Un Teorema de Kronecker de Densidad en $\mathbb{R}^n$

R.J. MIATELLO Y M.L. SALVAI

En esta nota generalizaremos algunos resultados de un artículo anterior (R.E.M. Vol. 7.1). La diferencia esencial es que trabajaremos en n dimensiones, obteniendo resultados de aproximación "simultánea" de números reales. El resultado principal es el teorema (13)probado por el matemático alemán Kronecker. Este teorema es sumamente importante, en particular para la construcción de ejemplos en distintas ramas de la matemática.

Supondremos conocidos los conceptos más básicos del álgebra lineal, comenzaremos definiendo las nociones de densidad en $\mathbb{R}^n$ de manera análoga al caso de $\mathbb{R}$.

<u>Definiciones</u>.

Dada una sucesión $\{x_k\}$ en $\mathbb{R}^n$, con $x_k = (x_k^n,\dots,x_k^n)$, diremos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x = (x^1,\dots,x^n)$ si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x^i$ para todo $i = 1,\dots,n$.

Dado A subconjunto de $\mathbb{R}^n$, llamamos <u>clausura de A</u> al conjunto $cl(A) = \{x \in \mathbb{R}^n |$ existe una sucesión $\{x_k\}$ en A con $\lim x_k = x\}$

Diremos que A es <u>cerrado</u> si $A = cl(A)$; y que A es <u>denso en</u> B si $cl(A) = B$.

Notemos que $A \subset cl(A)$ pues dado $x \in A$, la sucesión

$\{x_k\}$ con $x_k = x$ para todo k está en A y converge a x. Podríamos decir que geométricamente cl(A) es la unión de A con el "borde" de A. Notemos además que cl(cl(A)) = cl A, por lo tanto cl(A) es cerrado cualquiera sea A.

Ejemplos.

(i) $cl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |(x,y)| \leq 1\}$

(ii) $cl\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

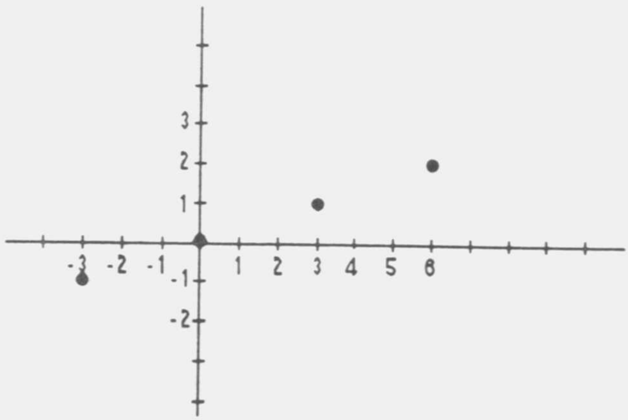
(iii) $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, por lo tanto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

<u>Definición</u>. Diremos que $G \subset \mathbb{R}^n$ es un subgrupo de $\mathbb{R}^n$ si $G \neq \phi$ y cada vez que x e $y \in G$, se tiene $x-y \in G$.

<u>Ejemplos</u>. $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ son subgrupos de $\mathbb{R}^2$.

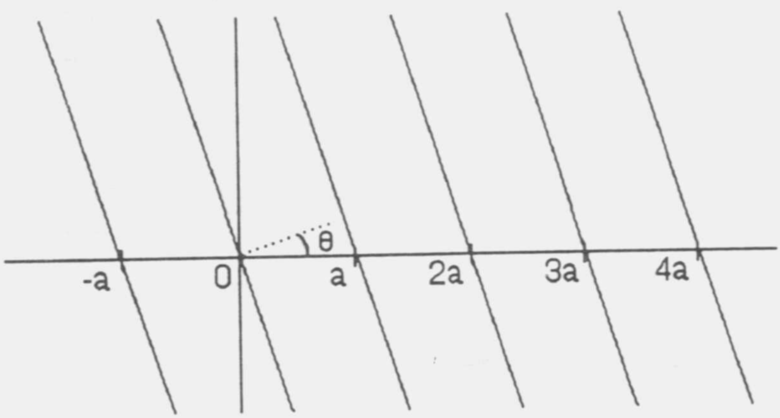
<u>Notación</u>. Si $x \in \mathbb{R}^n$, llamamos $\mathbb{Z}x = \{mx | m\in\mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{R}x = \{tx | t\in\mathbb{R}\}$. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, A+B denotará al conjunto $\{c = a+b | a \in A \text{ y } b \in B\}$. Si $A_1, \ldots, A_m$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $\sum_{j=1}^m A_j$ denota $A_1 + \ldots + A_m$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, $G_1 = \mathbb{Z}(3,1)$ se representa por:



(1)

y $G_2 = \mathbb{Z}(a,0) + \mathbb{R}(-\text{sen } \theta, \cos \theta)$ con $a > 0$, es el conjunto siguiente:



(2)

Ahora enunciamos un teorema cuya demostración omitiremos.

El lector interesado puede ver por ejemplo Bourbaki, General Topology, Part 2, pág. 71.

(3) <u>Teorema</u>. Un subgrupo G de $\mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si G

es de la forma $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{Z}v_i + \sum_{i=k+1}^{m} \mathbb{R}v_i$, con $0 \leq k \leq m \leq n$, donde $\{v_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.

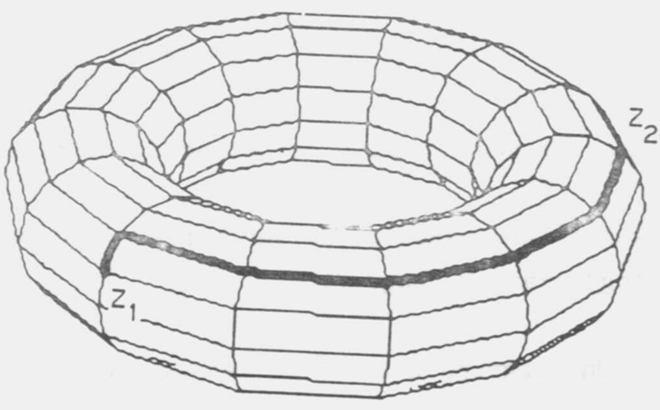
Ejemplos. Claramente los subgrupos dados en (1) y (2) resultan cerrados en $\mathbb{R}^2$.

Por otra parte, los subgrupos de $\mathbb{R}$: $\left\{\frac{m}{p^n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ (p un primo fijo) y $\mathbb{Q}$ no son cerrados. Según vimos en (10) de [1], son densos en $\mathbb{R}$,

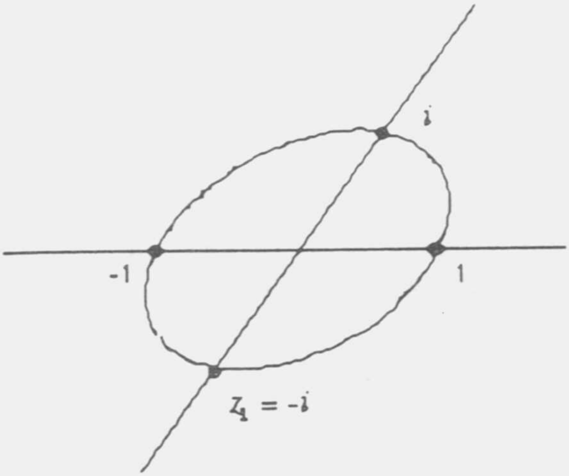
Definición. Sea S la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, donde $\mathbb{C}$ = conjunto de los números complejos.

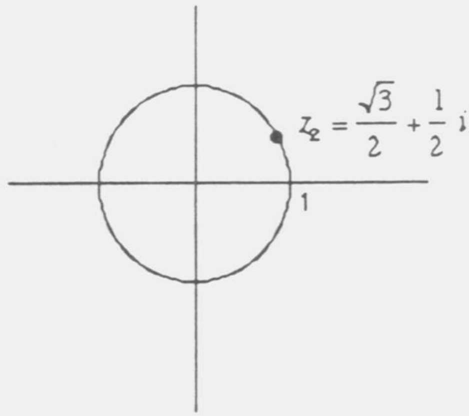
Llamaremos T^n al producto cartesiano de n circunferencias: $T^n = S \times \ldots \times S$ n veces. T^n se llama toro de n dimensiones.

Por ejemplo $T^1 = S$. T^2 es el conjunto determinado por dos coordenadas en la circunferencia, y lo podemos dibujar así:



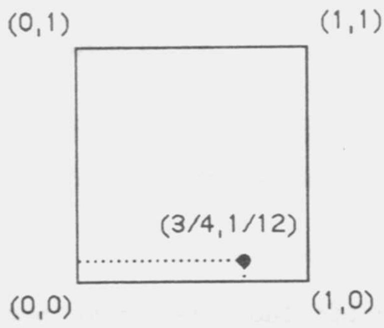
(4)





Hemos marcado el punto (z_1, z_2).

Por otra parte, como a S lo describimos con el segmento $[0,1]$ mediante la función $t \to \cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t)$; usando esa función coordenada a coordenada, podemos representar a T^2 por el cuadrado de lado 1.



El punto (z_1, z_2) anterior sería el par $(3/4, 1/12)$ pues

$$-i = i \operatorname{sen}\,(2\pi\, \tfrac{3}{4})$$

$$\text{y}\quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i = \cos\,(2\pi\, \frac{1}{12}) + {}$$
$$+\, i \operatorname{sen}\,(2\pi\, \frac{1}{12})$$

Notemos que los pares $(t,0)$ y $(t,1)$ representan el mismo punto $(\cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}\,(2\pi t),\ 1)$ en T^2; igualmente sucede con los pares $(0,t)$ y $(1,t)$ y el punto $(1,\ \cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t))$.

Podemos decir entonces que hay una correspondencia biyectiva entre T^2 y el cuadrado $[0,1]x[0,1]$, en el que se han identificado los lados opuestos. Observemos que si pegamos los lados opuestos del cuadrado obtenemos la figura **(4)**.

En forma análoga podemos representar a T^3 como un cubo con las caras opuestas identificadas y asimismo en n dimensiones (aunque resulte imposible visualizarlo).

