es mayor que $\overline{AD}$ de donde se deduce que el área del CEFH es mayor que la del ADHG.

Observación: Si x e y son las dimensiones de un rectángulo hemos probado que $x.y < (\frac{x+y}{2})^2$, que se puede escribir también $\sqrt{x.y} < \frac{x+y}{2}$.

Esta última desigualdad se suele establecer de la siguiente manera: *"La media geométrica de dos números positivos, es menor o igual que su media aritmética".*

En virtud de que la desigualdad entre la media aritmética y geométrica se mantiene para tres números positivos, podemos afirmar que entre todos los paralelepípedos rectos, donde las sumas de las aristas es constante, el de mayor volumen es el cubo.

2- *Entre todos los triángulos inscriptos en una circunferencia dada el de mayor área es el equilátero.*

Consideremos el triángulo ABC de Fig. 2 no equilátero y observemos que la circunferencia de longitud C queda dividida en tres arcos. Es claro que deben haber dos arcos de longitudes respectivamente mayor y menor que C/3, digamos que estos son BC y AB.

Marquemos el arco CB" con longitud igual al AB a partir de C a lo largo de CB como se muestra en Fig. 3.

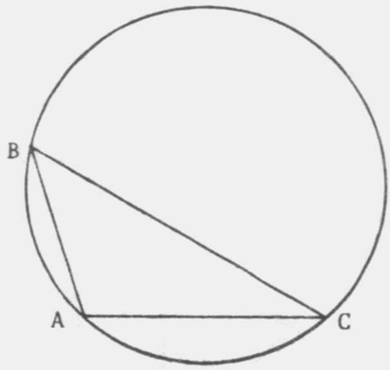


Figura 2

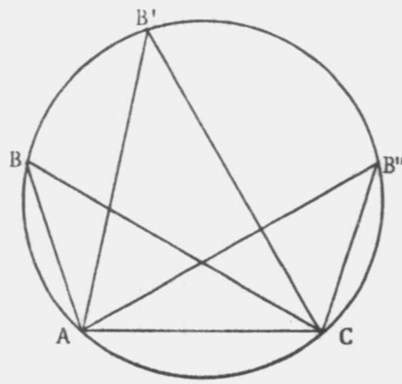


Figura 3

El triángulo CAB" es el simétrico de ACB respecto del diámetro que pasa por el punto medio del arco AC.

Ahora marquemos el arco AB' de longitud C/3 a partir de A en dirección a B. Como la longitud de AB es menor que C/3, B' pasará a B. Sin embargo B' no puede pasar a B" pues si esto ocurriera la longitud de AB' sería mayor que la longitud de AB", que es igual a la de BC por reflexión. Luego como B' está entre B y B" resulta más alto que B respecto a $\overline{AC}$. Como los triángulos ACB y ACB' tienen la misma base $\overline{AC}$ y la altura de ACB es menor que la de ACB' respecto de $\overline{AC}$, ACB tiene menor área que ACB'.

Hemos encontrado así un triángulo inscripto ACB' de área más grande que el ABC y con un lado $\overline{AB'}$ igual al lado de un triángulo equilátero inscripto. Si el triángulo AB'C formado no resultara equilátero repetimos este proceso con AB' en lugar de AC y encontraremos entonces otro triángulo inscripto AB'B''', de área mayor que AB'C; que ahora resulta equilátero.

3- *Entre todos los polígonos de n lados inscriptos en una circunferencia dada, el de mayor área es el regular.*

Notar que esto es una generalización del problema descripto en 2-. En primer lugar observemos que dado cualquier polígono inscripto en una circunferencia podemos inscribir otro polígono que tenga los mismos lados pero en cualquier otro orden. En efecto basta dibujar los radios que llegan a los vértices del polígono y cortar el círculo a lo largo de esos radios. Los sectores que se obtienen pueden ser reordenados de cualquier manera y es claro que el nuevo polígono tiene igual área que el original. Ver Fig. 4.

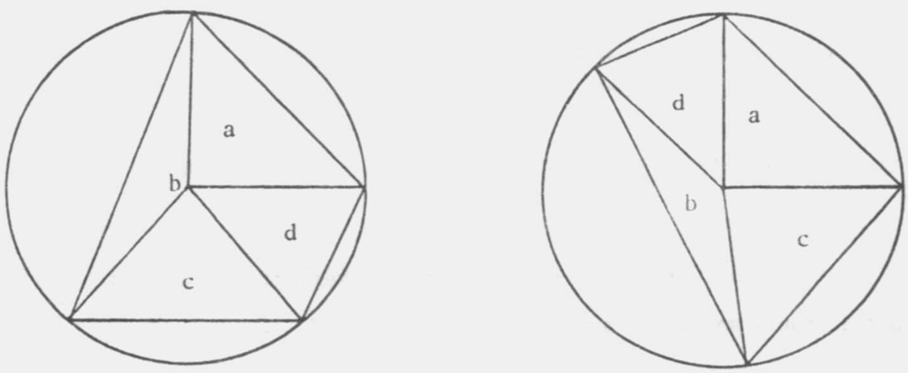


Figura 4

Si el polígono no es regular uno de los n arcos en que el polígono divide a la circunferencia deberá ser menor que C/n y otro mayor que C/n, donde C como antes es la longitud de la circunferencia. En principio no podemos asegurar como en el caso del triángulo que estos sean contiguos; sin embargo, por la observación precedente podemos suponer, sin quitar generalidad, que sean contíguos.

