Sucesiones definidas de manera recurrente

Leandro Cagliero

Comunmente se entiende que una sucesión de números reales o complejos está definida recurrentemente cuando cada término de ella está definido en función de los anteriores; y los primeros están definidos de "antemano". Veamos algunos ejemplos para comprender la idea

Ejemplo.

(I) $\alpha_n = \alpha_{n-2}^2 - 3\alpha_{n-3}$; $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$

De este modo tenemos

$\alpha_3 = \alpha_1^2 - 3\alpha_0 = 4 - 3 = 1,$

$\alpha_4 = \alpha_2^2 - 3\alpha_1 = 16 - 6 = 10,$

$\alpha_5 = \alpha_3^2 - 3\alpha_2 = 1 - 12 = -11$, etc.

Es decir la sucesión es $\{1, 2, 4, 1, 10, -11, \ldots\}$.

Intentemos dar una idea más formal de este concepto. En lo que sigue denotaremos con $\mathbf{F}$ al cuerpo de los números reales $\mathbf{R}$ o al cuerpo de los números complejos $\mathbf{C}$ y consideraremos el problema de hallar sucesiones $\{\alpha_i\}$ en $\mathbf{F}$ que satisfagan:

$$\begin{cases} \alpha_n = \Phi(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_{n-k}, n) \\ \alpha_0 = A_0; \ldots; \alpha_{k-1} = A_{k-1}. \end{cases}$$

donde $\Phi : \mathbf{F}^k \mathrm{x} \mathbf{N} \to \mathbf{F}$ es una función arbitraria y $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ son valores prefijados en $\mathbf{F}$.

Llamaremos a:

(1) $$x_n = \Phi(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}, n)$$

ecuación de recurrencia y a

$$x_0 = A_0, x_1 = A_1; \dots ; x_{k-1} = A_{k-1} \tag{2}$$

condiciones iniciales.

Llamaremos solución de la ecuación (1) a cualquier sucesión $\{\alpha_i\}$ en $\mathbf{F}$ que satisfaga $\alpha_n = \Phi(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_{n-k}, n)$ $\forall n \geq k$. Si además $\alpha_0 = A_0, \dots, \alpha_{k-1} = A_{k-1}$ diremos que tenemos la sucesión definida recurrentemente por (1) y (2).

Ejemplos.

(II) $x_n = x_{n-1} + a$; $\Phi : \mathbf{F}\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, n) = t + a$.

(III) $x_n = ax_{n-1}$; $\Phi : \mathbf{F}\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, n) = at$.

(IV) Ecuación de Fibonacci:

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$; $\Phi : \mathbf{F}^2\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, s, n) = t + s$.

(V) $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$; $\Phi : \mathbf{F}^2\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, s, n) = 3t - 2s$. Notemos que $\alpha_n = 2^n$ y $\beta_n = 1^n = 1$ son soluciones.

(VI) $x_n = x_{n-1} + n$; $\Phi : \mathbf{F}\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, n) = t + n$. Notemos que $\alpha_n = \sum_{j=0}^{n} j$ es solución

(VII) $x_n = x_{n-1} + n^2$; $\Phi : \mathbf{F}\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, n) = t + n^2$. Notemos que $\alpha_n = \sum_{j=0}^{n} j^2$ es solución

(VIII) $x_n = nx_{n-1}$; $\Phi : \mathbf{F}\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, n) = nt$, notemos que $x_n = n!$ es solución.

(IX) $x_n = \sqrt{x_{n-1}^2 + 2n}$, $\Phi : \mathbf{F}\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, n) = \sqrt{t^2 + 2n}$. Notemos que $\alpha_n = \sqrt{n(n+1)}$ es solución.

(X) $x_n = x_{n-1} \log(x_{n-2}) + n\text{tg}(x_{n-1})$, $\Phi : \mathbf{F}\text{x}\mathbf{N} \to \mathbf{F}$, $\Phi(t, s, n) = t\log(s) + n\ \text{tg}(t)$

Hagamos unas observaciones con respecto a los ejemplos anteriores.

* Si tomamos $\alpha_n = a^n$, resulta que $\{\alpha_n\}$ es solución de la ecuación (III). En particular, $\alpha_n = 2^n$ es solución de $x_n = 2x_{n-1}$ y de la ecuación (V); las cuales son ecuaciones absolutamente distintas; y por lo tanto se ve que una sucesión puede satisfacer varias recurrencias distintas.

* En el ejemplo (V) dimos dos soluciones distintas de la ecuación. Más aún $\gamma_n = a\alpha_n + b\beta_n = a2^n + b$ es solución de $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ $\forall a, b \in \mathbf{F}$, y por lo tanto la combinación lineal de solucion es solución.

* La combinación lineal de soluciones, no siempre es solución. Por ejemplo $\alpha_n = an$ y $\beta_n = an + 1$ son soluciones de (II), sin embargo $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n = 2an + 1$ no es solución. Tampoco lo serán en las ecuaciones (I), (IX) o (X).

El hecho de que combinaciones lineales de soluciones sea o no solución es importante, y es por ello que intentaremos ver en que casos se puede afirmar este hecho.

