Consideraciones Geométricas en el Reticulado Z^2

José O. Araujo

El Reticulado Z^2

En estas notas, presentamos algunos cálculos en el reticulado $\mathbf{Z^2}$ y la conexión natural que tiene esta geometría con la aritmética.

Si se establece un sistema de ejes cartesianos en el plano, llamaremos **reticulado entero** a la totalidad de puntos del plano que tienen coordenadas enteras. Es usual notar este conjunto con el símbolo $\mathbf{Z}^2$.

Los puntos en $\mathbf{Z}^2$ se llamarán **puntos reticulares** y por simplicidad diremos **el reticulado** para referirnos a $\mathbf{Z}^2$. Llamaremos **recta sobre el reticulado** a toda recta que pase por dos puntos reticulares distintos.

A continuación pasamos a tratar una serie de problemas planteados sobre el reticulado.

FORMULA DE AREA PARA UN POLIGONO

Consideremos P un polígono en el plano cuyos vértices sean puntos reticulares y asumamos que el contorno de P no pasa dos veces por un mismo punto (**contorno simple**). Designemos:

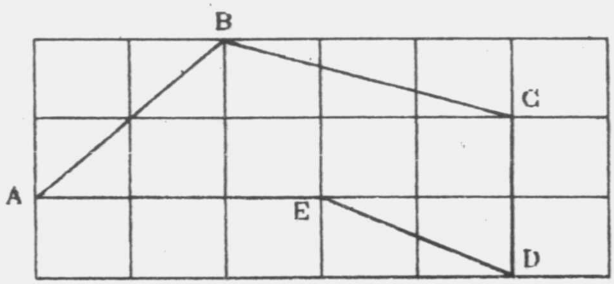
I =: el **número de puntos reticulares en el interior** de P

B =: el **número de puntos reticulares en el borde** de P

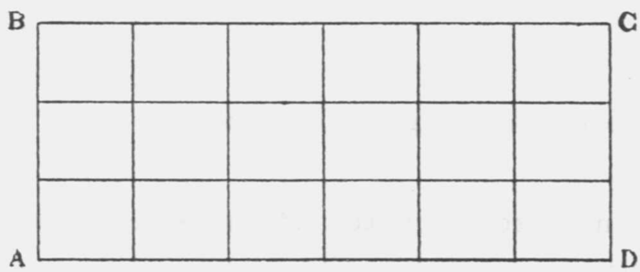
Entonces se verifica:

(1) $$\boxed{\text{Area de P} = I + B/2 - 1}$$

Ejemplo.



el área del pentágono ABCDE es igual a 4 + 9/2 - 1 = 15/2.
La demostración de este hecho se hace por inducción en el número n de vértices del polígono.
Hagamos primero la siguiente observación.
Si P es un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos, se tendrá una situación análoga a la representada por la figura.



Si las dimensiones de los lados del rectángulo son m y n respectivamente, se tiene:

$$I = (m-1).(n-1) = mn-m-n+1$$

$$B = 2(m-1)+ 2(n-1)+4 = 2(m+n)$$

resulta $I + b/2 - 1 = mn$ es decir igual al área del rectángulo.
Por otra parte, los triángulos ABC y CDA pueden superponerse haciendo coincidir los vértices C con A, D con B y A con C, por esta razón la cantidad de puntos reticulares en el interior de cada triángulo es la misma y la cantidad de puntos reticulares en el borde de cada triángulo es también la misma. En consecuencia, si d denota la cantidad de puntos reticulares en el interior del segmento AC, I' la cantidad de puntos reticulares en el interior de uno de los triángulos mencionados y B' la cantidad de puntos reticulares en el borde de uno de los triángulos, se tiene:

$$I = 2I' + 2d/2, \quad B' = m + n + d + 1$$

de donde:

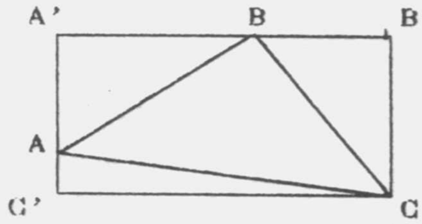
$$2I' + B' - 2 = I + B/2 - 1 = \text{ Area de} ABCD$$