Supongamos que el más pequeño es AB y el más grande es BC, medimos un arco de longitud C/n desde A en la dirección de B y llamaremos a su extremo B', como antes B' estará entre B y su simétrico respecto del diámetro que pasa por el punto medio del arco AC. Entonces el nuevo polígono con B' en lugar de B y conservando los otros vértices tiene un área mayor que la del polígono original. Una ilustración de esto se ve en la Fig. 5.

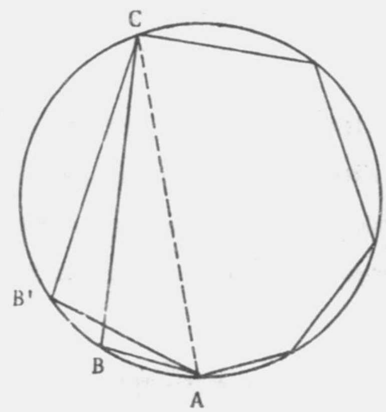


Figura 5

Reiterando este procedimiento a los n-1 lados restantes, previa reordenación de los mismos si fuera necesario, conseguimos un polígono regular inscripto de área mayor que la del original. Otra demostración de este hecho puede verse en el artículo "Sobre el polígono de área máxima inscripto en una circunferencia" L.G. Quintas. Revista de Educación Matemática. Vol. 2 N° 2, 1985.

4- *Entre todos los triángulos circunscriptos a una circunferencia dada el de mayor área es el equilátero.*

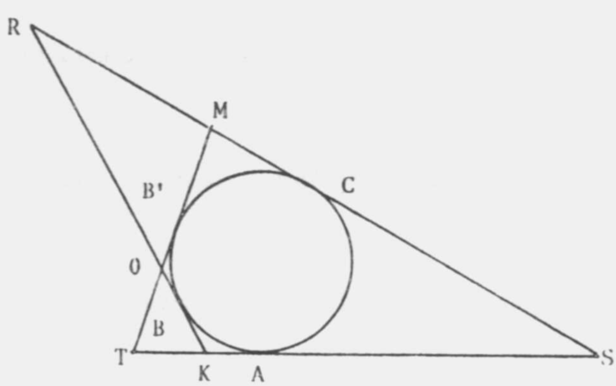


Figura 6

Consideremos el triángulo circunscripto KRS de la Fig. 6 y suponemos los arcos AB, AB' y BC como en 2-. Veamos que el nuevo triángulo circunscripto TSM tangente a la circunferencia en los puntos A, B' y C tiene área menor que el original. Será suficiente ver que el área del triángulo OTK es menor que la del ORM.

Como se cumple que los segmentos de tangentes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior a ella son congruentes y a mayor arco de circunferencia corresponden mayores segmentos tangentes, se tiene $\overline{OB'} = \overline{OB}$ y $\overline{TB'}$ menor que $\overline{BR}$ (por ser el arco AB' menor que BC). Luego $\overline{OT}$ es menor que $\overline{OR}$.

Por otra parte, al ser BC mayor que AB', es B'C mayor que AB. Entonces $\overline{B'M}$ es mayor que $\overline{KB}$, de donde obtenemos que $\overline{OK}$ es menor que $\overline{OM}$.

Finalmente, si consideramos la simetría axial respecto de la recta que une el centro de la circunferencia con 0, observamos que el simétrico del triángulo OTK es parte propia del triángulo ORM.

EJERCICIOS

1- Entre todos los triángulos rectángulos cuya suma de cateto es constante demostrar que el de área máxima es isósceles.

2- Entre todos los triángulos rectángulos de perímetro constante probar que el de hipotenusa mínima es el isósceles.

3- Entre todos los triángulos rectángulos de perímetro constante el de área máxima es el isósceles.

4- Entre todos los paralelogramos de perímetro constante determinar el de área máxima.

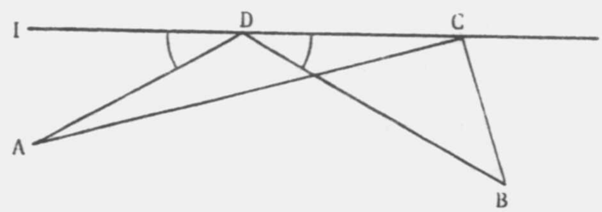
5- Entre todos los rectángulos inscriptos en un cuadrado el de área máxima es un cuadrado.

6- Generalizar el problema 4- a polígonos inscriptos de n lados.

7- Entre todos los polígonos de n lados inscriptos en un sector circular encontrar el de área máxima.

8- De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa constante cuál es el de mayor área.

9- Dados los puntos A y B y la recta I como en Fig.. Probar que la línea quebrada ADB con igual ángulo de incidencia que de reflexión es más corto que cualquier otra ACB.



Departamento de Matemática.
Fac. de Cs. Exactas Fco-Qca y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto.