Una propuesta didáctica para la caracterización de las transformaciones rígidas del plano

Dilma Fregona

Algunas cuestiones preliminares.

Este artículo se basa en un trabajo presentado por María Mercedes Carmona y Dilma Fregona en la X Reunión de Educación Matemática, realizada en 1987 en Bahía Blanca. Por esos años, ambas docentes éramos becarias del Conicet con el proyecto "Introducción a la geometría y a las transformaciones rígidas del plano". El tema que ahora nos ocupa es parte de ese proyecto.

En diversos aspectos -que señalaremos brevemente- este documento conserva la marca de su "antigüedad". Visto desde la hora actual, podemos decir: a) que es un trabajo de educación matemática inscripto en la problemática del aula, y b) trata de mostrar las respuestas de los alumnos ante un recurso específico de la noción a enseñar.

Veamos estas afirmaciones. Lo enunciado por el primer inciso parece obvio, porque cualquier lector poco advertido, en una revista con las características de la que tiene ante sus ojos, y bajo el título ya indicado, espera encontrar información, reflexiones, conocimientos relativos a la tarea de enseñar matemática. Pero, como ya lo dijimos, aunque este trabajo formó parte de un proyecto presentado al Conicet, y fue realizado a conciencia -tanto por las becarias como por el director- no fue una producción de una comunidad científica, sino un trabajo aislado entre los tantos que se realizan en nuestro país en favor de la enseñanza. Aún hoy, seis años después no es evidente en Argentina la existencia de la comunidad de didactas de la matemática. Sin esa comunidad de referencia es inevitable -entre otras consecuencias- que las producciones en esa área de conocimiento se ubiquen en la encrucijada de diversas ciencias -matemática, psicología, epistemología, sociología, ciencias de la educación...- con el natural predominio de alguna de ellas.

Decíamos también que este trabajo se inscribe "en la problemática del aula", es decir, tomamos el proceso de transposición a la altura en que un docente de enseñanza media, ante la decisión tomada por los responsables de programas y autores de textos de hacer de las transformaciones -y en particular de las isometrías un objeto de enseñanza, al preparar sus clases se plantea: ¿Qué hago con este tema? Sin emitir juicios de valor, en el trabajo no se abordan problemas más generales, tales como: ¿cuál es el lugar de las transformaciones en la enseñanza de la geometría? ¿Cuáles son los niveles de funcionamiento de las transformaciones? ¿Qué tipo de relaciones es necesario establecer con los alumnos para producir las isometrías? En qué tipo de situaciones los invariantes de las transformaciones pueden aparecer como problema?

La afirmación del inciso b) -mostrar las respuestas de los alumnos ante un recurso específico de la noción a enseñar- nos permite dar un paso al costado con respecto al objeto de estudio en los trabajos de educación matemática. En este documento la noción a enseñar son las transformaciones del plano, y el recurso es el papel de calcar como plano auxiliar que sirve como ejemplo físico del movimiento. Se muestra en el trabajo el funcionamiento de una técnica que sirve para enseñar, y se da información sobre los alumnos, sus comportamientos, sus resultados. El paso al costado -que entonces no estábamos en condiciones de dar- consiste en un cambio en el punto desde el cual se mira la enseñanza, lo cual lleva a considerar, por ejemplo: las condiciones que hay que crear en las situaciones de enseñanza y aprendizaje, las condiciones que hay que mantener durante la gestión de la clase, los fenómenos de didáctica a los que se enfrenta quien comunica los saberes. Es así entonces que no abordamos el problema didáctico del "movimento mínimo" asociado "naturalmente" a las isometrías, en particular cuando se estudia la composición de dos o más isometrías. Ni nos hemos planteado si es posible evitar la metáfora del movimiento, y en caso de que no sea posible, cuáles son los obstáculos que genera y cómo pueden superarse.

De todas maneras, en cuanto a los fenómenos de didáctica, un lector informado podrá reconocer los juegos de contrato didáctico que acompañan el desarrollo del tema.

A pesar de este análisis que puede parecer poco favorable al presente documento, creemos que su publicación contribuye a esbozar un panorama del estado de los trabajos en educación matemática en los últimos años en nuestro país. Además, muy puntualmente se muestra el funcionamiento de un recurso didáctico útil -el plano auxiliar para representar el movimiento- y muy poco conocido en la comunidad de enseñantes.

Introducción

Como ya lo dijimos, "Una propuesta didáctica..." es parte del proyecto "Introducción a la geometría y a las transformaciones rígidas del plano", desarrollado en el Instituto de Pedagogía Experimental y Aplicada, dependiente de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Comahue. La tarea experimental se realizó en dos divisiones de la Escuela Secundaria número 9 de General Roca, Río Negro, durante los años 1986 y 1987.

El proyecto tenía como objetivo fundamental desarrollar una "buena ingeniería didáctica que permitiera a los alumnos -y a través de tareas de extensión, a los docentes- establecer una relación diferente con la geometría, donde el saber enseñado y las prácticas de la enseñanza se legitimen esencialmente por el saber científico acerca de la geometría. En ese esquema, una preocupación central de la enseñanza -en cuanto a contenidos se refiere- es la introducción lo más pronto posible de las transformaciones geométricas y en particular de las isometrías del plano. Estudiamos la propuesta elaborada por Juan Tirao -presentada en cursos y publicaciones- y en base al texto "Matemática 1" (Tirao, 1985) abordamos desde la ingeniería didáctica el problema de la introducción a la geometría.

Según ese texto, los primeros contenidos de geometría son:

* Figuras del plano.

Conjuntos de puntos.

Puntos y rectas del plano. Rectas paralelas. Posiciones relativas de dos rectas en el plano. Orden en la recta. Semirrecta. Segmento.

Semiplano. Angulo. Sector angular. Semirrecta interior a un ángulo. Angulos adyacentes y opuestos por el vértice. Angulos determinados por dos rectas cortadas por una transversal.

Otras geometrías.

* Transformaciones del plano.

Definición. Transformación identidad.

Composición de transformaciones.

Transformaciones biyectivas. Inversa de una transformación. Transformaciones rígidas. Congruencia de figuras.

Los axiomas seleccionados para la primera unidad son:

Axioma 1: por dos puntos distintos a y b del plano, pasa una y sólo una recta del mismo.

Axioma 2: los puntos de cualquier recta R del plano, están ordenados según dos órdenes opuestos. En cualquiera de ellos no existe ni primero ni último punto y dados dos puntos distintos arbitrarios de R, existe por lo menos otro entre ambos.

Axioma 3: toda recta R del plano lo divide en dos subconjuntos no vacíos llamados semiplanos de tal modo que:

a) todo punto del plano que no pertenece a R, pertenece a uno y sólo uno de los semiplanos;

b) la recta R está contenida en ambos semiplanos;

c) dos puntos de un mismo semiplano que no pertenecen a R, son los extremos de un segmento contenido en dicho semiplano y que no intersecta a R;

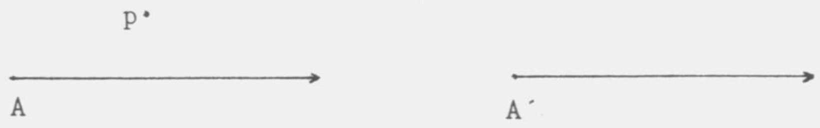
d) dos puntos pertenecientes a distintos semiplanos son los extremos de un segmento que intersecta a R.

Aunque estas dos primeras unidades estaban incluídas en el programa de primer año, en nuestro trabajo alcanzamos a desarrollar con los alumnos sólo la primera. Iniciábamos entonces el programa de segundo año con las transformaciones del plano.

Un recurso interesante: el papel de calcar.

Para introducir intuitivamente las isometrías es habitual en la enseñanza mostrar dichas transformaciones a través de “movimientos”, los cuales son representados por medio de construcciones donde a partir de una figura inicial se obtiene la correspondiente por la transformación que es objeto de estudio. Un recurso poco conocido por los docentes es el papel de calcar utilizado como plano auxiliar, según el procedimiento explicado por Puig Adam (Puig Adam, (1947), 1969, pp.25) que Tirao retoma de la siguiente manera (Tirao, 1982 pp.21):

"Dibuja en una hoja de papel dos semirrectas A y A' como te indica la ilustración:



Para determinar la imagen de un punto p cualquiera toma una hoja de papel transparente y calca en ella la semirrecta A y el punto p. Mueve la hoja auxiliar hasta superponer la semirrecta calcada sobre la semirrecta A' y con una punta marca en tu hoja el punto p' correspondiente al calco de p. Así queda definida una transformación biyectiva T del plano que transforma la semirrecta A en la semirrecta A'. Observa que la superposición de la hoja transparente con tu hoja, para hacer coincidir el calco de A con A' puede hacerse de dos maneras diferentes: poniendo en contacto la cara dibujada o la opuesta de la hoja auxiliar sobre tu hoja. Correspondientemente quedan definidas dos transformaciones biyectivas T y S del plano, que transforman la semirrecta A en la A'".

Aunque, como ya lo dijimos, no abordamos didácticamente el problema de la asociación entre transformación del plano -en tanto que correspondencia entre puntos del plano- y movimiento -con la connotación cinemática y temporal- esa distinción estuvo presente en todas las actividades planteadas a los alumnos.

El problema en cuestión. Algunas respuestas elaboradas por los alumnos.

Los axiomas seleccionados para caracterizar a las transformaciones rígidas son: (Tirao, 1985).

Axioma 4: las transformaciones rígidas del plano son transformaciones biyectivas tales que dada cualquier recta su imagen es una recta, y análogamente, dada cualquier semirrecta su imagen es una semirrecta.

Axioma 5: la transformación que se obtiene de componer dos transformaciones rígidas es rígida.

Axioma 6: la inversa de una transformación rígida es rígida.

Axioma 7: si un segmento ab se transforma en un segmento cd por una transformación rígida T, y uno cualquiera de ellos está incluído en el otro, entonces dichos segmentos son iguales. Análogamente si un sector angular aob se transforma en un sector angular a'ob' por una transformación rígida T, y uno cualquiera de ellos está incluido en el otro, entonces los ángulos aob y a'ob' son iguales.

Axioma 8: dadas dos semirrectas cualesquiera, existe una transformación rígida y sólo una que transforma una semirrecta en la otra, y un determinado semiplano limitado por la primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.

Es una ingenuidad suponer que simplemente con recurso a la ingeniería didáctica se podrían "descubrir" o "construir" esos axiomas y, más aún, justificar la necesidad de enunciarlos. Con la actividad propuesta sólo pretendimos brindar una cierta experimentación con las isometrías -definidas por el movimiento de un papel auxiliar- para favorecer la aproximación intuitiva a los elementos que caracterizan a las transformaciones rígidas del plano.

El ejercicio propuesto es el siguiente:

Sea R una recta, A una semirrecta de R, α un semiplano de borde R y T una transformación rígida. Designamos:

$$T(A) = A' \quad , \quad T(R) = R' \quad , \quad T(\alpha) = \alpha'$$

Cuáles son las transformaciones del plano, esencialmente distintas tales que:

a)$R = R'$
b) R no coincida con R'

Observación: el enunciado de este ejercicio merece algunas consideraciones:

- lo que se pide es la descripción del conjunto de transformaciones rígidas que tienen la propiedad de que una recta y su imagen coincidan. El inciso b) plantea un problema demasiado abierto pero es muy útil por la actividad que genera en los alumnos.