Los ejemplos que van desde el (II) hasta el (VIII) tienen una particularidad en común. En todos existe un $k \in \mathbf{N}$ y funciones $\varphi_i : \mathbf{N} \to \mathbf{F}$ y $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{F}$ tales que los ecuaciones son de la forma:

$$(3) \quad x_n = \varphi_1(n)x_{n-1} + \ldots + \varphi_k(n)x_{n-k} + \psi(n) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(n)x_{n-i} + \psi(n).$$

Es decir la $\Phi : \mathbf{F}^k \mathrm{x} \mathbf{N} \to \mathbf{F}$ es de la forma

$$\Phi(t_1, \ldots, t_k, n) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(n)t_i + \psi(n)$$

En efecto, tenemos que

$$
\begin{array}{rllll}
\text{(II)} & k=1 & \varphi \equiv 1 & \psi \equiv a & \\
\text{(III)} & k=1 & \varphi \equiv & \psi \equiv 0 & \\
\text{(IV)} & k=2 & \varphi_1 \equiv 1 & \varphi_2 \equiv 1 & \psi \equiv 0 \\
\text{(V)} & k=2 & \varphi_1 \equiv 3 & \varphi_2 \equiv -2 & \psi \equiv 0 \\
\text{(VI)} & k=1 & \varphi \equiv 1 & \psi(n) = n & \\
\text{(VII)} & k=1 & \varphi \equiv 1 & \psi(n) = n^2 & \\
\text{(VIII)} & k=1 & \varphi(n) = n & \psi \equiv 0. &
\end{array}
$$

Por otro lado, tanto el ejemplo (I), como el (IX) o el (X) son de naturaleza distinta.

Definiciones. *A las ecuaciones del tipo (3) los llamaremos ecuaciones lineales de dim = k. En el caso particular en que* $\psi \equiv 0$ *diremos que la ecuación es homogénea.*

Si $x_n = \varphi_1(n)x_{n-1} + \ldots + \varphi_k(n)x_{n-k} + \psi(n)$ *es una ecuación lineal no homogénea, a la ecuación* $x_n = \varphi_1(n)x_{n-1} + \ldots + \varphi_k(n)x_{n-k}$ *la llamaremos ecuación homogénea asociada a la primera.*

Los problemas lineales son, sin dejar de ser complicados, mucho más sencillos que los de los ejemplos (I), (IX) o (X), y son también a los que les prestaremos más atención.

Enunciemos un resultado general para todas las ecuaciones y luego un teorema sobre las ecuación lineales.

Lema. *Cada problema de la forma*

$$
\begin{cases}
x_n = \Phi(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}, n) \\
x_0 = A_0, \ldots, x_{k-1} = A_{k-1}.
\end{cases}
$$

tiene solución y es única.

Demostración. Queremos una sucesión $\{\alpha_n\}$ que satisfaga

$$\begin{cases} \alpha_n = \Phi(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-k}, n) \\ \alpha_0 = A_0, \ldots, \alpha_{k-1} = A_{k-1} \end{cases}$$

Construyamosla pues de manera recurrente. Para ello debemos comenzar definiendo $\alpha_0 = A_0, \ldots, \alpha_{k-1} = A_{k-1}$, luego usando la ecuación definimos $\alpha_k = \Phi(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \ldots, \alpha_0, k)$, $\alpha_{k+1} = \Phi(\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1, k+1)$, y así sucesivamente.

Así obtenemos una sucesión $\{\alpha_n\}$ que es solución del problema. Resta ver que es única. Supongamos que hubiera otra sucesión $\{\beta_n\}$ que es solución, entonces $\beta_i = \alpha_i \ \forall\, i = 0, \ldots, k-1$

Procedamos ahora por inducción. Es claro que los primeros términos coinciden por definición. Supongamos entonces que $\beta_i = \alpha_i \ \forall\, i < n$. y veamos que $\beta_n = \alpha_n$. En efecto, la hipótesis inductiva implica que

$$\alpha_n = \Phi(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-k}, n) = \Phi(\beta_{n-1}, \ldots, \beta_{n-k}, n) = \beta_n$$

y por lo tanto $\{\alpha_n\} = \{\beta_n\}$ □

Teorema. *Dado una ecuación lineal, entonces:*

i) Si es homogénea el conjunto de soluciones es un **F***-espacio vectorial de dimensión k. Es decir si* $\{\alpha_n\}$ *y* $\{\beta_n\}$ *son soluciones entonces* $\gamma_n = a\alpha_n + b\beta_n$ *es solución* $\forall\, a, b \in \mathbf{F}$. *(En particular* $\gamma_n \equiv 0$ *es solución).*

ii) Si no es homogénea, el conjunto de soluciones es en **F***-espacio afin de dim = k. Es decir si* $\{\alpha_n\}$ *es una solución entonces toda otra solución es de la forma* $\gamma_n = \beta_n + \alpha_n$*, donde* β_n *es solución de la ecuación homogénea asociada.*

Demostración.

i) Supongamos $\psi \equiv 0$, y sea $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ solución, entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_n = a\alpha_n + b\beta_n &= a\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(n)\alpha_{n-i} + b\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(n)\beta_{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i(n)(a\alpha_{n-i} + b\beta_{n-i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i(n)\gamma_{n-i}
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\{\gamma_n\}$ solución.

Calculemos la dimensión. Para esto veamos que el conjunto de soluciones es isomorfo a $\mathbf{F}^k$. Definamos $\Gamma(\{\alpha_n\}) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$. Es claro que Γ y lineal, además es biyectiva en virtud del lema anterior. A esta función Γ la usaremos varias veces.

ii) Sea $\{\alpha_n\}$ solución de la ecuación $x_n = \sum \varphi_i(n)x_{n-i} + \psi(n)$

Si $\{\beta_n\}$ es solución de la ecuacón homogénea asociada entonces $\gamma_n = \beta_n + \alpha_n$ es solución de $x_n = \sum \varphi_i(n)x_{n-i} + \psi(n)$ (verificar).

Recíprocamente, si $\{\gamma_n\}$ es otra solución de $x_n = \sum \varphi_i(n)x_{n-i} + \psi(n)$ entonces $\beta_n = \gamma_n - \alpha_n$ es solución de la ecuación homogénea asociada (verificar). De este modo queda probado el teorema $\square$

Para ilustrar este teorema volvamos al ejemplo (V). En éste teníamos la ecuación $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ la cual es homogénea de dim $= 2$ y por lo tanto sus soluciones forman un $\mathbf{F}$-espacio vectorial de dimensión dos. Habíamos dicho también que $\alpha_n = 2^n$ y $\beta_n = 1$ eran soluciones.

Según definimos en el teorema $\Gamma(\{\alpha_n\}) = (1, 2)$ y $\Gamma(\{\beta_n\}) = (1, 1)$; lo cual muestra que $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ son linealmente independientes y como el espacio de soluciones tiene dimensión dos podemos concluir que *todas* las soluciones son de la forma $a\alpha_n + b\beta_n$.

Por ejemplo si queremos obtener la solución del problema

$$(4) \qquad \begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \\ x_0 = 4 \quad x_1 = -2 \end{cases}$$

sólo debemos hallar a y b tales que $a(1,2) + b(1,1) = (4,-2)$, es decir debemos resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + b = -2. \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $a = -6$ y $b = 10$ y por lo tanto la única solución de (4) es $\gamma_n = -6.2^n + 10$.

Supongamos ahora que tenemos la ecuación

$$(5) \qquad x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} - 1.$$

Esta es una ecuación no homogénea de dim $= 2$ cuya ecuación homogénea asociada es la que acabamos de resolver y por lo tanto basta hallar sólo una solución de (5) para conocer todas sus soluciones.

Si $\gamma_n = n$ es fácil ver que es una solución de (5). De este modo, según nos dice el teorema toda solución de (5) será de la forma

$$\delta_n = a2^n + b + n;$$

con $a, b \in \mathbf{F}$. En particular la única solución de

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} - 1 \\ x_0 = -2, \quad x_1 = 2 \end{cases}$$

es $\delta_n = 3.2^n - 5 + n$.

Luego de esta breve introducción, apuntaremos a resolver algunas ecuaciones. Encararemos, en este orden, los tres siguientes problemas:

(A) $x_n = x_{n-1} + p(n)$ donde p es un polinomio.

(B) $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}$, es decir $\varphi_i \equiv ctes = a_i \ \forall i = 1, \ldots, k$ y $\psi \equiv 0$.

(C) Algunos detalles generales sobre los casos no homogéneos.

(A) Aquí nos dedicaremos a estudiar la ecuación

$$x_n = x_{n-1} + p(n). \tag{6}$$

Lo primero que podemos notar es que (6) es una ecuación no homogénea cuya ecuación homogénea asociada es $x_n = x_{n-1}$ la cual tiene como únicas soluciones a las constantes.

De esta manera nuestro problema consiste en hallar sólo una solución de (6), pues sumando constantes arbitrarias, obtendremos todas sus soluciones.

Comencemos suponiendo que $p(n) = a \quad \forall n \in \mathbf{N}$ con lo que nuestra ecuación queda

$$x_n = x_{n-1} + a \tag{7}$$

Lo más natural es empezar definiendo la solución de esa ecuación inductivamente: $\alpha_0 = 0 \ \ \alpha_1 = a \ \ \alpha_2 = a + a = 2a \ \ \alpha_3 = 2a + a = 3a$, etc.

Esto nos hace imaginar que $\alpha_n = n.a$ es la solución, y en efecto se puede concluir que lo es probándolo por inducción y por lo tanto toda solución de (7) será $\gamma_n = \alpha_n + A = na + A$ donde A es una constante arbitraria.

Otra manera interesante de imaginar la solución de la ecuación (7) es la siguiente: Supongamos que existiera una $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivable, tal que $\{f(n)\}$ sea solución, es decir $f(n) - f(n-1) = a \ \forall n$.

Entonces aplicando el teorema del valor medio obtenemos que $\forall n \in \mathbf{N}$, habrá un $\xi_n \in (n-1, n)$ de modo tal que $f'(\xi_n)$ sea igual a a.

Esto nos podría hacer suponer que $f'(t) \approx a \quad \forall t \in \mathbf{R}$ y por lo tanto $f(t) \approx at + A$ lo cual diría que $f(n) \approx an + A$.

En este caso afortunadamente, no sólo obtuvimos una aproximación, sino la solución exacta. En próximos ejemplos veremos que ésto no siempre ocurre.

Supongamos ahora que por ejemplo $p(n) = n$. Así la ecuación no queda

$$x_n = x_{n-1} + n. \tag{8}$$

Nuevamente, si pensamos inductivamente, llegamos a que $\alpha_n = 0+1+2+ \ldots + n = \sum_{j=0}^{n} j = \dfrac{n(n+1)}{2}$ es una solución y por lo tanto $\gamma_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + A$ serán todas las soluciones.

Si suponemos ahora que existe una $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivable tal que $\{f(n)\}$ es solución, entonces $f(n) - f(n-1) = n \ \forall n$ y nuevamente por el teorema del valor medio tendremos que $\forall n \exists \xi_n \in (n-1, n)$ tal que $f'(\xi_n) = n$ de lo cuál podemos imaginar que $f'(t) \approx t \ \forall t$ lo cual diría que $f(t) \approx \dfrac{t^2}{2} + A$.

Esto nos dice que $f(n) \approx \dfrac{n^2}{2} + A$ lo cual, según acabamos de ver, es efectivamente cierto pues las soluciones eran $\alpha_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + A$ las cuales son parecidas a $\dfrac{n^2}{2} + A$.

Hagamos una observación al respecto. Esta técnica de pensar que la sucesión solución es un función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ restingida a $\mathbf{N}$ no nos resultó ser de gran utilidad en los dos casos anteriores, ya que fue muy fácil obtener la solución inductivante. Cabe destacar, sin embargo, que realmente nos hubiera dado una idea aproximada de como es la solución. Por ejemplo para (8) nos podría haber dado la idea de que la solución es un polinomio de grado 2 con coeficiente líder igual a 1/2. Inclusive ya veremos más adelante que esta método nos será de mayor utilidad.

Encaremos ahora el problema en general. Supongamos pues que p es un polinomio arbitrario. Como ya mencionamos anteriormente nos bastará encontrar una solución de la ecuación

$$x_n = x_{n-1} + p(n).$$

Para ello nos será de utilidad introducir algunos polinomio especiales. Sean $\rho_k(t) = \dfrac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-(k-1))}{k!}$ si $k \geq 1$ y $\rho_0(t) = 1$ $\forall t$.

Así tenemos para cada k un polinomio de grado k cuyas raíces son $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ para cada $k \geq 1$.

Destaquemos dos propiedades de estos polinomios:

Proposición. $i)$ *$\rho_k(n) = \binom{n}{k}$ = número combinatorio de n en k $\forall n, k$ con $n \geq k$.*

$ii)$ *$\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{k-1}\}$ son k polinomios linealmente independientes en el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq k-1$ (el cual tiene dimensión k) y por lo tanto forman una base de él. En otras palabras todo polinomio de grado $\leq k-1$ y combinación lineal única de los polinomios $\{\rho_0, \ldots, \rho_{k-1}\}$*

Prueba.

$i)$ Es directo.

$ii)$ Supongamos que $0 = \sum_{i=0}^{k-1} r_i \rho_i(t)$ $\forall t$ y veamos que $r_i = 0$ $\forall i$.

Comencemos evaluando la igualdad en $t = 0$. Como 0 es raíz de ρ_i

cualquiera sea $i \geq 1$, la igualdad queda $0 = r_0\rho_0(0) = r_0$ y por lo tanto queda que $0 = \sum_{i=1}^{k-1} r_i\rho_i(t) \;\; \forall\, t$ (notemos que no aparece $r_0\rho_0$ en la suma).

Evaluemos ahora en $t = 1$. Como 1 es raíz de $\rho_i \;\; \forall\, i \geq 2$ obtenemos que $0 = r_1\rho_1(1) = r_1$ y por lo tanto $0 = \sum_{i=2}^{k-1} r_i\rho_i(t) \;\; \forall\, t$.

Así sucesivamente podemos obtener que todos los r_i son cero para cualquier $i = 0, \ldots, k-1$ y concluir que los polinomios son linealmente independientes $\square$

Para obtener otras propiedades de estos polinomios recordemos que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

(Ver por ejemplo *Notas de Algebra I* de E. Gentile Cap. II pág. 74). Esta igualdad es lo mismo que decir que $\rho_{k+1}(n+1) = \rho_{k+1}(n) + \rho_k(n)$ (aún cuando no sea $n \geq k$ es muy fácil probarlo).

Así si fijamos un k y definimos $\alpha_n = \rho_{k+1}(n+1)$ tendremos que $\{\alpha_n\}$ es solución de $x_n = x_{n-1} + p(n)$ donde p es ρ_k.

Con ésto hemos aprendido a resolver la ecuación (6) para una gran cantidad de polinomios, y el sólo hecho de saber resolver las ecuaciones para estos polinomios nos hará resolver la ecuación para cualquier polinomio.

Notemos que si $\{\alpha_n\}$ es solución de $x_n = x_{n-1} + p(n)$ y $\{\beta_n\}$ es solución de $x_n = x_{n-1} + q(n)$ entonces $\gamma_n = a\alpha_n + b\beta_n$ es solución de $x_n = x_{n-1} + (ap(n) + bq(n))$.

Es decir la combinación lineal de soluciones con distintos polinomios solucionan la ecuación con la combinación lineal de los polinomios. Por lo tanto, para resolver $x_n = x_{n-1} + p(n)$ con p un polinomio de grado $\leq k-1$

sólo debemos escribir a p de la forma $\sum_{i=0}^{k-1} r_i \rho_i$ y así $\gamma_n = \sum_{i=0}^{k-1} r_i \rho_{i+1}(n+1)$ será una solución de $x_n = x_{n-1} + p(n)$ y en consecuencia toda otra solución será de la forma $\sum_{i=0}^{k-1} r_i \rho_{i+1}(n+1) + A$ donde A es una constante arbitraria (recordar que $x_n \equiv A$ es la solución para de la ecuación homogénea).

De esta manera sabemos resolver el problema

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + p(n) \\ x_0 = A \end{cases}$$

y una observacón interesante es que por saber resolver ese problema sabemos calcular $\sum_{n=0}^{N} p(n)$ para cualquier polinomio.

Ejemplo. Calcular $\sum_{j=0}^{n} j^2$.

Tomemos $p(n) = n^2$ y resolvamos el problema

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + n^2 \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Como $\mathrm{gr}(p) = 2$ tomemos ρ_0, ρ_1 y ρ_2. Es fácil comprobar que

$$p(n) = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = 2\rho_2(n) + 1\rho_1(n) + 0\rho_0(n)$$

y por lo tanto $\alpha_n = 2\rho_3(n+1) + 1.\rho_2(n+1)$ es una solución de $x_n = x_{n-1} + n^2$ y es justo la que buscamos pues $\alpha_0 = 2\rho_3(1) + \rho_2(1) = 0$.