El objeto principal de esta nota es generalizar los resultados de [1], esto es dar condiciones para asegurar la densidad de ciertos subconjuntos de T^n.

<u>Definición</u>.

Definimos la <u>función exponencial</u> de $\mathbb{R}^n$ con valores en T^n por

$$\exp(t_1,\ldots,t_n) = (\cos(2\pi t_1) + i\ \mathrm{sen}(2\pi t_1),\ldots,\ \cos(2\pi t_n) + i\ \mathrm{sen}(2\pi t_n)).$$

Por ejemplo, si $n = 2$, la función exponencial restringida al cuadrado $C = [0,1]x[0,1]$ da la representación de T^2 de que hablábamos más arriba.

En otros cuadrados del reticulado generado por C (los trasladados de C por un vector (k_1, k_2) con $k_j \in \mathbb{Z}$), exp se comporta como en C; más precisamente y para n arbitrario: si $u, v \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\exp(v+u) = \exp v \iff u \in \mathbb{Z}^n \qquad (5)$$

lo que resulta de la periodicidad de las funciones sen$(2\pi x)$ y $\cos(2\pi x)$.

Para definir densidad de un subconjunto de T^n, procedemos como en el caso de $\mathbb{R}^n$ (ver 1)).

<u>Definición</u>. Sea $\{z_k\}$ una sucesión en T^n, $z_k = (z_k^1, \ldots, z_k^n)$ con $z_k^j \in S$ $j = 1, \ldots, n$.

Diremos que $\lim_{k\to\infty} z_k = z = (z^1, \ldots, z^n)$ si $\lim_{k\to\infty} z_k^j = z^j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Sea $D \subset T^n$. Diremos que D es denso en T^n si para todo $z \in D$ existe una sucesión $\{z_k\}$ en D con $\lim z_k = z$.

(6) <u>Proposición</u>. Un subconjunto D de T^n es denso si y sólo si $\exp^{-1} D = \{x \in \mathbb{R}^n | \exp x \in D\}$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

<u>Prueba</u>.

$\Rightarrow$) Sean $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ y $z = \exp x$

Llamamos C_x al cubo sin borde de lado 1 centrado en x, $C_x = (x^1 - \frac{1}{2}, x^1 + \frac{1}{2}) x \ldots x (x^n - \frac{1}{2}, x^n + \frac{1}{2})$.

Se puede probar que $\exp|_{C_x}$ es inyectiva y admite una inversa que se escribe en coordenadas en términos de las funciones trigonométricas inversas arsen y arcos, y además es continua.

Por hipótesis existe una sucesión $\{z_k\}$ en D tal que

$\lim z_k = z$.

A partir de un k_0 en adelante z_k está en $\exp(C_x)$. La sucesión $\{(\exp|_{C_x})^{-1}(z_k)\}_{k\geq k_0}$ está en $\exp^{-1}(D)$ y converge a x.

Como x es arbitrario, se tiene que $\exp^{-1}(D)$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

$\Leftarrow$) Dejamos al lector la verificación de esta implicación.

(7) Problema.

Vamos a estudiar bajo qué condiciones el conjunto $\exp(\mathbb{R}v)$, con $v \in \mathbb{R}^n$, es denso en T^n. Equivalentemente, por la Proposición 7, cómo tiene que ser $v \in \mathbb{R}^n$ para que $\exp^{-1}(\exp(\mathbb{R}v))$ sea denso en $\mathbb{R}^n$.

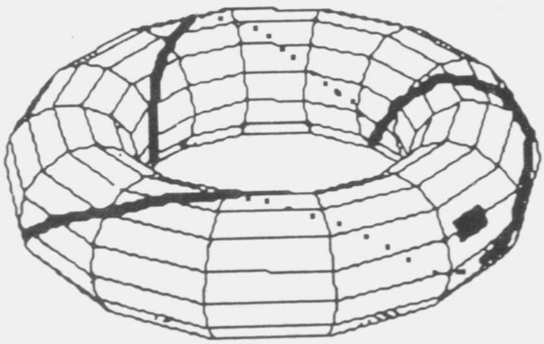
Dejamos al lector la verificación de que $\exp^{-1}(\exp(\mathbb{R}v)) = \mathbb{R}v + \mathbb{Z}^n$ $(\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}$, n veces).

Antes de atacar el problema veamos un ejemplo.

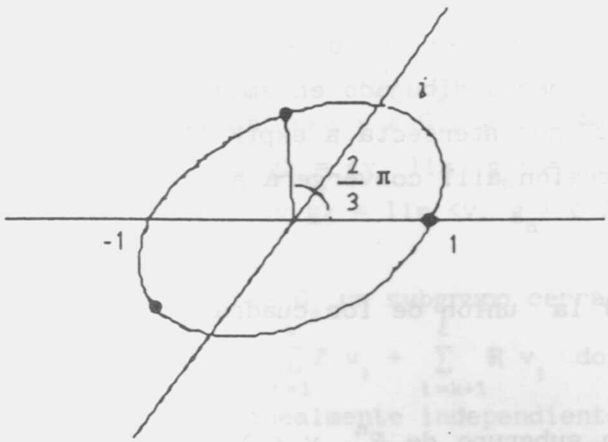
Supongamos que $n = 2$ y $v = (1, \frac{1}{3})$. Entonces