- la ambigüedad de la expresión "esencialmente distintas" estaba acotada por el contexto de experimentación de la clase. Por ejemplo, el desplazamiento del papel auxiliar -que define una translación- es "distinto" al giro del papel alrededor de un punto fijo.

La resolución es grupal y la corrección se realizó en el pizarrón, presentando un integrante de cada grupo una de las respuestas obtenidas, tratando de no repetir las ya expuestas. En cada caso, se analizaban el tipo de movimiento realizado con el papel auxiliar y las condiciones bajo las cuales se realizó ese movimiento. Las isometrías distinguidas intuitivamente a través de la experiencia con el papel de calcar son, hasta ese momento:

- dar vueltas el papel en el aire caracteriza a la simetría axial,

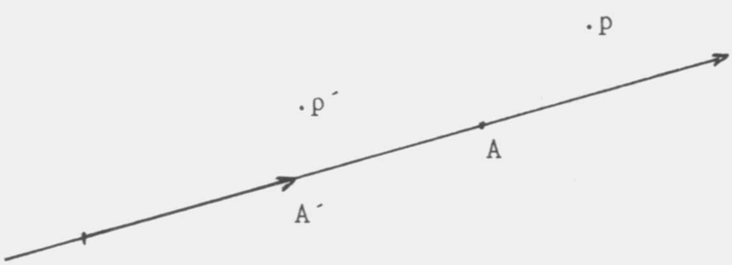
- deslizar el papel, representa una translación,
- fijar un punto y girar, una rotación,
- no mover el papel, la identidad.
- dar vueltas el papel según una recta y deslizar siguiendo esa misma recta, la reflexión deslizante.[1].

La caracterización de cada transformación en términos del movimiento del papel auxiliar tiene, para la clase, status de definición.

El primer inciso fue resuelto y corregido en una hora de clase. En itálica transcribimos la frase más significativa de las explicaciones dadas por los alumnos en el pizarrón. Designamos con "M." las intervenciones del profesor.

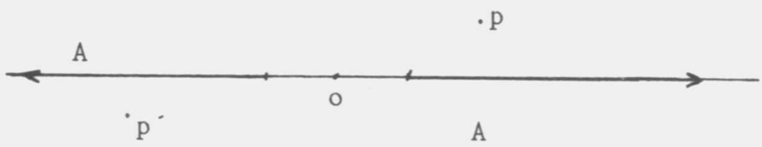
Las diferentes respuestas a ese primer inciso son:

i) Corrí la semirrecta sobre la recta.



[1]Recordamos que una reflexión deslizante es el producto de una reflexión sobre una recta A y una traslación paralela a dicha recta

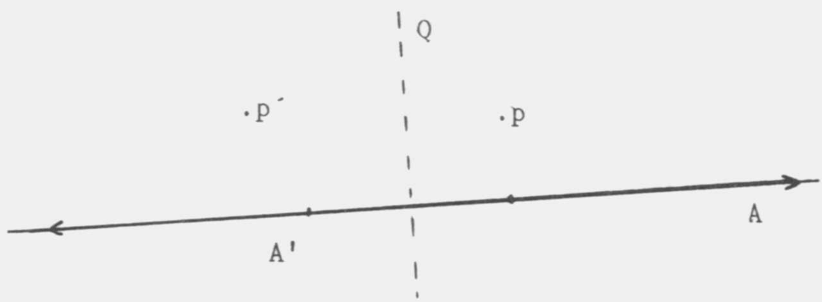
ii) Fijo 0 y giro A hasta llegar a la recta.



iii) Yo tengo una parecida, pero o es el origen de A.

Otro alumno agrega: *Es la de la prueba, una simetría axial de centro o* [2].

iv) Trazo Q perpendicular a R, y hago la simetría de eje Q.