Calculemos explícitamente α_n.

$$\alpha_n = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{2(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2}$$

y desarrollando obtenemos que $\alpha_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ que efectivamente, es conocida como la fórmula de la suma de los primeros n cuadrados.

(B) Sean $k \in \mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{F}$ y $A_0, \ldots, A_{k-1} \in \mathbf{F}$. Nuestro objetivo será resolver el problema:

$$(9) \qquad \begin{cases} x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} \\ x_0 = A_0, \ldots, x_{k-1} = A_{k-1}. \end{cases}$$

Este es un problema homogéneo y por lo tanto las soluciones forman un espacio vectorial de dim $= k$, es decir bastará encontrar k soluciones linealmente independientes para obtener cualquier solución del problema.

Empecemos por ejemplo con la ecuación de Fibonacci: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. A diferencia de lo que nos sucedía en la parte **(A)**, en este caso no se puede descubrir facilmente por inducción alguna solución; sin embargo veamos que sucede si pensamos que existe una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivable tal que $\{f(n)\}$ es solución. Entonces $\frac{f(n)-f(n-2)}{2} = \frac{f(n-1)}{2}$ cualquiera sea n y por lo tanto para cada n existe un ξ_n en el intervalo $(n-2, n)$ con la propiedad de que $f'(\xi_n) = \frac{f(n-1)}{2}$. Esto puede hacernos suponer que $f'(t) \approx \frac{f(t)}{2}$ con lo que $f(t) \approx e^{t/2} = (\sqrt{e})^t$ y por lo tanto $f(n) \approx (\sqrt{e})^n$ sería una solución de la ecuación de Fibonacci.

Lamentablemente $(\sqrt{e})^n$ no es solución de la ecuación de Fibonacci, sin embargo a partir de esto podríamos sospechar que existe un $t \in \mathbf{R}$ tal que t^n si es solución.

Ahora t^n es solución si y sólo si $t^n = t^{n-1} + t^{n-2}$ y en consecuencia, salvo que $t = 0$, y enste hecho es equivalente a que t sea raíz del polinomio

$t^2 = t + 1$, es decir $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

En resumen hemos obtenido que $\alpha_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ y $\beta_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ son soluciones.

Resulta interesante observar que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ mientras que $\sqrt{e} \approx 1.65$, lo cual muestra que el método de la función no nos dio una solución tan equivocada.

Observemos ahora que $\Gamma(\{\alpha_n\}) = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ y que $\Gamma(\{\beta_n\}) = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, con lo que $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son soluciones de la ecuación de Fibonacci linealmente independientes, y como en ésta $k = 2$ resulta que ellas generan todas las soluciones de la ecuación de Fibonacci. Por ejemplo, para obtener *la sucesión de Fibonacci*, cuyos valores iniciales son cero y uno debemos hallar la solución de

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1. \end{cases}$$

y en consecuencia debemos hallar a y b tales que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + b\,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{cases}$$

Resolviendo ese sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos que $a = -b = \frac{1}{\sqrt{5}}$, y por lo tanto la sucesión de Fibonacci es:

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Ataquemos ahora el problema general e intentemos hallar una solución de la ecuación

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n-j}.$$

En esta parte nos será más útil trabajar en el cuerpo de los números complejos $\mathbf{C}$ debido a la necesidad que tendremos de hallar raíces de polinomios.

Supongamos como antes, que existe un $z \in \mathbf{C}$ tal que $\{z^n\}$ es solución. Esto sucederá si y sólo si

$$z^n = \sum_{j=1}^{k} a_j z^{n-j} \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \quad o \\ z^k = \displaystyle\sum_{j=i}^{k} a_j z^{k-j}. \end{array} \right.$$

lo cual es equivalente a decir z es raíz de $p(z) = z^k - a_1 z^{k-1} - \ldots - a_{k-1} z - a_k$ salvo que $z = 0$.

Supongamos que p tiene sus k raíces $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ distintas las cuales nos darán k soluciones distintas $\{\sigma_j^n\}$ con $j = 1, \ldots, k$. Ahora aplicando Γ a cada una de ellas obtenemos que $\Gamma(\{\sigma_j^n\}) = (1, \sigma_j, \sigma_j^2, \ldots, \sigma_j^{k-1})$.

Dejamos como ejercicio chequear que el conjunto de vectores

$$\{(1, \sigma_1, \ldots, \sigma_1^{k-1}); (1, \sigma_2, \ldots, \sigma_2^{k-1}); \ldots; (1, \sigma_k, \ldots, \sigma_k^{k-1})\}$$

es linealmente independiente. Como ayuda digamos que basta ver que el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1, \sigma_1, \ldots, \sigma_1^{k-1} \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ 1, \sigma_k, \ldots, \sigma_k^{k-1} \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

tiene sólo la solución $\vec{v} = 0$.

