PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Los siguientes problemas formaron parte de las pruebas de la VI Olimpíadas Iberoamericana de Matemática.

Problema. Sea $P(X,Y) = 2X^2 - 6XY + 5Y^2$. Diremos que un número entero A es un valor de P si existen números enteros B y C tales que $A = P(B,C)$.

i) Determinar cuántos elementos de $\{1,2,..., 100\}$ son valores de P.

ii) Probar que el producto de valores de P es un valor de P.

Solución 1. Los valores de P son los enteros que pueden expresarse como suma de los cuadrados de dos enteros. Observemos en primer lugar que $P(X,Y)$ puede expresarse en la forma

$$P(X, Y) = (X - Y)^2 + (X - 2Y)^2,$$

con lo cual los valores de P son sumas de dos cuadrados. Por otra parte, si $A = B^2 + C^2$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} X - Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$$

resulta $P(2B - C, B-C) = A$, lo cual prueba nuestra afirmación. La cuestión i) se resuelve contando los elementos de $\{1,2,...,100\}$ que son sumas de dos cuadrados. Hay exactamente 43 elementos con la citada propiedad y constituyen el conjunto

$$\{r^2 + s^2 : 0 \leq r \leq s \leq 10\}.$$

Para la segunda cuestión suponemos que A y A′ son valores de

P. Por lo dicho previamente, podemos expresar A y A′ en la forma

$$A = B^2 + C^2, \ A' = B'^2 + C'^2.$$

Efectuando el producto se obtiene

$$AA' = (B^2 + C^2)(B'^2 + C'^2) = (BB' - CC')^2 + (BC' + B'C)^2$$

lo cual completa la demostración.

Solución 2. Los valores de P son los enteros A tales que 2A puede expresarse como suma de los cuadrados de dos enteros. Observemos en primer lugar que si A es un valor de P existen enteros B y C tales que

$$2B^2 - 6BC + 5C^2 - A = 0.$$

Esto implica que la ecuación cuadrática

$$2X^2 - 6CX + 5C^2 - A = 0 \ (1)$$

tiene soluciones enteras, de donde sigue que su discriminante

$$\Delta = 36C^2 - 8(5C^2 - A) = 8A - 4C^2 = 4(2A - C^2)$$

es el cuadrado de algún entero. Entonces existe un entero D tal que

$$2A - C^2 = D^2,$$

Es decir

$$2A = C^2 + D^2. \ (2)$$

Recíprocamente, si (2) se verifica, considerando alternativamente C par o C impar se prueba que la ecuación (1) tiene soluciones enteras dadas por

$$X = \frac{3C \pm \sqrt{2A - C^2}}{2}$$

Sea B una de éstas soluciones. Entonces

$$(2B - 3C)^2 = 2A - C^2$$

que implica (agrupando y cancelando un factor 2 en ambos miembros)

$$P(B,C) = A$$

como queríamos mostrar.

La cuestión i)se resuelve ahora contando cuantos elementos del conjunto

$$\{2,4,6,...200\}$$

pueden expresarse como sumas de dos cuadrados. Hay exactamente 43 elementos con tal propiedad.

Para la segunda cuestión suponemos que A y A′ son valores de P. Por lo dicho previamente, podemos expresar 2A y 2A′ en la forma

$$2A = B^2+C^2, \quad 2A' = B'^2 + C'^2$$

de donde sigue que B y C por un lado y B′, C′ por otro tienen la misma paridad (esto es, ambos pares o bien ambos impares). En cualquier caso los términos

$$BB' - CC', \qquad BC' + B'C$$

son pares. Efectuando el producto se obtiene

$$4AA' = (B^2 + C^2)(B'^2 + C'^2) = (BB' - CC')^2 + (BC' + B'C)^2.$$

Por lo dicho previamente tenemos

$$AA' = \left(\frac{BB' - CC'}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC' + B'C}{2}\right)^2,$$

digamos

$$AA' = E^2 + F^2$$

de donde sigue

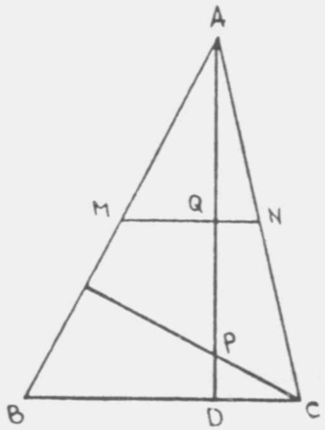
$$2AA' = (E - F)^2 + (E + F)^2$$

lo cual completa la demostración.

Problema. Dados 3 puntos no alineados M, N y P, sabemos que M y N son puntos medios de dos lados de un triángulo y que P es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Demostrar que dicho triángulo es construible con regla y compás.

Solución 1. Un vértice A de un tal triángulo está en la recta perpendicular a $\overline{MN}$ que pasa por P. Supongamos primero que esta recta corta al segmento $\overline{MN}$. Se presentan dos casos

Caso 1



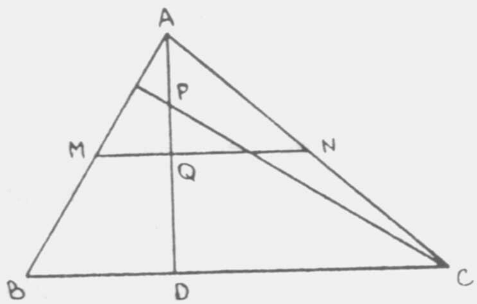
$a = MQ$, $b = QN$, $c = QP$, $x = PD$.

Resulta entonces

$$PD/DC = BD/AD \text{ o sea } x/2b = 2a/2(c + x).$$

Sigue entonces $x^2 + cx = 2ab$ y por lo tanto $x = \dfrac{-c + \sqrt{c^2+8ab}}{2}$.

Caso 2

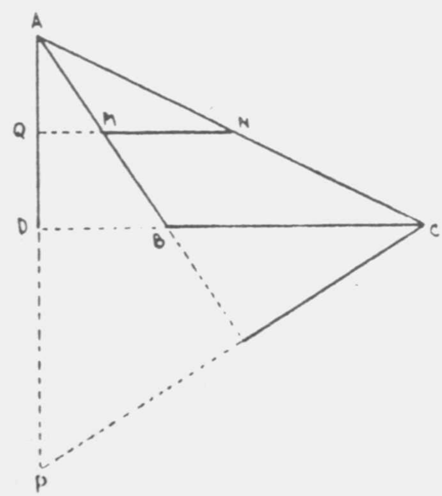


$a = MQ$, $b = QN$, $c = PQ$, $x = PD$.

Por la misma semejanza se obtiene:

$$x/2b = 2a/2(x - c), \text{ o sea } x = \frac{c + \sqrt{c^2+8ab}}{2}.$$

Supongamos ahora que la recta no corte al segmento $\overline{MN}$.



$a = QM$, $b = QN$, $c = QP$, $x = DP$.

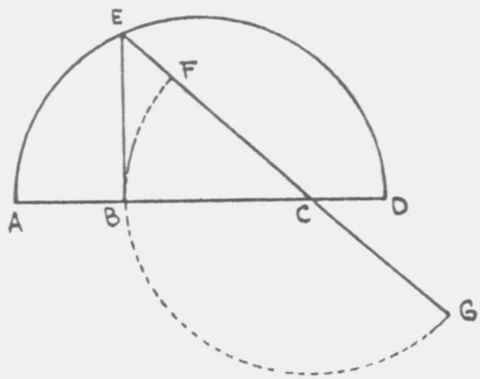
$$PD/DC = BD/AD$$

En este caso da

$$x|2b = 2a|2(c-x) \text{ o sea } x = \frac{c \pm \sqrt{c^2-8ab}}{2}.$$

Existe solución si $c \geq 2\sqrt{2}\,\sqrt{ab}$.

Para demostrar que el triángulo puede construirse con regla y compás basta ver, en cada caso, que un segmento de longitud x puede ser construído de tal manera. En todos los casos las operaciones involucradas para obtener x a partir de los datos a,b,c pueden realizarse con regla y compás.



$AB = 2a$, $BD = 4b$, $BC = c$, $BE = \sqrt{8ab}$

$EC = \sqrt{c^2+8ab}$, $EF = -c + \sqrt{c^2+8ab}$, $EG = c + \sqrt{c^2+8ab}$

solución 2. (Enviada por Ariel Affonso - Uruguay)

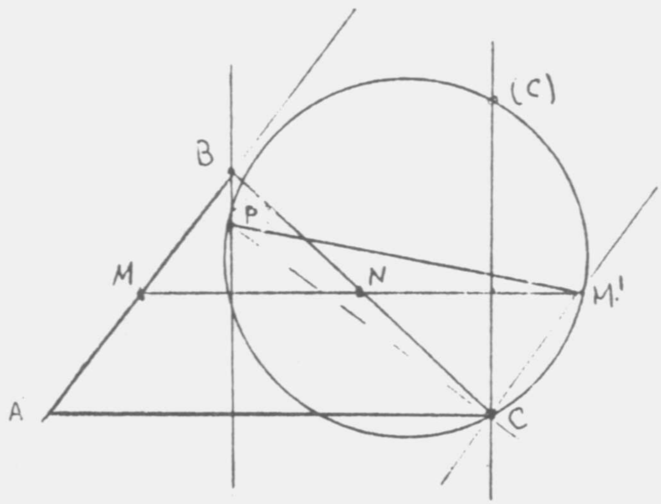
Sea M' simétrico de M respecto de N. Entonces CM'//AM.

$CP \perp AB \Rightarrow CP \perp CM'$. Luego $P\hat{C}M'$ es recto.

Trazamos el arco capaz correspondiente a 90° con cuerda PM'.

El punto C debe pertenecer a dicho arco.

Por otra parte tomamos la recta paralela a BP y simétrica a ella respecto de N. El punto C pertenece a dicha recta. Quedan dos posiciones posibles para C, y cada una de ellas da una solución al problema.



REUNION ANUAL UMA - REM

En la Universidad Nacional del Comahue se desarrollarán, entre el 4 y el 9 de octubre de 1993, los siguientes eventos:

-XLIII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas.

-XVI Reunión de Educación Matemática.

-V Encuentro de Estudiantes.