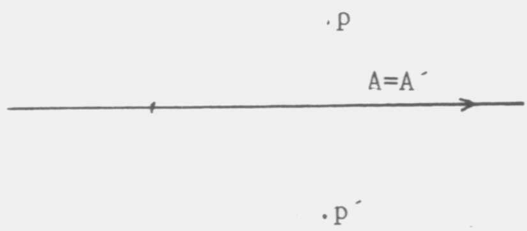
Como casos particulares de la misma situación dos grupos proponen:

Q podría pasar por el origen de A, y quedarían semirrectas opuestas.

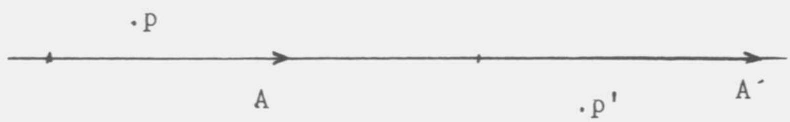
Y también podría ser que Q corte a A, y habría semirrectas de distinto sentido superpuestas en parte.

[2]Los alumnos recuerdan el ejercicio planteado previamente en una evaluación individual donde, a partir del enunciado de la "ley", se pedía caracterizar la transformación dada. En la instancia grupal de análisis de la tercera respuesta al ejercicio, se da el nombre y la notación correspondiente a la simetría central

v) Usé R como eje de simetría.



vi) Hice una reflexión deslizante.



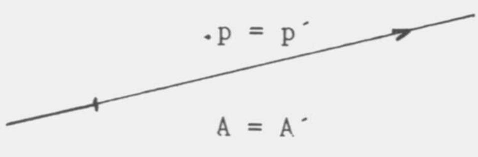
vii) Hice la identidad.

El alumno anotó:

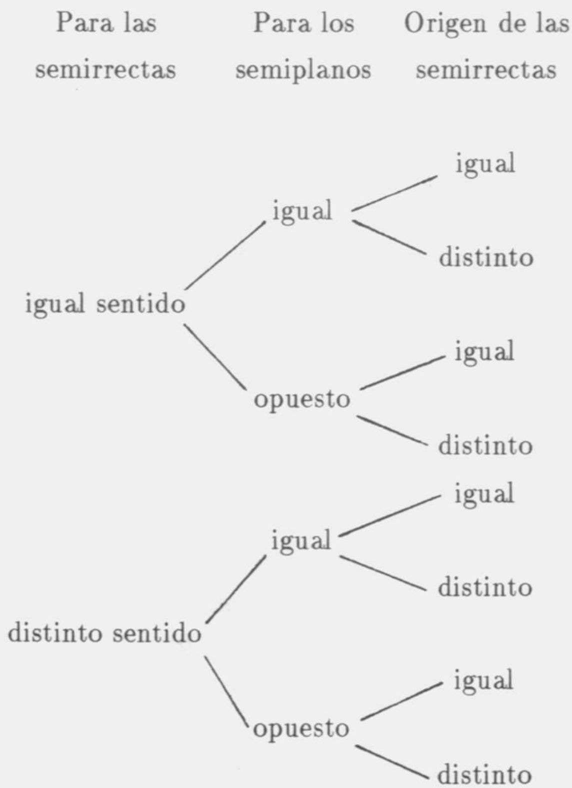
$I(A) = A'$

$I(\alpha) = \alpha'$

$I(R) = R'$



Al final de la clase una alumna preguntó cómo era posible saber si estaban analizados todos los casos. El profesor propone analizar las variables que nos habían permitido distinguir una transformación de otra. Esa alumna asumió el compromiso de pensar el problema, y en la clase siguiente expuso ante sus compañeros el esquema siguiente:



La explicación de su trabajo fue:

Tenemos que aplicar transformaciones a una semirrecta, la transformada puede tener el mismo sentido o diferente, y así lo demás.

La mayoría de los compañeros manifiesta no entender el diagrama, comienza entonces un recorrido por las diferentes ramas del árbol que conduce a establecer la correspondencia entre cada línea y una de las isometrías. Por ejemplo, para la primera línea:

Traslado el papel de calcar, así la semirrecta tiene igual sentido, el semiplano es el mismo y los orígenes son distintos. En esa rama anotamos "traslación".