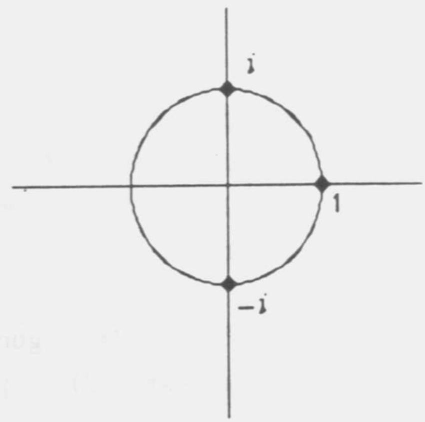
$$\exp(t(1, \tfrac{1}{3})) = (\cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(\tfrac{2}{3}\pi t) + i \operatorname{sen}(\tfrac{2}{3}\pi t)).$$

Cuando t recorre el intervalo [0,1], la primera coordenada de $\exp(t, \frac{t}{3})$ recorre tres veces la primera circunferencia, y la segunda coordenada una vez la segunda circunferencia.



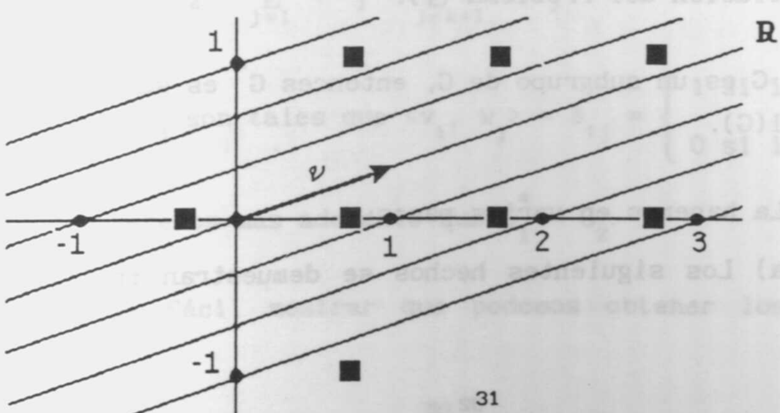
(8)





Por (5), cuando t varía en $[3n, 3n + 3]$, $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(t, \frac{t}{3})$ recorre los mismos puntos que cuando $t \in [0,3]$.

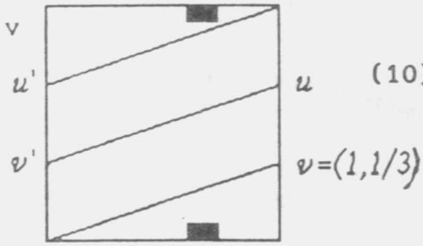
Por otra parte, $\exp^{-1}(\exp \mathbb{R}(1, \frac{1}{3})) = \mathbb{R}(1, \frac{1}{3}) + \mathbb{Z}^n$



(9)

De ahí resulta el dibujo de exp $(\mathbb{R}(1, \frac{1}{3}))$ en el toro representado como el cuadrado de lado 1, con identificaciones.

Notar que los puntos u y v están identificados con u′ y v′ respectivamente.



(10)

Además $\exp(\mathbb{R}(1, \frac{1}{3}))$ no es denso en T^2, pues por ejemplo el cuadrado C que hemos dibujado en ambas representaciones (9) y (10) de T^2 no intersecta a $\exp(\mathbb{R}(1, \frac{1}{3}))$, y por lo tanto ninguna sucesión allí convergerá al centro del cuadrado.

En la figura (9) la unión de los cuadrados dibujados es $\exp^{-1}(C)$.

<u>Definición</u>. Si G es un subgrupo de $\mathbb{R}^n$, y $<,>$ el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^n$; sea $G^* = \{m \in \mathbb{R}^n | <g, m> \in \mathbb{Z}, \forall g \in G\}$. G^* se llama el <u>dual de G</u>.

Según veremos este concepto será de suma utilidad para la solución del Problema (7).

<u>Lema</u>. Si G es un subgrupo de G, entonces G^* es subgrupo y $(G^*)^* = cl(G)$.

<u>Prueba</u>. La haremos en varios pasos:

(a) Los siguientes hechos se demuestran fácilmente usando la definición de G^*: (i) G^* es subgrupo de $\mathbb{R}^n$ y (ii) $G \subset (G^*)^*$ $G_1 \subset G_2 \Rightarrow G_2^* \subset G_2^*$.

(b) cl(G) es subgrupo, pues $x^1, x^2 \in$ cl(G) implica que $x^1 = \lim_{n\to\infty} x_k^1$. En consecuencia $x^1 - x^2 \in$ cl(G), pues, $\forall k$, $x_k^1 - x_k^2 \in G$, ya que G es subgrupo de $\mathbb{R}^n$.

(c) $\mathrm{cl}(G)^* = G^*$

Como $G \subset \mathrm{cl}(G)$, por (a), $\mathrm{cl}(G)^* \subset G^*$. Probemos la otra inclusión: sea $v \in G^*$, $g \in$ cl(G). Entonces $g = \lim g_n$, $g_n \in G$. $\langle v, g\rangle = \langle v, \lim g_n\rangle = \lim \langle v, g_n\rangle$ luego $\forall n$ $\langle v, g_n\rangle \in \mathbb{Z}$, y $\langle v, g\rangle = \lim \langle v, g_n\rangle \in \mathbb{Z}$.

(d) Sea G_1 un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^n$. Por el Teorema (3), $G_1 = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Z}\, v_i + \sum_{i=k+1}^{\ell} \mathbb{R}\, v_i$ donde $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$.

Completemos $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ a una base de $\mathbb{R}^n$ agregando $\{v_{\ell+1}, \ldots, v_n\}$.

$$\text{Sea } G_2 = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{Z}\, w_j + \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{R}\, w_j.$$

donde los w_j son tales que $\langle v_i, w_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Veremos mas adelante que $G_1^* = G_2$. **(11)**

Es fácil mostrar que podemos obtener los w_j así:

Sea A la matriz cuya columna j-ésima es el vector v_j; entonces w_j es la j-ésima columna de la matriz $(A^{-1})^t$.

Notemos que A es inversible, pues $\{v_j\}$ es base de $\mathbb{R}^n$. Además, dada una matriz B, B^t (se lee B transpuesta) es la reflejada de B respecto de la diagonal, es decir $(B^t)_{ij} = B_{ji}$.

De la propiedad $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, que no es difícil probar, resulta que $\{w_j\}$ es también una base de $\mathbb{R}^n$, la llamada <u>base dual</u> de $\{v_i\}$.

Probemos ahora **(11)**. Se vé fácilmente que $G_1^* \supset G_2$. Veamos la otra inclusión. Sea $g \in G_1^*$, como $\{w_j\}$ es base de $\mathbb{R}^n$, podemos escribir

$$g = \sum_{j=1}^{n} s_j\, w_j \qquad\qquad s_j \in \mathbb{R}$$

Además, los elementos de G_1 son de la forma

$$v = \sum_{i=1}^{k} m_i\, v_i + \sum_{i=k+1}^{\ell} t_i v_i \text{ con } m_i \in \mathbb{Z}, \qquad t_i \in \mathbb{R}$$

entonces debe cumplirse que para todo $m = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k$ y $t = (t_{k+1}, \ldots, t_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell-k}$, sean enteros los números

$$< \sum_{j=1}^{n} s_j\, w_j\, , \sum_{i=1}^{k} m_i\, v_i + \sum_{i=k+1}^{\ell} t_i v_i > = \sum_{i=1}^{k} s_i\, m_i + \sum_{i=k+1}^{\ell} s_i t_i$$

pues $<m_j, v_i> = \delta_{ij}$

Tomando m = (0,..., 0) y t = (0,..., 1,...,0), (1 en el i-ésimo lugar) resulta que $s_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \ldots, k$. Luego $g \in G_2$ como se afirmó.

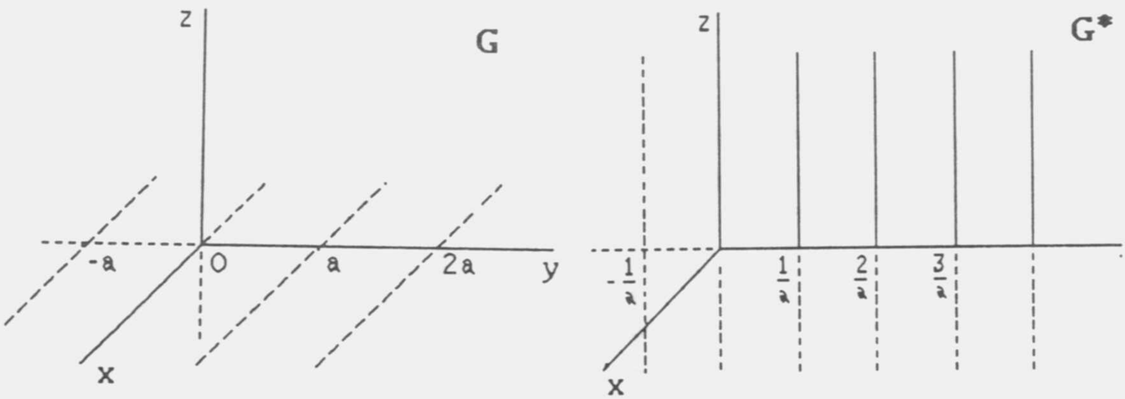
(e) Ahora estamos en condiciones de concluir la demostración del lema

G subgrupo de $\mathbb{R}^n \Rightarrow cl(G)$ subgrupo cerrado $\Rightarrow cl(G)$ es de la forma de G_1 como en (e) $\Rightarrow cl(G)^* = G_2 \Rightarrow (cl(G)^*)^* = G_2^*$.

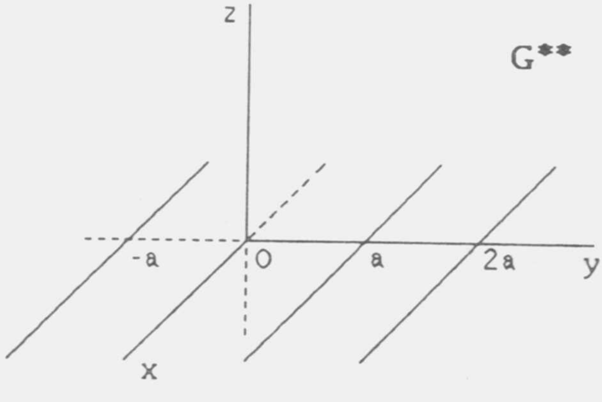
Pero $G_2^* = G_1$ (aplicando dos veces (d) y usando que la base dual de $\{w_j\}$ es $\{v_j\}$, lo cual es obvio). Entonces $cl(G)^{**} = G_1 = cl(G) \Rightarrow$ (por (c)) $G^{**} = cl(G)$.

<u>Ejemplos</u>.

1) En $\mathbb{R}^3$, sea $a > 0$ y $G = \mathbb{Q}e_1 + \mathbb{Z}a\ e_2$. Entonces
$G^* = \mathbb{Z}\frac{1}{a}e_2 + \mathbb{R}e_3$ $\qquad G^{**} = \mathbb{R}e_1 + a\mathbb{Z}e_2 = cl(G)$



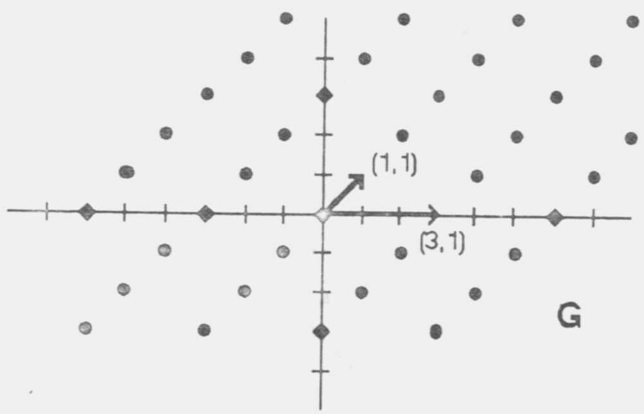
(12)



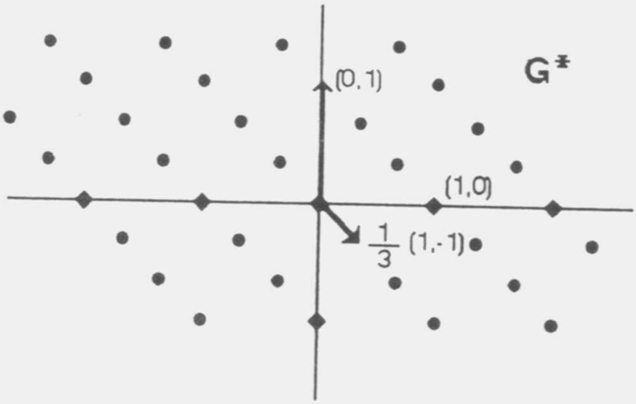
2) En $\mathbb{R}^2$, si $\quad G = \mathbb{Z}(3,6) + \mathbb{Z}(1,1)$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (A^{-1})^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^* = \mathbb{Z}\,\frac{1}{3}\,(1,-1) + \mathbb{Z}(0,1)$$



(13)



Notar que $<v_i, w_j> = \delta_{ij}$.

Corolario.

Si G es subgrupo de $\mathbb{R}^n$, entonces G es denso $\Leftrightarrow G^* = \{0\}$.

Prueba.

G es denso en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow cl(G) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ (por el lema anterior) $G^{**} = \mathbb{R}^n$. Si $G^* = \{0\}$, claramente $G^{**} = \mathbb{R}^n$.

Recíprocamente si $G^{**} = \mathbb{R}^n$, $<v,g> \in \mathbb{Z}$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\forall g \in G^*$. Si existe $g \in G^*, g \neq 0$, tomemos $v = \frac{g}{2<g,g>}$. Se tiene $<v,g> = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, un absurdo, luego $G^* = \{0\}$.

Ahora estamos en condiciones de dar la solución al Problema **(7)**.

(14) Teorema (Kronecker). Sea $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\exp(\mathbb{R}v)$ es denso en T^n si y sólo si $v_1, \dots, v_n$ son

$\mathbb{Z}$-linealmente independientes, esto es $\sum_1^n \pi_i v_i = 0$ con $r_i \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $r_i = 0 \ \forall_i$.

<u>Prueba</u>. Por el comentario que sigue al enunciado del Problema (7) como vimos anteriormente, $\exp(\mathbb{R}v)$ es denso en T^n si y sólo si $\mathbb{R}v + \mathbb{Z}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Además, $\mathbb{R}v + \mathbb{Z}^n$ es subgrupo de $\mathbb{R}^n$ y por el corolario anterior, es denso, si y sólo si $(\mathbb{R}v + \mathbb{Z}^n)^* = \{0\}$.