Como consecuencia obtenemos que el conjunto $\{\, \{\sigma_j^n\}_{n=0}^{\infty} \}_{j=1}^{k}$ es linealmente independiente y genera todas las soluciones del problema, es decir que si resolvemos el sistema de k ecuaciones con k incógnitas

$$\begin{pmatrix} 1, \dots\dots, 1 \\ \sigma_1, \dots\dots, \sigma_k \\ \vdots \qquad \vdots \\ \sigma_1^{k-1}, \dots, \sigma_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{k-1} \end{pmatrix}$$

obtendremos que $\gamma_n = \sum_{i=1}^{k} r_i \sigma_i^n$ es la única solución de

$$\begin{cases} x_n = \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n-j} \\ x_0 = A_0, \dots, x_{k-1} = A_{k-1} \end{cases}$$

Hasta aquí habíamos supuesto que las raíces del polinomio p eran todas distintas, pero bien podría haber sucedido que p no tenga todas las raíces distintas sino que tenga raíces múltiples. Para sortear esta dificultad introduciremos otra forma de ver el problema.

Sea $T : \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^k$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica de $\mathbf{C}^k$ es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

y planteemos el problema vectorial

$$(10) \qquad \begin{cases} \vec{x}_n = T\vec{x}_{n-1} \\ \vec{x}_0 = (A_0, A_1, \dots, A_{k-1}) = \vec{A}_0 \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que si $\{\alpha_n\}$ es solución de (9) entonces

$$\vec{\beta}_n = (\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k-1})$$

es solución de (10) (queda como ejercicio) y recíprocamente si $\{\vec{\beta}_n\}$ es solución de (10), $\alpha_n = \pi(\vec{\beta}_n)$ = primera coordenada de $\vec{\beta}_n$ es solución de (9).

Las soluciones de (10) son muy sencillas de encontrar. En efecto, la solución del problema es

$$\vec{\beta}_n = T^n \vec{A}_0$$

donde T^n significa componer T n veces con sigo misma o elevar a la n la matriz de T.

Como lo que queremos es conocer la primera coordenada de $\{\vec{\beta}_n\}$ necesitamos conocer explícitamente T^n $\forall n$, y ésto no es tan sencillo.

Para ésto consideremos la descomposición de Jordan de T, es decir tomemos P la matriz tal que $T = P(D+N)P^{-1}$ con D = matriz diagonal y N = matriz nilpotente con $DN = ND$. Para la existencia de esta descomposición es necesario trabajar en el cuerpo **C**. (Ver por ejemplo *Hoffman-Kunze*, **p 221**).

Ahora $T^n = P(D+N)^n P^{-1}$, y como D y N conmutan,

$$(D+N)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{n-j} N^j.$$

Las potencias de una matriz diagonal son sencillas de calcular pues es simplemente elevar a dicha potencia cada elemento de la diagonal.

Para el caso de N tenemos que por ser nilpotente (es decir que $N^l = 0$ para algún $l \in \mathbf{N}$) sólo hay que calcular una cantidad finita de potencias.

Hagamos unas observaciones. Las mayores dificultades de este proceso está en hallar D, N y P y luego encontrar las potencias de $D + N$.

Para hallar D y N es necesario calcular las raíces del polinomio característico de T que es exactamente el polinomio $p(z) = z^k - a_1 z^{k-1} - \ldots - a_{k-1}z - a_k$ (*Hoffman-Kunze*, **p 228**); mientras que para hallar P hay que resolver sistemas de ecuaciónes lineales.

Si este polinomio tiene sus k raíces distintas entonces $N = 0$ pues T es diagonalizable y en consecuencia el trabajo de calcular D y P es el mismo que tendríamos que hacer si resolviéramos el problema mediante el método de calcular una base.

Si $p(z)$ no tiene k raíces distintas, podría seguir siendo $N = 0$ y no haber problema en calcular las potencias de $D + N = D$. Si $N \neq 0$ la dificultad será cada vez mayor a medida que el k sea grande.

Ejemplo.

Consideremos

$$(11) \qquad \begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \\ x_0 = A_0, \quad x_1 = A_1 \end{cases}$$

En este problema $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$, con lo cual vemos que p tiene al 1 como raíz doble. Calculemos entonces su sistema matricial. Este queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Hagamos todo el procedimiento completo para ver como funciona lo estudiado hasta recién. Si tomamos

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos que

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = T$$

y por lo tanto

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $T^n = P(D+N)^n P^{-1}$. Calculemos las respectivas potencias de D y N.

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \qquad N^2 = 0 \quad \forall\, n.$$

y de este modo queda que

$$(D+N)^n \;= \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} D^{n-j}N^j = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} D^n N^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} D^{n-1}N$$

$$= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto la solución de (11) es

$$\alpha_n = \pi_1\left[P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}\right] = \pi_1\left[\begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}\right]$$

es decir que $\alpha_n = n(A_1 - A_0) + A_0$ es la única solución del problema (11).

(C) En esta última parte estudiaremos muy brevemente lo que sucede con algunas ecuaciones lineales no homogéneas más generales que las de la parte **(A)**. Recordemos que llamábamos ecuación lineal no homogénea a una de la forma:

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(n) x_{n-i} + \psi(n) \tag{12}$$

donde $0 \neq \psi : \mathbf{N} \to \mathbf{F}$, es decir $\{\psi(n)\}$ es una sucesión no idénticamente cero. Supongamos que ψ no sólo es una simple sucesión, sino que a la vez es solución de una ecuación lineal homogénea

$$x_n = \sum_{i=1}^{s} f_i(n) x_{n-i} \tag{13}$$

Ahora, si α_n es una solución de (12), entonces

$$\begin{aligned}
f_1(n)\alpha_{n-1} &= f_1(n)\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(n-1)\alpha_{n-1-j} + f_1(n)\psi(n-1)\\
f_2(n)\alpha_{n-2} &= f_2(n)\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(n-2)\alpha_{n-2-j} + f_2(n)\psi(n-2)\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
f_s(n)\alpha_{n-s} &= f_s(n)\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(n-s)\alpha_{n-s-j} + f_s(n)\psi(n-s)
\end{aligned}$$

y sumando todas las igualdades obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} f_i(n)\alpha_{n-i} &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} f_i(n)\varphi_j(n-i)\alpha_{n-i-j} + \sum_{i=1}^{s} f_i(n)\psi(n-i)\\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} f_i(n)\varphi_j(n-i)\alpha_{n-i-j} + \psi(n).
\end{aligned}$$