En la quinta y sexta línea -semirrectas opuestas, conservación de semiplanosdebido a la consideración del origen de las semirectas, es necesario distinguir la posición del eje de simetría perpendicular a la recta R que contiene a la semirrecta A -según contenga o no al origen de la semirrecta A.

En la séptima línea, parecía haber un hueco:

Distinto sentido, distinto semiplano, igual origen. No sé cómo se llama.

Se vuelve el problema al trabajo grupal, y al cabo de unos minutos, un grupo propone:

Es una simetría central con centro en el origen de la semirrecta.

Al completar el esquema, la lista de transformaciones obtenida siguiendo las ramas del árbol (se utiliza la notación del ejercicio propuesto) es: identidad, translación, simetría axial (el eje es R), reflexión deslizante, simetría axial (eje K, $o \in K$, $K \perp R$), simetría axial (eje K, $o \notin K$, $K \perp R$), simetría central (centro o), simetría central (centro m, m distinto de o).

Los movimientos "esencialmente distintos" con el papel de calcar -tal como lo pedía el ejercicio- son entonces: la identidad, la traslación, la simetría axial. No estaba claro si correspondía incluir en esa lista reducida a la reflexión deslizante, *porque es una composición de otras que sí son distintas, y a la simetría central, porque es un movimiento igual que la rotación, pero siempre se da un giro de 180 grados.* La cuestión queda abierta.

Si bien el origen de las semirrectas es una variable no significativa desde el punto de vista matemático, en esa clase no analizamos la cuestión.

El abordaje del segundo inciso -determinar las isometrías que hacen R distinta de R'- creó un clima de incertidumbre. Las expresiones escuchadas eran:

Hay infinitas posibilidades.

Tan infinitas como en el inciso anterior, porque dependen del movimiento del papel.

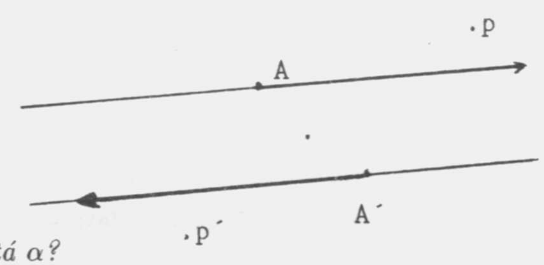
Se dan unos minutos de trabajo en grupos, se comentan luego las aproximaciones elaboradas, y una de ellas parece dar una pista para el abordaje al problema:

Nosotros pensamos que si R y su transformación son distintas, entonces pueden ser paralelas o cortarse.

La mayoría comienza a trabajar entonces sobre una de estas posibilidades, y de inmediato se plantea el problema de la identificación de los distintos semiplanos. En el caso en que R y $T(R)$ coincidan, se hablaba de un semiplano o de su opuesto. Con R no coincidente con $T(R)$, hay cuatro semiplanos en juego, y es necesario identificarlos. Se da la posibilidad entonces de introducir un nuevo criterio para clasificar las isometrías, según preserven o no la orientación del plano. Así en cada grupo, el profesor se detiene a explicar: por la semirrecta A, α está a la izquierda; si el semiplano determinado por la transformada de A, está la izquierda (derecha), decimos que la tranformación preserva la orientación del plano (o la invierte).

Los alumnos trabajaron sobre el problema durante una hora de clase, y al día siguiente se analizaron las respuestas en el pizarrón. Comenzamos por el caso en que la recta y su transformada son paralelas y distintas:

i) *Yo hice la transformación que nos tomó en la prueba, la simetría central.*



M.: Adónde está α?