Es decir, buscamos condiciones sobre $(v_1, \ldots, v_n)$ para que <u>sólo para $x = 0$</u> se cumpla que

$<t(v_1, \ldots, v_n) + (m_1, \ldots, m_n), x> \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in \mathbb{R}$

y todo $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Esto equivale a que

$$\sum_{i=1}^n (tv_i + m_i)\, x_i \in \mathbb{Z} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$$

sólo si $x_i = 0$ para todo i.

(15) Entonces $\exp(\mathbb{R}v)$ es denso en T^n si y sólo si $t \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n x_i m_i \in \mathbb{Z}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}^n$ implican que para todo i es $x_i = 0$.

Supongamos que vale (15) y que $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. es tal que $\sum x_i v_i = 0$
Entonces

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ y } m \in \mathbb{Z}^n \text{ es } t\sum x_i v_i + \sum x_i m_i \in \mathbb{Z}$$

Luego por (15) $x_i = 0 \ \forall_i$ y eso dice que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es

$\mathbb{Z}$-linealmente independiente.

Recíprocamente, supongamos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente.

Si en la hipótesis de (15) tomamos $t = 0$ y $m = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ (1 en el lugar i-ésimo) resulta $x_i \in \mathbb{Z}\ \forall_i$. Luego $t\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in \mathbb{Z}\ \ \forall t \in \mathbb{R}$ implica que $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0$. Pero $v_1, \ldots, v_n$ son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes, entonces necesariamente $x_i = 0$ para todo i. Esto prueba (15) y el teorema.

(16) Nota. Se demuestra análogamente (ejercicio) que:

$\exp(\mathbb{Z}v)$ es denso en $\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow 1, v_1, \ldots, v_n$ es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente.

Ejemplos.

1) $\exp \mathbb{R}(a,b)$ es denso en $T^2 \Longleftrightarrow \{a,b\}$ es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente $\Longleftrightarrow$ a no es múltiplo racional de b, ni viceversa.

2) $\exp \mathbb{Z}(a,b)$ no es densa en $T^2 \Longleftrightarrow 1, a, b$ no es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente $\Longleftrightarrow a = rb + s$ con $r, s \in Q$ ó $b = ra + s$ con $r, s \in Q$.

3) Veamos que si $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\exp(\mathbb{R}v)$ es denso en $T^2 \Longleftrightarrow$ la curva $t \to \exp(tv)$ en T^2 no se autointerseca.

Si $v_1 = 0$ la afirmación es inmediata. Supongamos $v_1 \neq 0$.

Demostraremos ambas implicaciones por el absurdo.

$\Rightarrow$) Sea $\exp(tv) = \exp(sv)$ con $s \neq t$. Por **(5)**, eso equivale a $tv = sn + m$ $\quad m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$. Luego $(t-s)v_i = m_i$ $i = 1, 2$ y $v_2 = \frac{m_2}{t-s} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_1}{t-s} = \frac{m_2}{m_1} v_1$ ($m_1 \neq 0$ pues $v_1 \neq 0$). Entonces $\exp(\mathbb{R}v)$ no es denso en T^2

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\exp(\mathbb{R}v)$ no es denso en T^2. En ese caso

$v_2 = \frac{m}{n} v_1$ $m, n \in \mathbb{Z}$ y $\exp(\frac{n}{v_1}(v_1, v_2)) = \exp(\frac{n}{v_1}(v_1, \frac{m}{n}v_1)) =$ $\exp(n, m) = (1,1) = \exp(0(v_1, v_2))$. Entonces $\exp(tv)$ toma el valor $(1,1)$ para ambos, $t = 0$ y $t' = \frac{n}{v_1} \neq 0$.

4) Recordemos que un número real t es trascendente si t no es raíz de un polinomio no nulo con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Afirmamos que si $t \in \mathbb{R}$ $\exp(\mathbb{Z}(t, t^2, \ldots, t^n))$ es denso en T^n sí y sólo si t es trascendente. En efecto, por el teorema de Kronecker (ver **(4)**) esto sucede si y sólo si $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente, o sea, si y sólo si t es trascendente.

Para concluir daremos una generalización muy útil por sus aplicaciones del Ejemplo 3. La demostración es algc elaborada y el lector puede preferir omitirla.

<u>Teorema</u>. Existe V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimen-

sión n y $v \in V$ tales que el conjunto $\exp(\mathbb{R}v)$ es denso en T^{n+1} y además la restricción de exp a V es inyectiva. En particular $\exp(V) \approx \mathbb{R}^n$ es denso en T^{n+1}.

Prueba.

Comencemos buscando condiciones para la inyectividad: $\exp|_V$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ $x,y \in V$ $\exp x = \exp y$ sólo si $x = y$ $\Leftrightarrow$ (por (5)) $x,y \in V$ $x-y \in \mathbb{Z}^{n+1}$ sólo si $x = y$ $\Leftrightarrow$ (tomando $z = x-y$) $z \in V$ y $z \in \mathbb{Z}^{n+1}$ sólo si $z = 0$ $\Leftrightarrow$ $V \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \{0\}$.

Supongamos que los vectores $v_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{n+1,j})$ generan V, $j = 1, \ldots, n$ y sea $A = (a_{ij})$, (matriz $(n+1)xn$).

La condición $V \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \{0\}$ significa que para cada $(m_1, \ldots, m_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ el sistema de (n+1) ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j = m_i \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

tiene sólo la solución trivial $t_j = 0$ $\forall_j$ y esto equivale a decir que $m = (m_1, \ldots, m_{n+1}) \notin V-\{0\}$ si $m \neq 0$.

Como $\dim V + 1 = n + 1$, eso es lo mismo que afirmar que la matriz A con la columna $m = (m_1, \ldots, m_{n+1})$ agregada tiene determinante no nulo $\forall m \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $m \neq 0$.

Desarrollando el determinante por la columna m obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n+1} m_j(-1)^j \det(A_j) \neq 0 \qquad \text{si } m = (m_1, \ldots, m_{n+1}) \neq 0$$

donde A_j es la matriz A sin la j-ésima fila.

(17) Esto equivale a decir que los números $d_j = \det A_j$, $j = 1, \ldots, n+1$, son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes.

Vamos a elegir los vectores v_j que generan V, de tal manera que la matriz A resulte sencilla.

Sea $\{e, i = 1, \ldots, n+1\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Para cada $j = 1, \ldots, n$, si P_j es el plano de $\mathbb{R}^{n+1}$ generado por $\{e_j, e_{j+1}\}$ se cumple que $V \cap P_j \neq \{0\}$, pues V tiene sólo una dimensión complementaria.

Por lo tanto tomemos
$w_j \in V \cap P_j$ $w_j \neq 0 \Rightarrow w_j = (0, \ldots, 0, b_j, c_j, 0, \ldots, 0)$. Como precisamos $V \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \{0\}$, b_j y c_j deben ser ambos no nulos (pues si $c_j = 0$, $\frac{m_j}{b_j} = e_j \in V \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ y análogamente si $b_j = 0$).

Entonces podemos tomar $0 \neq v_j = \frac{w_j}{c_j} \in V \cap P_j$ y por lo tanto v_j es de la forma $(0, \ldots, a_j, 1, 0, \ldots, 0)$.

Luego la matriz A es

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 \\ 1 & a_2 & & & \\ & 1 & a_3 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & a_n \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Veamos cómo es la condición **(17)** en este caso:

Calculamos $\det(A_j)$ y obtenemos $d_1 = 1$

$d_j = a_1 . a_2, \ldots, a_{j-1} \qquad j = 1, \ldots, n-1.$

(18) Como $d_j = d_{j-1}\, a_{j-1}$ resulta $a_j = \dfrac{d_{j+1}}{d_j}$ si $j = 1, \ldots, n$

Tomemos como v del enunciado

$v = v_1 +, \ldots, + v_n = (a_1,\ 1+ a_2,\ 1+a_3, \ldots, 1+a_n, 1) =$

$$= \left(\frac{d_2}{d_1},\ 1 + \frac{d_3}{d_2}, \ldots,\ 1 + \frac{d_{n+1}}{d_n},\ 1 \right)$$

Por el Teorema **(14)**, $\exp(\mathbb{R}v)$ es denso en $T^{n+1} \Longleftrightarrow$ las componentes de v son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes.

Además, por **(17)** $d_1, \ldots, d_{n+1}$ deben ser $\mathbb{Z}$-linealmente independientes.

Sea T trascendente, y tomemos $d_k = t^{2^k}$ $k = 1, \ldots, n+1$. Claramente los d_j resultan $\mathbb{Z}$-linealmente independientes. Veamos que también lo son las componentes de v (notar que $\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{t^{2^{k+1}}}{t^{2^k}} = t^{2^k}$). Así, si $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbb{Z}$,

$$0 = m_1 t^2 + \sum_{k=2}^{n} m_k (1+t^{2^k}) + m_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} m_k\, t^{2^k} + \sum_{k=1}^{n+1} m_k$$

$$\Rightarrow m_k = 0 \quad k = 1, \ldots, n \text{ y } \sum_{k=1}^{n+1} m_k = 0 \Rightarrow m_k = 0 \quad k = 1, \ldots, n+1$$

A partir de los d_j recuperamos los a_j mediante **(18)**, luego hemos construido un subespacio vectorial V de R^{n+1} y $v \in V$ como buscábamos.

Nota. Si en el enunciado pedimos que exista $v \in V$ tal que $\exp(\mathbb{Z}v)$, en lugar de $\exp(\mathbb{R}v)$ sea denso en T^{n+1}, la proposición es todavía verdadera.

En este caso no se puede tomar $v = v_1 + \ldots + v_n$ como en la proposición, pues por la nota **(16)** va a ser necesario que la $(n+2)$-upla formada por los componentes de v y el número 1 sea $\mathbb{Z}$-linealmente independiente.

Podemos solucionar la dificultad eligiendo en este caso v_n de la forma $(0, \ldots, 0, a_n, a_{n+1})$ y tomando $v = v_1 + \ldots + v_n$. La demostración es análoga a la de la proposición.

REFERENCIA

[1] Los Números Reales y Ciertos Resultados de Aproximación. R. Miatello y M.L. Salvai. R.E.M. Vol. 7 N° 1, 1992.