Ahora como $\psi(n) = \alpha_n - \sum_{j=1}^{k}\varphi_j(n)\alpha_{n-j}$ tenemos que $\{\alpha_n\}$ satisface la ecuación homogénea:

$$x_n = \sum_{i=1}^{s} f_i(n)x_{n-i} + \sum_{j=1}^{k}\varphi_j(n)x_{n-j} - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} f_i(n)\varphi_j(n-i)x_{n-i-j} \tag{14}$$

cuya dimensión es $s + k$. De esta manera hemos descubierto que cualquier solución de la ecuación lineal no homogénea de dimensión k (12) resulta ser solución de una ecuación lineal homogénea pero de dimensión $s + k$ donde s es la dimensión de la ecuación lineal homogénea que satisface el término no homogéneo de la ecuación (12). El hecho de que se nos agrande la dimensión responde a que si bien toda solución de (12) es solución de (14), no toda solución de (14) lo es de (12). En particular $\alpha_n = 0$ es solución de (14) pero no lo es de (12).

De todos modos la ventaja de esto está, por ejemplo, en el caso en que $\varphi_j \equiv a_j, f_i \equiv b_i$ pues en este caso la ecuación (14) quedará del tipo de las que ya sabemos resolver y una vez halladas todas las soluciones de (14) es cuestión de tratar de encontrar entre todas ellas alguna que sea solución de (12). Recordemos que con sólo hallar una solución podemos hallar todas.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación

$$x_n = ax_{n-1} + b^n \tag{15}$$

donde a y b son números distintos de $\mathbf{F}$. En este caso $\varphi \equiv a$ y $\psi(n) = b^n$ y sabemos que ψ satisface: $x_n = bx_{n-1}$. De este modo $bx_{n-1} = abx_{n-2} + b^n = abx_{n-2} + x_n - ax_{n-1}$ con lo que se obtiene que cualquier solución de (15) será solución de la ecuación:

$$x_n = (b + a)x_{n-1} - abx_{n-2}. \tag{16}$$

Resolvamos esta ecuación de dim = 2; y veamos cuales de sus soluciones son soluciones de (15) (que es de dim = 1).

Las raíces de $t^2 - (b + a)t + ab = (x - a)(x - b)$ son precisamente a y

b, y por lo tanto toda solución de (16) es de la forma

$$\alpha_n = xa^n + yb^n$$

Ahora para que ésta sea solución de (15) necesitamos que se cumpla

$$xa^n + yb^n = a(xa^{n-1} + yb^{n-1}) + b^n = xa^n + yab^{n-1} + b^n$$

lo cual es equivalente a

$$yb^n = yab^{n-1} + b^n \Longleftrightarrow y = \frac{b^n}{b^n - ab^{n-1}} = \frac{b}{b-a}.$$

En consecuencia toda solución de (15) es de la forma:

$$\gamma_n = xa^n + \frac{b^{n+1}}{b-a}$$

para algún $x \in \mathbf{F}$.

Para terminar hagamos unos breves comentarios finales.

Sea $\{\sigma_n\}$ una sucesión definida por una recurrencia y supongamos que a partir de la recurrencia uno pueda deducir que el radio de convergencia R de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$ sea distinto de cero. De esta manera es posible definir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$ $\forall x$ con $|x| < R$ la cual se llama función generatriz de la sucesión $\{\sigma_n\}$.

De este tipo de funciones sabemos que $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sigma_n$. Esta igualdad nos puede ayudar en el caso en el cual a partir de la ecuación de recurrencia podamos conocer, sin conocer la sucesión solución, la función expícitamente pues derivándola conoceremos la solución.

Ejemplo. Recordemos la ecuación (V) $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$. Sea $\{\sigma_n\}$ la solución del problema con $x_0 = 4$ y $x_1 = -2$. (Este problema ya lo habíamos resuelto).

Aceptemos que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$ sea mayor que cero. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n x^n \\ &= 4 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (3\sigma_{n-1} - 2\sigma_{n-2}) x^n \\ &= 4 - 2x + 3x \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_{n-1} x^{n-1} - 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_{n-2} x^{n-2} \\ &= 4 - 2x + 3x(f(x) - 4) - 2x^2 f(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f(x) - 4 + 2x = 3x f(x) - 12x - 2x^2 f(x)$$

de lo que se deduce que

$$f(x) = \frac{4 - 14x}{1 - 3x + 2x^2} = \frac{-10}{x - 1} + \frac{3}{x - \frac{1}{2}}$$

donde la última igualdad es la expresión de f como suma de fracciones simples.

Derivemos ahora $g(x) = \frac{-10}{x-1} = -10(x-1)^{-1}$. Obtenemos $g'(x) = 10(x-1)^{-2}$, $g''(x) = 10(-2)(x-1)^{-3}$, $g'''(x) = 10(-2)(-3)(x-1)^{-4}$ y en general $g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} 10 n!(x-1)^{-(n+1)}$ lo que implica que $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = 10(-1)^0 = 10$

Hagamos lo mismo con $h(x) = \frac{3}{x-\frac{1}{2}} = 6(2x-1)^{-1}$. $h'(x) = 6(-1)2(2x-1)^{-2}$, $h''(x) = 6(-1)(-2)2^2(2x-1)^{-3}$ y en general obtenemos que $h^{(n)}(x) = (-1)^n 6 n! 2^n (2x-1)^{-(n+1)}$ lo que implica que $\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = -6.2^n$. Como $f = g + h$ concluímos que $\sigma_n = -6.2^n + 10$ que es el mismo resultado que habíamos obtenido antes.