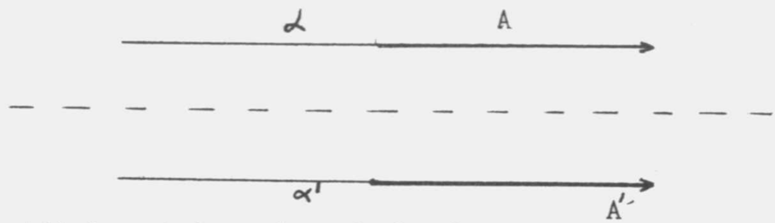
Lo hago con el papel de calcar, donde está p', ése es α'.α' tiene que tener borde en la transformada de R.

M.: Si marco un punto q entre las paralelas,' adónde estará su imagen?

En el mismo semiplano.

La respuesta resulta poco satisfactoria para la clase, por lo cual proponen analizar si esa transformación preserva o no la orientación del plano. De allí en más ese análisis se impone, y expresan el resultado simplemente a través de: "no cambia" o "cambia".

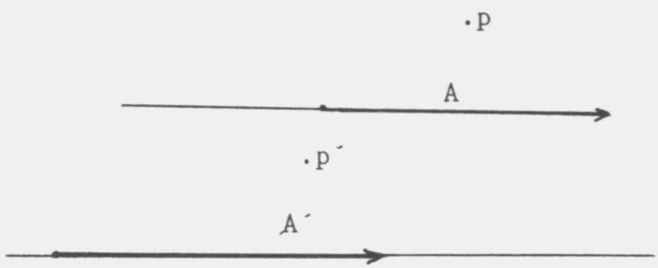
ii) *Hago una simetría axial con eje paralelo a la recta R.*



M.: Adónde está el transformado de α?

α está a la izquierda de A. α' está a la derecha de A'. Cambia.

iii) Deslizo el papel de calcar y queda una translación. No cambia.



La diversidad de posiciones obtenidas, aún cuando el movimiento realizado con el papel de calcar es "esencialmente el mismo" lleva a un alumno a plantear:

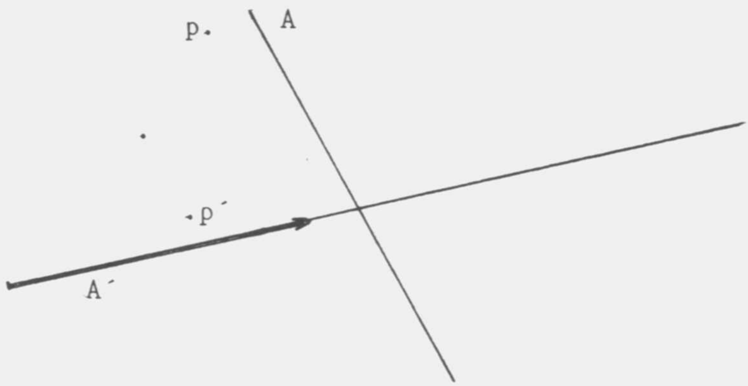
Yo sé que está mal lo que voy a decir, pero hay algo que no entiendo. La translación no es biyectiva, porque yo puedo poner el papel en cualquier parte.

En realidad cuestiona el hecho que la translación sea una función: dado que se puede desplazar el papel no importa cómo -siempre que ese movimiento no sea "esencialmente distinto"- la translación no es una función porque dada una figura, se pueden obtener infinitas imágenes.

Se devuelve la cuestión a la clase, durante algunos minutos discuten en grupos y, en una instancia colectiva surge la necesidad de precisar, para cada transformación, el elemento que la define, es decir, una figura que indique claramente cuál es la imagen de la semirrecta A y del punto p. En el caso que nos ocupa, introducimos entonces la noción de segmento orientado o vector.

Sin cuestionarse si los casos estaban agotados, comienza el análisis de las respuestas donde la recta y su transformada no son paralelas.

iv) Tomo un punto fijo, y tomo una cantidad de grados.



