FORMULA DE EULER

Graciela S. Birman

Dado un triángulo cualquiera siempre podemos determinar dos circunferencias relacionadas con él: la *circunscripta* y la *inscripta*. La fórmula de Euler nos da la relación que existe entre los radios de dichas circunferencias.

A fin de obtener esta propiedad, pasemos a enunciar los elementos y propiedades que necesitaremos, seguramente bien conocidos.

1-*Definiciones y propiedades*

En un triángulo ABC se llama:

mediana al segmento interior al triángulo que une el punto medio de cada lado con su vértice opuesto;

altura al segmento que une cada vértice perpendicularmente con el lado opuesto;

bisectriz de un ángulo de un triángulo al segmento que equidista de los lados del ángulo;

mediatriz de un lado de un triángulo a la semirrecta perpendicular a dicho lado en el punto medio.

Las medianas de un triángulo son concurrentes, es decir, se intersectan en un punto. Las alturas, bisectrices y mediatrices tienen la misma propiedad.

Definición 1: El punto D de concurrencia de las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo ABC es llamado *centro de inscripción* del triángulo ABC.

Si tomamos una circunferencia inscripta en dicho triángulo, su centro debe ser el punto D; esto motiva su nombre. Siguiendo la misma idea tenemos

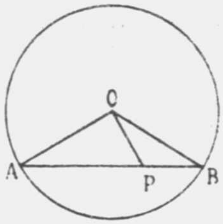
<u>*Definición 2*</u>: El punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo ABC es llamado centro de circunscripción de un triángulo.

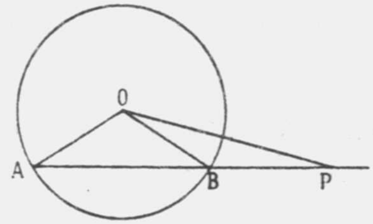
El centro de circunscripción de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscripta, es decir, que pasa por los vértices de dicho triángulo.

<u>*Proposición 1*</u>: Sea C(o,r) una circunferencia de centro o y radio r; sean A y B dos puntos de la circunferencia. Sea P un punto colineal con A y B. Entonces en magnitud y signo se cumple:

$$PA.PB = PO^2 - r^2$$

<u>*Demostración*</u>: Es fácil ver que debemos tener presente dos posibles casos que se representan en las siguientes figuras:





Ahora ha aparecido el triángulo AOB y recordando el artículo" Sobre segmentos interiores de un triángulo", publicado anteriormente, vemos que OP es una *ceviana*. En el artículo mencionado se muestra la fórmula de la ceviana, que aplicada al caso que nos ocupa queda

$$OP^2 = \frac{AP}{AB} \cdot r^2 + \frac{PB}{AB} \cdot r^2 - AP.PB$$

Reemplazando

$$PO^2 = r^2\ (AP + PB) + PA.PB = r^2 + PA.PB$$

como habíamos enunciado.

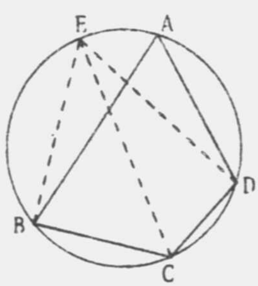
<u>*Ejercicio 1*</u>: Sean CD y AB cuerdas de una circunferencia que se intersectan en un punto P. Probar que

$$AP.PB = CP.PD$$

<u>*Ejercicio 2*</u>: ¿Vale la afirmación del ejercicio 1 si se cambia cuerda por secante?

<u>*Proposición 2*</u>: Sea BAD un ángulo inscripto en una circunferencia. Sea C un punto de la circunferencia perteneciente al arco BD. Entonces AC bisecta el ángulo BAD si y sólo si BC = CD

<u>*Demostración*</u>: Supongamos primeramente que AC bisecta el ángulo BAD. Sea CE un diámetro que pasa por C. Tenemos que



$\measuredangle\, BAC = \measuredangle\, BEC$ y

$\measuredangle\, CAD = \measuredangle\, CED$ por oponerse a igual arco. Luego,

$\measuredangle\, BEC = \measuredangle\, CED$

También,

$\measuredangle\, EBC = \measuredangle\, EDC = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto los triángulos EBC y EDC son congruentes y BC = CD.

Recíprocamente, si BC = CD nuevamente los triángulos EBC y EDC son congruentes y los ángulos

$\measuredangle\, BEC = \measuredangle\, CED$ lo que implica

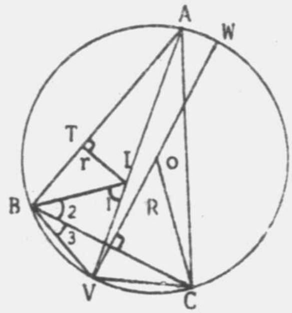
$\measuredangle\, BAC = \measuredangle\, CAD$.

2 - <u>*Fórmula de Euler*</u>.

Sea ABC un triángulo dado. Sean R el radio de la circunferencia circunscripta y d la distancia entre los centros de dichas circunferencias. Entonces

$$d^2 = R(R-2r)$$

Demostración: Llamemos I al centro de la circunferencia inscripta y O al de la circunscripta. Sea V la intersección de la bisectriz AI con la circunferencia circunscripta y VW uno de sus diámetros. Por la proposición 2 $\measuredangle BWV = \measuredangle BAV = \measuredangle VAC = \measuredangle VWC$ y tomando $TI \perp AB$, tenemos que los triángulos rectángulos ATI y WCV son semejantes.



Por lo tanto,

$$\frac{TI}{IA} = \frac{CV}{VW}$$ y reemplazando queda

$$\frac{r}{IA} = \frac{CV}{2R}$$. O sea,

(1) $$2rR = CV.IA$$

Veamos ahora, que el triángulo BVI es isósceles. Por ser suplementarios de $\measuredangle BIA$, $\measuredangle 1 = \measuredangle BAV + \measuredangle IBA$.

Como BV = CV, reemplazando queda

$$\measuredangle 1 = \measuredangle BCV + \measuredangle ABI = \measuredangle 3 + \measuredangle 2 .$$

Ya que por construcción BI es bisectriz queda que el triángulo es isósceles.

Tenemos en consecuencia que $CV = BV = |IV|$, como I está entre A y V reemplazando en (1) queda

(2) $$2rR = -IV.IA$$

Aplicando la proposición 1, IA.IV puede expresarse respecto de la circunferencia centrada en 0 (la circunscripta). Es decir,

$$IA.IV = IO^2 - R^2 = d^2 - R^2$$

y la expresión (2) queda

$$2rR = R^2 - d^2$$

que es llamada *fórmula de Euler*.

Ejercicio 3: Tome un caso particular con la propiedad $R < 2r$ e interprete geométricamente.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Departamento de Matemáticas