Ejercicios

1) Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) Toda ecuación tiene única solución.

ii) Toda sucesión es solución de por lo menos una ecuación.

iii) El conjunto de soluciones de una ecuación es siempre un espacio vectorial o un espacio afin.

iv) La sucesión $\alpha_n \equiv 0$ es solución de toda ecuación. ¿En qué casos se puede afirmar que si?

2) Encontrar una sucesión que satisfaga $\begin{cases} x_n = -x_{n-1} + 2x_{n-2} \\ x_0 = 1, \; x_1 = 2 \end{cases}$

3) Calcular $\sum_{j=0}^{n} j^3$.

4) Encontrar una sucesión que satisfaga $\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} - 5x_{n-2} \\ x_0 = 1, \; x_1 = 1 \end{cases}$

Observar que no tiene nada que ver el hecho de que las raíces del polinomio sean complejas con que la solución sea real.

5) Encontrar una sucesión que satisfaga $\begin{cases} x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} \\ x_0 = A_0, \; x_1 = A_1 \end{cases}$

6) Encontrar una sucesión que satisfaga

$$i)\begin{cases} x_n = x_{n-1}.x_{n-2} \\ x_0 = 1, \; x_1 = 2 \end{cases} \qquad ii)\begin{cases} x_n = a x_{n-1}^{b_1} x_{n-2}^{b_2}, \ldots, x_{n-k}^{b_k} \\ x_0 = A_0, \ldots, x_{k-1} = A_{k-1} \end{cases}$$

donde $a, b_j, A_j > 0$ (Ayuda: aplicar logaritmo).

7) Encontrar una sucesión que satisfaga $\begin{cases} x_n = a x_{n-1} + b \\ x_0 = A_0 \end{cases}$

8) Deducir la fórmula de $\sum_{n=0}^{N} r^n$ (Se puede hacer de varias formas).

9) Encontrar una sucesión que satisfaga $\begin{cases} x_n = \dfrac{-2}{n} x_{n-1} \\ x_0 \doteq A_0 \end{cases}$ (Sugerencia: pensar en la función generatriz de la solución y ver que $f' = -2f$. Resolver esta ecuación diferencial y luego derivar la solución).

10) Supongamos un ángulo β formado por dos paredes con la particularidad de que una pelotita que choca con cualquiera de ellas con un ángulo de incidencia α sale con un ángulo $\alpha/2$ (**Figura 1**). Determinar que sucede con una pelotita que entra con un ángulo α y sigue sucesivamente rebotando en las paredes.

11) Consideremos n circunferencias concéntricas y n diámetros de la mayor (**Figura 2**). De esa manera quedan determinados $2n^2 + 1$ puntos contando el centro. Se trata de saber de cuántas maneras se puede ir desde un punto de la circunferencia mayor hasta el centro con las siguientes reglas:

i) Solo si puede pasar a puntos consecutivos en sentido horario; o de una circunferencia mayor a una menor.

ii) No se puede pasar más de una vez por cada punto.

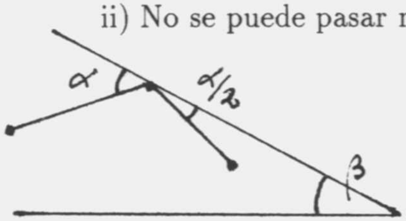

Figura 1

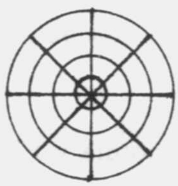

Figura 2

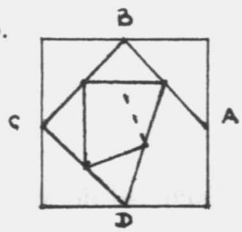

Figura 3

12) Supongamos que dentro de un cuadrado, una bolita que se mueve de la siguiente manera: sale de la mitad del lado A hasta la mitad de B y forma un primer segmento, luego va a la mitad de C y forma un segundo segmento, va a la mitad de D y forma un tercer segmento (**Figura 3**).

Luego va a la mitad del primer segmento y forma un cuarto, va a la mitad del segundo y forma un quinto, etc. Determine el punto de convergencia del camino.

13) Resolver el ejercicio **12** en el caso de un cuadrilátero arbitrario.

14) Sean A y E vértices opuestos de un octógono regular. Una rana está en A y comienza a saltar de vértice en vértice con las siguientes dos reglas:

i) Desde un vértice cualquiera distinto de E puede saltar a cualquiera de los adyacentes.

ii) Cuando llega a E deja de saltar y se queda allí.

Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea a_n el número de caminos distintos que puede seguir la rana, con exactamente n saltos, terminando en E. Probar que:

$$a_{2n-1} = 0 \;\; y \;\; a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(2+\sqrt{2})^{n+1} - (2-\sqrt{2})^{n+1}\right]$$

15) Sea $\{\beta_n\}$ la solución de $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_0 = 0, \; x_1 = 2 \end{cases}$

Encontrar una sucesión que satisfaga $\begin{cases} x_{n+1} = 2^{\beta_n} x_n + x_{n-1} \\ x_1 = 2, \; x_2 = 10 \end{cases}$

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.