En esta frase colectiva, diferentes alumnos entablan un diálogo con el profesor que conduce a una mayor aproximación a las rotaciones. Está claro que estas reflexiones no constituyen un saber de la clase, se trata aún de saberes *personales sobre el tema en cuestión.*

M.:Por qué necesitas "la cantidad de grados"?

Para medir el giro.

M.: Hicimos ya ese movimiento con el papel de calcar?

Sí en la primera respuesta, nada más que no se da esa misma vuelta.

En la primera, es una simetría central.

En una simetría central damos media vuelta. No es igual.

M.: Quisiera que expliquen lo que hace esa transformación.

Gira el papel sobre el centro los grados que se quieran.

Claro, y en la simetría gira hasta 180 grados. El movimiento con la hoja es el mismo.

No sabemos adónde está la imagen porque no sé para qué lado giró.

Podríamos hacer un ángulo de 45 grados de modo que un lado coincida con A y el otro esté sobre este semiplano.

Muestra esa rotación de aproximadamente 1/8 de giro hacia la izquierda, usando el papel de calcar sobre el pizarrón.

M.: La transformación que necesita de un ángulo para ser definida es una rotación, y ahora están tratando de definir un ángulo orientado. Por qué es orientado?

Porque tiene sentido, es como el segmento orientado. Acá hay una semirrecta origen y una semirrecta final.

M.: Qué pasa con los semiplanos en una rotación?

α está a la izquierda de A, y α' a la izquierda de A'. No cambia.

Aparentemente no hay otras respuestas diferentes para el caso en que R y R' sean distintas. Se volverá sobre ello más adelante.

El interés del profesor es plantear una clasificación de las isometrías según dos propiedades: preserva la orientación del plano, tiene punto fijo. En el pizarrón, guía el cuestionario para construir el diagrama siguiente:

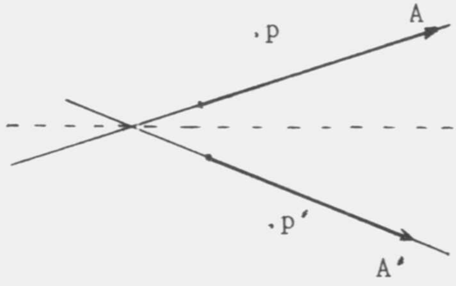
	Cambia	No cambia
con punto fijo	simetría	identidad, simetría central, rotación
sin punto fijo	reflexión deslizante	translación

Con esta nueva organización de la información, se retoma el inciso b) del ejercicio, y se propone comparar las cuatro respuestas obtenidas, con las isometrías registradas en el cuadro.

Después de unos minutos de trabajo grupal, los alumnos descubren la descripción de dos transformaciones:

- la simetría axial, de eje no paralelo a R,
- la reflexión deslizante, de eje no paralelo a R.

Con el recurso del papel de calcar, aplican estas transformaciones y obtienen construcciones del tipo:



La clase siguiente está destinada a la lectura y análisis de los axiomas que caracterizan a las transformaciones rígidas. La experiencia lograda con las isometrías constituye un buen material que permite contextualizar de alguna manera lo enunciado por los axiomas, aún cuando queda bajo la responsabilidad del profesor -tal como ya lo expresamos- lo esencial de ese objeto de estudio.

BIBLIOGRAFIA

- Aranega, C. - Tirao, J. - Vargas, J. (1985), Matemática 1. Guía para el docente, Editorial Kapelusz, Buenos Aires.
- Brousseau, Guy (1970), "Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?" en Enseñanza de las Ciencias, 8 (3), Valencia, España.
- Carmona, M. - Fregona, D. (1987), "Introducción a la geometría y a las transformaciones rígidas del plano", Informe al Conicet.
- Puig Adam, Pedro. Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos, (1947) Novena Edición 1969, Biblioteca Matemática, Madrid.
- Tirao, Juan, Geometría plana. Una introducción moderna, Desafíos Editores, Buenos Aires.
- Tirao, Juan. Matemática I. 1985, Ed. Kapelusz, Buenos Aires.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba.