LA PROBABILIDAD EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

SIMULACION DE JUEGOS

Luis A. Santaló

1. *INTRODUCCION*

La enseñanza de la Probabilidad y de sus aplicaciones, principalmente a la Estadística, es fundamental para la formación del hombre actual. Hay que ir educando, desde los últimos grados de la enseñanza primaria, en el pensar probabilista, coordinándolo con el pensar determinista que ha dominado toda la matemática elemental hasta fechas muy recientes.

Un aspecto importante es la comprobación de que los resultados teóricos obtenidos a través de la combinatoria y del recuento de los casos posibles y favorables, concuerdan muy aproximadamente con los resultados experimentales, obtenidos a través de la simulación de los problemas mediante experiencias adecuadas. Estas experiencias, en los casos de probabilidades finitas a los que nos vamos a referir exclusivamente, se basan en general en el uso de la ruleta, bolilleros, dados o monedas lanzadas al azar. Sin embargo, el uso de estos elementos en la clase, sobre todo en clases relativamente numerosas, puede ser poco práctico y de difícil control. Por esto creemos que la sustitución de ellos por tablas de dígitos al azar, puede ser conveniente y muy instructivo para que los alumnos vayan comprendidos como el azar, que parecería ser la antítesis de toda ley, puede medirse y es posible deducir del mismo, a pesar de su intrínseca indeterminación, resultados suficientemente aproximados y útiles para las aplicaciones prácticas.

2. *TABLAS DE NUMEROS AL AZAR DEL 1 AL 6*

Para fijar las ideas, vamos a limitarnos a problemas que se pueden simu lar mediante el lanzamiento de dados, para lo cual se debe tener una tabla de números al azar del 1 al 6. Cada alumno debe construirse una de estas tablas, pongamos de 400 dígitos, al azar. Un ejemplo es la siguiente:

TABLA DE NUMEROS AL AZAR DEL 1 AL 6

1 1 6 2	5 1 5 5	2 5 3 1	4 1 3 2	1 1 3 3
3 5 6 2	3 6 4 3	3 1 6 2	4 5 3 5	4 1 4 5
4 2 2 4	1 4 4 3	4 6 3 1	4 2 1 1	2 3 3 3
2 4 4 4	6 4 2 4	6 6 3 4	5 2 5 6	6 1 6 2
5 1 5 5	4 2 3 3	1 6 3 1	3 2 4 1	4 6 3 3
3 2 6 6	5 3 3 2	1 2 3 2	5 2 2 4	3 6 2 4
4 2 6 3	4 1 6 4	4 3 2 6	6 4 2 5	1 4 5 1
6 5 6 2	2 2 3 6	4 3 5 3	1 4 1 3	5 2 1 5
5 1 6 1	6 4 4 4	3 4 2 2	3 3 6 1	5 5 1 4
6 1 2 3	4 3 3 4	2 6 5 2	5 3 2 5	2 6 2 3
5 1 1 2	6 1 1 4	6 6 4 3	3 4 5 1	2 5 2 5
6 2 6 1	5 3 1 2	2 6 6 2	4 3 6 3	5 6 3 2
1 2 1 5	1 3 3 4	3 4 2 3	3 4 2 5	5 5 2 5
5 6 2 6	6 4 2 4	2 5 5 1	1 2 5 3	2 2 5 3
1 4 4 2	6 3 2 2	6 1 6 5	3 4 6 3	5 2 6 4
3 2 4 5	6 5 3 5	1 4 3 5	3 1 2 5	4 6 2 6
4 3 4 4	6 3 4 6	6 6 3 5	5 1 5 2	6 1 3 4
6 3 3 6	3 6 4 5	5 1 2 6	2 6 1 5	2 2 3 2
1 4 1 4	4 2 6 6	4 6 4 1	3 6 1 5	2 6 4 3
6 5 3 6	4 1 1 4	5 2 6 1	5 6 4 1	2 6 1 3

Estas Tablas pueden construirse lanzando sucesivamente un dado y anotando los números que salen, o bien pueden copiarse de algún texto de Probabilidades, o bien construirlas mediante una calculadora o una minicomputadora que tengan programas para ello. Lo importante es que cada alumno tenga su propia Tabla, *distinta para todos ellos*, con lo cual el conjunto de la clase funcionará como una Tabla cuyo número de dígitos al azar es el producto de 400 por el número de alumnos y los resultados promedios de los problemas presentarán una gran confiabilidad. Es interesante que los alumnos observen cada vez como, a pesar de usar Tablas diferentes, los resultados difieren siempre poco entre si.

Las Tablas de números al azar del 1 al 6, pueden también servir para simular problemas de monedas lanzadas al azar (sucesos con probabilidad 1/2), tomando los números pares como una cara de la moneda y los impares como la opuesta.

Sobre la manera de construir Tablas de números al azar (del 1 al 6 o del 0 al 9) puede verse el libro de Glaymann-Varga [2] y el artículo de L. Rade [3] que citamos en la Bibliografía.

3. *UN PRIMER EJEMPLO*

Se lanzan 4 dados al azar. Se desea la probabilidad de sacar por lo menos un 6.

Equivale a la probabilidad de sacar por lo menos un 6 lanzando un mismo dado 4 veces. El problema tiene interés histórico, pues figura en una carta de Pascal a Fermat de 1654 y se considera como uno de los orígenes del Cálculo de Probabilidades. Ver, por ejemplo [4] .

La solución teórica es fácil, pues la probabilidad buscada es el complemento de la probabilidad de no sacar ningún 6 en 4 jugadas, y por tanto es igual a $1 - (5/6)^4 = 0{,}517$.

Sin embargo, antes de tener los conocimientos necesarios para este resultado teórico, o bien para observar experimentalmente como la probabilidad se aproxima a la frecuencia, se puede simular el problema con la Tabla de números al azar del 1 al 6. Para ello se suponen grupos de 4 dígitos de la Tabla y se van anotando con "S" a los grupos que contienen por lo menos un 6 y con "N" a los que no contienen ningún 6. En el caso de la Tabla dada, se obtiene de esta manera la siguiente sucesión

S, N, N, N, N, S, S, S, N, N

N, N, S, N, N, N, S, S, S, S

....

Prosiguiendo hasta terminar la Tabla, se tienen simuladas 100 experiencias, de las cuales 54 corresponden a "S". Por tanto, la probabilidad experimental buscada es 0,54, no muy distinta de la teórica. Cada alumno, aplicando su tabla, obtendrá su propio valor experimental de la probabilidad buscada, y promediando los resultados de todos ellos, seguramente que se obtendrá un resultado bastante próximo al verdadero.

En términos de un juego de azar el problema puede enunciarse de la siguiente manera. El jugador debe pagar una cierta cantidad P ("puesta") para intervenir en el juego. Si con 4 dados (ó 4 jugadas con un mismo dado) obtiene por lo menos una vez el 6, recibe de la banca un cierto premio A. Se desdea el valor de la puesta P para que el juego sea "equitativo", es decir para que en un número grande de jugadas, ni el jugador ni la banca resulten beneficiados. Si se juega un número grande N de veces, la banca cobrará NP unidades. Si de las N jugadas, hay n en que sale por lo menos una vez el 6, la banca deberá pagar nA unidades. Para que el juego sea equitativo, debe ser NP = nA y como n/N tiende, por definición, a la probabilidad buscada p, resulta que la puesta debe ser igual a esta probabilidad por el valor del premio. Por ejemplo, si es A = 10, la puesta debe valer 5,15 unidades. La puesta "experimental", aplicando nuestra Tabla, para quien no supiera el resultado teórico, sería 5,4.

4. *LA PROBABILIDAD Y LOS JUEGOS DE AZAR*

Vamos a generalizar el juego de azar anterior. Un juego de azar consta de una banca y un jugador que, pagando una puesta P, por un mecanismo al azar, puede ganar distintos premios de $a_1, a_2, \ldots, a_m$ unidades con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Conocidos los premios a_i y las probabilidades respectivas p_i de ganarlos, se desea calcular la puesta P para que el juego sea equitativo.

Supongamos N jugadas. La banca habrá cobrado NP unidades. Si de ellas sale n_1 veces el premio a_1, n_2 veces el premio a_2, etc., la cantidad desembolsada por la banca será $n_1a_1+n_2a_2+\ldots+n_ma_m$. El juego será equitativo, si para N grande, se verifica

(1) $$N\,P = n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_ma_m$$

y como $n_i/N = p_i$ (considerando la igualdad como su límite para N tendiendo a infinito), resulta

(2) $$P = p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_ma_m \; .$$

El segundo miembro de esta igualdad es la llamada "esperanza matemática" de los premios o ganancias a_i. Por tanto se puede enunciar:

La puesta, en un juego de azar equitativo, debe ser igual a la esperanza matemática de las posibles ganancias.

En el ejemplo del número anterior, como hay un solo premio $a_1 = A$ (caso de sacar por lo menos una vez el 6), la puesta debe valer $P = pA$, como hemos visto.

Un ejemplo inmediato es el siguiente. Se lanza un dado y se conviene en que la banca pagará al jugador tantas unidades como indique el número que salga. ¿Cuál debe ser el valor de la puesta?.

Como la probabilidad de salir un número cualquiera es siempre 1/6, la fórmula (2) nos dice que el valor teórico de la puesta es

$$P = \frac{1}{6}\,(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5 \; .$$

Veamos como se puede obtener este resultado por simulación usando la Tabla dada. Según (1), para que el juego sea equitativo, la puesta debe ser igual a la media aritmética de los números obtenidos con el dado en un número grande de jugadas. Si se consideran los 100 primeros números de la Tabla, la media aritmética resulta 3,32. Si se consideran los 200 primeros números, la media aritmética resulta 3,39. Con los 300 primeros números el resultado es 3,45 y con toda la Tabla resulta 3,59. Como vemos, son valores bastante aproximados al teórico. Hay que comparar los resultados de cada alumno con su Tabla y promediar al final los resultados de todos ellos. Con bastante seguridad que el resultado no diferirá mucho del valor teórico 3,5.

5. *EJEMPLOS*

5.1. *Dos dados y la suma de los resultados*

El juego consiste en que el jugador lanza 2 dados y la banca le paga la suma de los números que salgan. Suponiendo el juego equitativo, se desea saber el valor de la puesta.

La solución teórica es fácil, pues siendo la esperanza matemática de la suma igual a la suma de las esperanzas matemáticas, según el resultado último, será $P = 3,5 + 3,5 = 7$ unidades.

Sin embargo, antes de estar en condiciones de entender el resultado teórico, los alumnos pueden ser capaces de simular el problema con su Tabla y obtener un resultado bastante aproximado.

Para ello se consideran las sumas de los sucesivos pares de números de la Tabla, obteniéndose, para nuestra Tabla, la sucesión

2, 8, 6, 10, 7, 4, 5, 5, 2, 6

8, 8, 9, 7, 4, 8, 9, 8, 5, 9

....

Tomando los 100 primeros pares, la suma total resulta 680, de manera que la media aritmética, igual al valor experimental de la puesta, resulta $P_{exp} = 6,80$, valor bastante aproximado al teórico.

Naturalmente que la aproximación no es siempre tan buena, y es interesante comparar los resultados obtenidos por los alumnos, para que observen como, a pesar de usar Tablas diferentes, los resultados son bastante coincidentes. Si en vez de 100 pruebas, se simula la experiencia con todos los pares de la Tabla, probablemente se obtendrá un resultado mejor y promediando con los resultados de todos los alumnos la probabilidad de que ello ocurra será todavía mayor. El cálculo del número de pruebas que hay que hacer para tener un valor aproximado hasta un cierto tanto por ciento del valor verdadero, con una probabilidad dada, es un problema fundamental del Cálculo de Probabilidades, pero no facil ni tal vez posible al nivel secundario, ver, por ejemplo [4] . No pretendemos dar a los alumnos resultados tan finos, nos conformamos con que vean como el azar puede simularse, llegando a resultados bastante aproximados.

Una variante es el juego de lanzar un solo dado y recibir como premio el cuadrado del número resultante. La puesta teórica o esperanza matemática de los cuadrados, es

$$P = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = 15,16 \tag{3}$$

Para simular este juego con la Tabla, hay que hallar el valor medio de los cuadrados de los números de la misma. Procediendo con toda la Tabla, la puesta experimental resulta 13,80 no muy distinto del valor verdadero, pero tampoco demasiado aproximado. Viendo el valor obtenido por cada alumno y promediando los resultados es muy probable que se obtenga un resultado mejor.

5.2. *Dos dados y el producto de los resultados*

El juego consiste en lanzar dos dados y recibir como premio el producto de los números resultantes. Se desea el valor de la puesta para que el juego sea equitativo.

Para la solución teórica, se observa que por tratarse de variables aleatorias independientes, la esperanza del producto es igual al producto de las esperanzas, y por tanto $P = (3,5)^2 = 12,25$.

Para simular el problema y resolverlo experimentalmente, se consideran los productos sucesivos de los pares de los números de la Tabla, a saber

1, 12, 5, 25, 10, 3, 4, 6, 1, 9

15, 12, 18, 12, 3, 12, 20, 15, 4, 20

....

prosiguiendo hasta los 100 primeros pares (200 números de la Tabla), se obtiene la suma total 1112 y por tanto, la media aritmética, que es igual a la puesta experimental, resulta $P_{exp} = 11,12$.

Hay que comparar con lo que obtiene cada alumno con su tabla y hallar la media aritmética de todos los resultados.

5.3. *Dos iguales sobre tres*

Se lanzan 3 dados simultáneamente. Si salen 2 iguales (el tercero puede ser igual o no) se cobra un premio A. Si los tres dados salen diferentes, no se gana nada. Se desea el valor de la puesta para que el juego sea equitativo.

Veamos primero la solución experimental con la Tabla dada. Se dividen los números de la Tabla en grupos de 3 y se cuenta el número de ternas en las que se repite un mismo número. Dividiendo por el número total de ternas consideradas, se tendrá la probabilidad experimental P_{exp} de sacar dos dados iguales por lo menos y la puesta buscada deberá ser AP_{exp}. En la Tabla dada, considerando los 360 primeros números, se tienen 120 ternas (ver el problema siguiente), de las cuales hay 49 con dos o tres números iguales. Por tanto será $P_{exp} = 49/120 = 0,408$. La puesta experimental deberá ser 0,408 A unidades. Haciendo cada alumno lo mismo con su Tabla se tendrán otros valores y el promedio de todos ellos será un valor bastante confiable.

En los problemas usuales de la matemática tradicional, todos los alumnos deben obtener siempre el mismo resultado, por ser este único y bien determinado (pensar determinista). Con los ejemplos que estamos dando, cada alumno obtiene "su" resultado, que será una cierta aproximación del valor verdadero, al que nos acercaremos más promediando los resultados de toda la clase (pensar probabilista).

La solución teórica del problema es la siguiente. La probabilidad de sacar dos o más veces un determinado número con tres dados (distribución binomial, ver por ejemplo [4]), es

$$(4) \qquad \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{2}{27}$$

y la probabilidad de sacar dos o tres veces cualquiera de los números del 1 al 6, será 12/27 = 0,444. Por tanto, la puesta teórica será P = 0,444 A. Por ejemplo, si A = 10, la puesta experimental resulta 4,08 y la teórica 4,44.

5.4. *Variante de dos iguales sobre tres*

Se lanzan tres dados. Si salen dos o más iguales, se cobra de premio tantas unidades como indica el número repetido. Si los tres números son diferentes no se cobra nada (se pierde la puesta). Se desea el valor de la puesta para que el juego sea equitativo.

Como en el ejemplo anterior, dividimos la Tabla de números al azar del 1 al 6 en grupos de 3, que simularán cada jugada. Si sale un número repetido n, anotamos n(n = 1,2,..., 6). Si los tres números son distintos anotamos 0. A partir de la Tabla dada se obtiene la sucesión

1	0	5	0	0	1	3	0	0	3	0	5	4	0	0	4	0	0	1	3
4	4	0	0	5	6	0	5	0	0	3	0	0	3	6	3	0	2	0	0
0	0	4	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	5	6	4	0	3	0	0
0	3	0	0	0	0	0	1	1	6	3	0	2	0	0	0	6	0	0	0
1	0	3	0	0	5	5	6	0	0	1	0	2	0	0	2	6	0	0	0
0	5	0	0	0	0	0	4	0	6	5	0	0	0	3	0	0	6	0	2

de donde, para un total de 120 jugadas (360 números de la Tabla) se tienen los siguientes resultados experimentales

número	1	1	3	4	5	6
veces que ha salido más de 2 veces	7	6	11	7	9	9
Premios totales	7	12	33	28	45	54

Como la suma de los premios, en 120 jugadas, es 179, la puesta experimental resulta

$$P_{exp} = \frac{179}{120} = 1,49 \quad .$$

El valor teórico de la puesta, igual a la esperanza matemática de las posibles ganancias, será, aplicando (4) del ejemplo anterior

$$P = (2/27)(1+2+3+4+5+6) = 42/27 = 1,55$$

valor no muy distinto del anterior. Será interesante comparar con los resultados de cada alumno con su propia Tabla.

5.5. *Apuesta al mayor*

Se lanzan dos dados y se recibe de premio el mayor de los números resultantes. Se desea el valor de la puesta para que el juego sea equitativo.

Para simular el juego, tomamos los pares de la Tabla de números al azar. El número mayor de cada par, resulta ser, sucesivamente

1 6 5 5 5 3 4 3 1 3

5 6 6 4 3 6 5 5 4 5

....

y así prosiguiendo hasta los 100 primeros pares resulta

número	1	2	3	4	5	6
veces que aparece	3	3	18	27	22	27

Por tanto, la puesta experimental en estas 100 jugadas y con las Tablas dadas, vale

$$P_{exp} = (3.1 + 3.2 + 18.3 + 27.4 + 22.5 + 27.6)/100 = 4,43$$

La puesta teórica puede hallarse contando todos los casos en que el número mayor es 1,2,..., 6 y dividiendo por el número total de casos posibles, que es 36. Se obtienen así las probabilidades

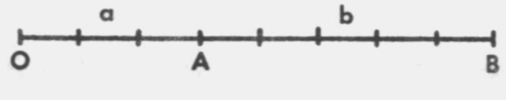
$p_1 = 0,026$ $p_2 = 0,083$ $p_3 = 0,139$ $p_4 = 0,194$ $p_5 = 0,25$ $p_6 = 0,305$

Por tanto el valor teórico de la puesta pedida es

$$P = (0,027.1 + 0,083.2 + 0,139.3 + 0,194.4 + 0,25.5 + 0,305.6) = 4,466$$

5.6. *Camino al azar*

Supongamos sobre la parte positiva del eje x señalados los puntos 0 (origen), A (de abscisa a unidades enteras), B (de abscisa a+b unidades), de manera que la distancia de A a B es de b unidades.



Supongamos que se lanza una moneda y si sale cara A avanza una unidad hacia la derecha y si sale ceca retrocede una unidad hacia la izquierda. Cuando A llega a B o a 0, la experiencia termina, por suponer que en 0 y en B hay barreras que absorben el punto A. Se trata de un problema clásico llamado del "camino al azar" para el cual el Cálculo de Probabilidades demuestra que la probabilidad de que A sea absorbido por B es

$$p_1(A) = a/(a + b)$$

y la probabilidad de que sea absorbido por 0 es el complemento

$$p_0(A) = b/(a + b).$$

Ver, por ejemplo Feller [1, pág. 284] o Glaymann-Varga [2, pág. 141].

La demostración de estas fórmulas no es fácil al nivel de enseñanza media, pero pueden ser útiles para el profesor como orientación de los resultados que obtendrán los alumnos por simulación mediante su Tabla de números al azar en casos concretos.

Supongamos por ejemplo, el caso $a = 3$, $b = 5$. Podemos utilizar la Tabla de los números al azar del 1 al 6, con el convenio de que los números pares representan avanzar una unidad y los impares retroceder una unidad. Asignando el valor +1 a los primeros y -1 a los segundos, la posición de A a partir de $a = 3$, para los 7 primeros números de la Tabla, será

$$3 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

Es decir, en esta primera experiencia A ha sido absorbido por 0. Empezando de nuevo, con los números de la Tabla a partir del séptimo, hasta llegar a 0 o a 8, tenemos la sucesión

$$3 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

o sea, la segunda experiencia nos da nuevamente que A es absorbido por 0. Prosiguiendo con la Tabla para una tercera experiencia obtenemos

$$3 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

Procediendo sucesivamente hasta terminar con la Tabla, vemos que son posibles 24 experiencias (una de ellas con 73 pasos), de las cuales 13 corresponden a casos en que A es absorbido por 0 y las restantes 11 a casos en que el punto A es absorbido por B. Las probabilidades experimentales respectivas son, por tanto,

$$p_{1exp} = 11/24 = 0,46 \quad , \quad p_{0exp} = 13/24 = 0,54$$

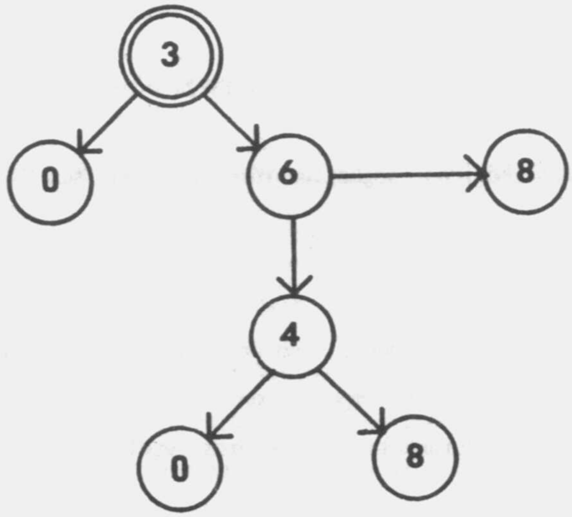
Las probabilidades teóricas, según las fórmulas dadas son

$$p_1 = 3/8 = 0,375 \quad , \quad p_0 = 5/8 = 0,625$$

La aproximación no es muy buena, debido a que la Tabla sólo permite simular 24 experiencias. Hay que comparar con los resultados de los alumnos. El promedio de todos seguramente dará mejores resultados (más de acuerdo con los teóricos).

En términos de juego de azar, el problema precedente se puede enunciar así: un jugador A dispone de un cierto capital de a unidades y va a jugar con la banca a cara y ceca (o a pares e impares con un dado) unidad por unidad, con el convenio de que el juego termina cuando el jugador ha perdido su capital (ha llegado a 0) o bien ha ganado "exactamente" b unidades (al llegar a B). Se desea saber el valor de la puesta para que el juego sea equitativo. Como la posible ganancia es b y la probabilidad de ganarla es $p_1 = a/(a+b)$, la puesta teórica es $P = ab/(a+b)$. En el caso anterior, $a = 3$, $b = 5$, la puesta debe ser $P = 15/8 = 1,875$.

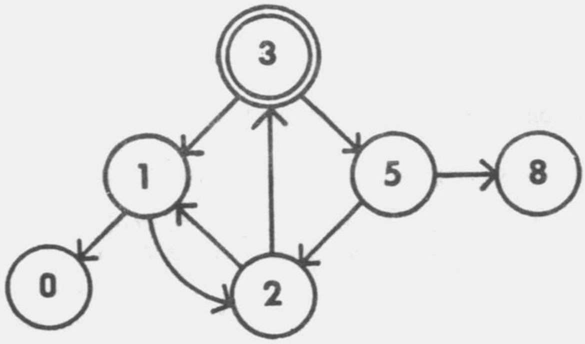
El problema es interesante porque presenta muchas variantes. Supongamos, para fijar las ideas, el mismo caso anterior de un jugador A que dispone de 3 unidades y quiere jugar hasta perderlas todas o ganar "exactamente" 5 unidades. Una manera es la del "camino al azar" que hemos descripto, que consiste en apostar cada vez una sola unidad. Pero cabe la duda de si sacará ventaja si utiliza otras estrategias. Por ejemplo, puede aplicar la regla de apostar cada vez el máximo posible dentro de las reglas del juego (no exceder a la posible ganancia, en este caso 5). El esquema del juego es entonces el siguiente



Es decir, en la primera jugada se apuestan las 3 unidades disponibles. Si se pierde, ya terminó el partido. Si se gana se tendrán 6 unidades, de las cuales se apuestan 2 (pues no se puede pasar de 8). Si se gana se tendrán 8 unidades (se habrán ganado 5) y el juego termina. Si se pierde quedarán al jugador 4 unidades, que apostará integramente. Si gana tendrá las 8 unidades deseadas y si pierde habrá perdido todo. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?. Ella debe ser la misma de antes, pues lo que se arriesga y lo posible de ganar son los mismos y el mecanismo de azar es también, cada vez, la alternativa de ganar o perder con probabilidades 1/2. Para la comprobación de que la probabilidad es la misma 3/8 de antes, basta ver el esquema y observar que para llegar al primer 8 hay que ganar dos veces consecutivas (probabilidad 1/4) y para llegar al segundo 8 hay que seguir la cadena 3-6-4-8, cada paso con probabilidad 1/2, en total con probabilidad 1/8. Luego la probabilidad de llegar a 8 será la suma

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad .$$

Este hecho curioso de que la probabilidad de ganar, y por lo tanto la puesta, no depende de la estrategia seguida, da lugar a muchos ejercicios, a veces no fáciles, pero de los que se sabe de antemano el resultado aplicando la fórmula simple del camino al azar, que corresponde como vimos al caso de apostar cada vez una sola unidad. Veamos, por ejemplo, la estrategia del siguiente esquema



Para llegar al 8 con esta estrategia, se tienen varios caminos, a saber:

a) Camino directo 3-5-8, con probabilidad 1/4.

b) Camino 3-5-2-3 y empezar de nuevo. Si la probabilidad buscada es p, la de este camino será p/8.

c) Camino 3-5-(2-1-2)-3 y empezar de nuevo. La probabilidad es 1/32. Camino 3-5-$(2\text{-}1\text{-}2)^2$ - 3, que vuelve al comienzo con probabilidad $p/4^2 8$. Como el circuito 2-1-2 puede repetirse cualquier número de veces, tenemos la probabilidad conjunta

$$\frac{p}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right)$$

d) Camino 3-1-2-3 y empezar de nuevo: probabilidad p/8.

e) Caminos 3-$(1\text{-}2\text{-}1)^n$ - 2-3, donde $(1\text{-}2\text{-}1)^n$ indica que el ciclo 1-2-1 se repite n veces, número que puede ser cualquiera. Se vuelve al origen con probabilidad $(p/8)(1/4)^n$. La suma de estas probabilidades para

$n = 1, 2, \ldots$ es

$$\frac{p}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right).$$

La suma de las probabilidades de los casos a), b), c), d), e) debe ser la probabilidad total buscada p . Por tanto se tiene la ecuación

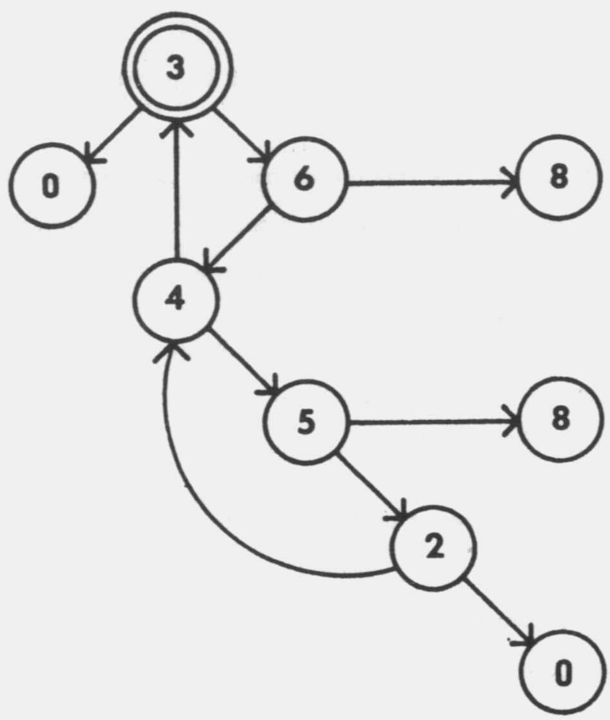
$$\frac{1}{4} + \frac{p}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) + \frac{p}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = 0$$

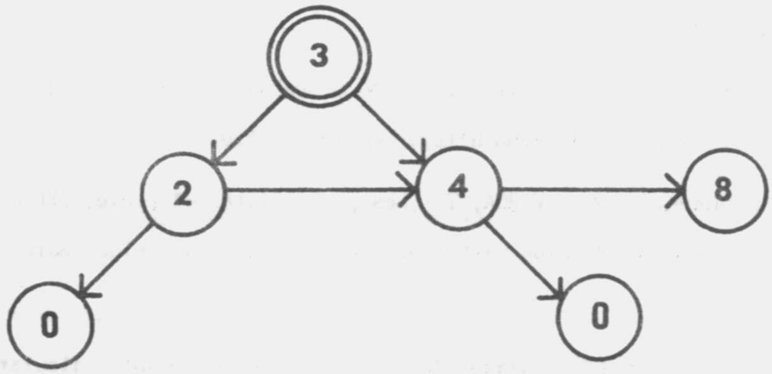
La progresión geométrica de los paréntesis tiene por suma 4/3 y por tanto se tiene

$$\frac{1}{4} + \frac{p}{6} + \frac{p}{6} = p \text{ , de donde } \quad p = 3/8 \text{ ,}$$

como debía ser.

Se pueden dar otras muchas estrategias por ejemplo las de los esquemas





Es un instructivo ejercicio buscar más estrategias posibles y constatar que siempre la probabilidad de ganar (llegar a 8 sin pasarse) es siempre igual a 3/8. Es decir, variando la estrategia se puede alargar la duración del juego, pero no se puede modificar la probabilidad de ganar. La puesta debe ser siempre 15/8 = 1,875 cualquiera que sea la estrategia seguida por el jugador. Naturalmente, que si en vez de a = 3 , b = 5 se toman otros pares de valores inciales se tendrán otros muchos esquemas posibles, útiles para practicar el cálculo teórico de probabilidades. La simulación con Tablas de números al azar, es en general engorrosa, sobre todo en los casos que aparecen ciclos que pueden repetirse indefinidamente, aunque la probabilidad de ello es cada vez menor, como se ve claro en los ejemplos anteriores.

Sobre la didáctica y el aprendizaje de las probabilidades en los niveles elemental y medio, se conoce poco. La búsqueda de ejemplos y problemas que interesen a los alumnos y permitan el desarrollo y comprensión de las ideas fundamentales antes de llegar a la teoría general, debe ser una preocupación de todos los docentes. Tal vez los ejemplos dados y otros muchos que pueden darse con pequeñas variantes, puedan ayudar a ello.

BIBLIOGRAFIA

[1] FELLER, W. An Introduction to probability Theory and its Applications, Vol. 1, John Wiley, New York, 1950.

[2] GLAYMANN, M. - VARGA, T. Les probabilités a l'ecole, CEDIC, 1973. Existe traducción castellana por la Editorial Teide, Barcelona, España.

[3] RADE, LENNART. Random digits and the programmable calculator, artículo del libro "Teaching Statistics and Probability" National Council of Teachers of Mathematics, 1981 Yearbook, 1906 Association Drive, Reston, Virginia, U.S.A. 1981.

[4] SANTALO, L.A. Probabilidad e Inferencia Estadística, Monografía N° 11, Serie Matemática, Organización de los Estados Americanos, OEA, Washington D.C., U.S.A. 1970.