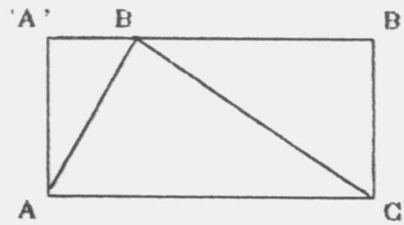
de modo que:

$$\boxed{I' + B'/2 \text{ - } 1 = \text{Area de ABC}}$$

En forma análoga, puede verse que la fórmula propuesta para el área es también válida para los triángulos rectángulos que tengan sus catetos paralelos a los ejes coordenados.

A partir del análisis precedente, se verá que la fórmula de área es correcta haciendo inducción en el número n de vértices de P.
Si P es un triángulo (n = 3) con vértices ABC, notar que siempre es posible circunscribir un rectángulo alrededor de P como muestran las figuras siguientes:





Razonaremos sobre la segunda figura, cualquier otro caso se trata en forma análoga. El área del triángulo ABC puede calcularse como:

Area de ABC = Area de AA'B'C − Area de AA'B − Area de BB'C

Cada punto reticular en $AA'B'C$ aporta una cantidad en el valor del segundo miembro de la igualdad anterior. Por ejemplo, un punto en el interior del triángulo ABC aporta 1, 0, 0 en las áreas de $AA'B'C$, $AA'B$, $BB'C$ respectivamente, en consecuencia contribuye en una unidad al área de ABC. Un punto en el interior del segmento AC aporta 1/2, 0, 0 contribuyendo en media unidad al área de ABC.
Un punto en el interior de los segmento AB o BC aporta 1, 1/2, 0 y 1, 0, 1/2 respectivamente, contribuyendo en media unidad al área de ABC. Los puntos A y C aportan 1/2, 1/2, 0 y 1/2, 0, 1/2 de modo que no contribuyen al área de ABC. El punto B, 1/2, 1/2, 1/2, quita media unidad al área. Cualquier otro punto no contribuye al área. Resulta entonces el área de ABC igual a la cantidad de puntos reticulares en el interior de

ABC más la mitad del número de puntos en el borde de ABC distintos de A, B y C menos 1/2 más 1. Pero este número es exactamente el que arroja la fórmula propuesta.
Para n > 3, el polígono P puede dividirse en dos polígonos ambos con un número de vértices menor que n, uniendo dos vértices no consecutivos de P. Designemos con P′ y P″ estos polígonos y pongamos:

$$\text{Area de P} = \text{Area de P}' + \text{Area de P}''$$

Como la fórmula de área es aplicable a P' + Area de P'', como antes, puede deducirse que la fórmula también es válida para el polígono P.

RECTAS SOBRE EL RETICULADO

Intentaremos ahora, describir los puntos reticulares que contiene una recta l que pasa por dos puntos reticulares p y q distintos. Si p = (a,b) y q = (c,d), la ecuación de la recta l puede tomarse como.

$$det \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o desarrollando el determinante:

$$(d-b).x + (a-c).y = ad - bc$$

Llamemos m = d−b, n = a−c y k = ad − bc, entonces los puntos de l serán los pares (x,y) que verifiquen la ecuación.

$$mx + ny = k$$

Consideremos r un punto reticular en l de modo que r $\neq$ p y que r sea el punto reticular en l más próximo a p. Notemos que siempre es posible encontrar un punto en las condiciones establecidas, ya que la distancia entre dos puntos reticulares distintos es $\geq$ 1. Es decir, en un segmento de recta que incluya a p hay sólo un número finito de puntos reticulares.
En el interior del segmento de extremos p y r no existen puntos reticulares.
Para cada entero j los puntos de la forma p + j(r$-$p), son reticulares y se encuentran en l. En efecto, si r = (e,f) se tiene:

$$r_j = p + j(r - p) = (a + j(e - a), b + j(b - f))$$

es un punto reticular, y como p y r están en l se verifican:

$$ma + nb = k$$

$$me + nf = k$$

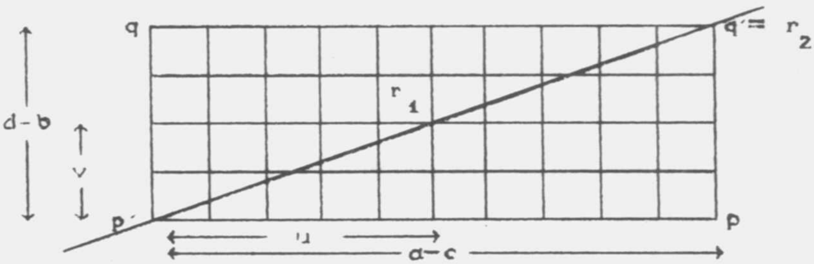
de donde se deduce que:

$$m(a + j(e - a)) + n.(b + j(b - f)) = k$$

y consecuentemente que los puntos p + j (r-p) están en l cualquiera sea j $\in\mathbf{Z}$.
Para índices consecutivos, j y j+1, la distancia entre los puntos correspondientes es exactamente la distancia entre r y p que notaremos con δ. Si entre dos puntos consecutivos r_j y r_{j+1} encontráramos un punto reticular t de l, tendríamos $d(r_j, t) < \delta$, pero la identidad $d(r_j, t) = d(r_j - j(p - r), t - j(p - r)) = d(p, t - j(p - r))$ nos dice que $t - j(p - r)$ es un punto reticular en l que se encuentra a distancia menor que δ de

p, llevándonos a una contradicción. En consecuencia todos los puntos reticulares en l son exactamente los puntos r_j con $j \in \mathbf{Z}$.

Deseamos determinar δ en función de los datos iniciales, es decir a partir de p y q. Ubiquemos p y q en una porción de reticulado como muestra la figura a continuación:



Llamemos h al número de puntos reticulares que hay en el interior del segmento que une p con q. La diagonal del rectángulo con vértices p, p', q, q' es por un lado igual a δ (h+1). Por otro lado esta diagonal es igual a $\sqrt{m^2+n^2}$.

Notemos que los puntos reticulares en la recta l que une p con q son exactamente los puntos de la forma p + j (u, v) con $j \in \mathbf{Z}$. Tenemos q = p +(h+1)(u,v) = p + (-n, m) de donde −n = (h + 1).u, m = (h + 1) v. Si d es un divisor común de m y n y g es un múltiplo común de m y n, poniendo:

$$m = d\widetilde{m},\ n = d.\widetilde{n},\ g = m.e = n.f$$

los puntos p $\pm(\widetilde{n}, -\widetilde{m})$ y p $\pm(e, -f)$ están en la recta l, en consecuencia u divide a $\widetilde{n}$ y a e y v divide a $\widetilde{m}$ y a f. De las identidades previas se sigue que d divide a h + 1 y que u v (h + 1) divide a g, es decir:

$$(m,n) = h+1,\ [m,n] = uv(h+1) \text{ y } |n.m| = [m,n](m,n)$$

Conclusiones.

Si $p = (a, b), q = (c, d)$ son puntos reticulares, $m = |d - b|$, n $= |c - a|$, entonces:

1- El número de puntos reticulares en el interior del segmento que une p con q es (m,n)−1. En particular si m y n son coprimos el segmento no contiene puntos reticulares en su interior.

2- La distancia δ entre dos puntos reticulares consecutivos en la recta l es igual a $\sqrt{m^2 + n^2}/(m, n)$.

3- Para m y n naturales se verifica la igualdad $mn = (m, n)[m, n]$.

RECTAS PARALELAS

Supongamos l y l' dos rectas paralelas sobre el reticulado, la distancia entre dos puntos reticulares consecutivos en l y en l' es la misma? La respuesta es sí, pues si p está en l y p' en l' se tiene $l' = l + p' - p = \{q + p' - p/q \in l\}$, es decir que l' se obtiene trasladando l según $p' - p$, esta traslación lleva puntos reticulares de l en puntos reticulares de l', como además l puede pensarse como el resultado de trasladar l' según $p - p'$, los puntos reticulares de l' son exactamente los obtenidos al trasladar los puntos reticulares de l.

También podemos afirmar que por cada punto reticular q pasa una recta sobre el reticulado paralela a l, naturalmente esta recta es $l + q - p$.

Si formáramos un paralelogramo P cuyos vértices sean dos puntos consecutivos en l y dos puntos consecutivos en l', tendríamos:

$$\text{Area de } P = \delta\eta$$

donde δ es la distancia entre dos puntos consecutivos de l y ν es la distanccia que separa l de l'. Como el P es mayor o igual que 1, pues cuenta con 4 puntos reticulares en su borde, se tiene $\delta\eta \geq 1$ es decir $\eta \geq 1/\delta$ queda acotada inferiormente por este valor fijo.
Podemos decir que hay una recta paralela a l en uno de los semiplanos que determina l que es la primer paralela en ese semiplano, en este caso el paralelogramo P antes mencionado contiene exactamente a sus vértices como puntos reticulares, siendo su área igual a 1, debe ser en esta situación $\eta = 1/\delta$. Se deduce que la distancia que separa l de l' es h/δ, donde h es un número natural.
Por otra parte, si el punto r = (e, f) es un punto reticular en l' y m x + n y = k es una ecuación para l, la distancia que separa l de l' es la distancia desde r a l, esta última puede calcularse como:

$$\frac{|me + nf - k|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

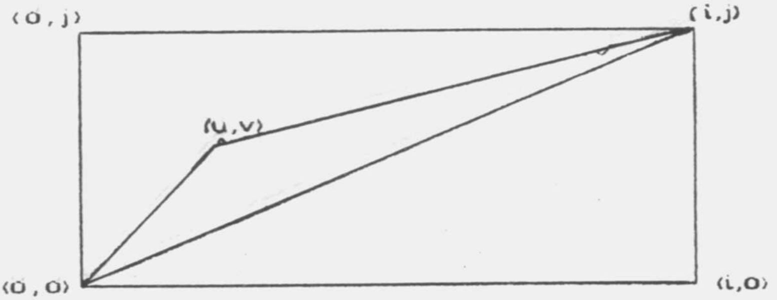
Esta distancia debe coincidir con $\eta = h/\delta$, pero según la expresión de δ en 2, se tiene:

$$\boxed{|me + nf - k| = h(m, n)} \qquad (2)$$

Podemos decir entonces que $h+1$ es el número de rectas sobre el reticulado paralelas a l que se encuentran entre l y l', incluyendo estas últimas.
Como un caso especial consideremos como l la recta que une el origen de coordenadas con el punto (i, j) donde i, j son números naturales. La ecuación de l puede tomarse como:

$$jx - iy = 0$$

En el rectángulo de vértices (0,0), (i,0), (i,j), (0,j), sea (u,v) un punto reticular más próximo a l entre los puntos reticulares que no pertenecen a l.



Por la elección de (u, v), el triángulo de vértices (0, 0), (u, v) (i, j) no contiene puntos reticulares en su interior, de modo que su área puede calcularse como la mitad del número de puntos en su borde menos 1. En el borde de este triángulo sólo se puede contar con (u, v) y los puntos reticulares en el segmento que une (0, 0) con (i, j), según 1 esta cantidad es (i, j) - 1 + 3 = (i, j) + 2. Se sigue entonces que el área del triángulo es (i, j)/2.

Si observamos el paralelogramo P con vértices (0, 0), (i, j), (u, v) (i + u, j + v), el área de este paralelogramo es (i, j), el máximo común divisor entre i y j. Otra forma de calcular el área de este paralelogramo es

$$\text{Area de } P = |det \begin{Vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ \mathrm{u} & \mathrm{v} \end{Vmatrix} |$$

de modo que:

$$(3) \qquad \boxed{(i,j) = |v.i - u.j|}$$

Esta identidad y la dada en [2] indican que h = 1, es decir que la distancia de (u,v) a l es la menor posible entre las distancias de un punto reticular, exterior a l, y la recta l.

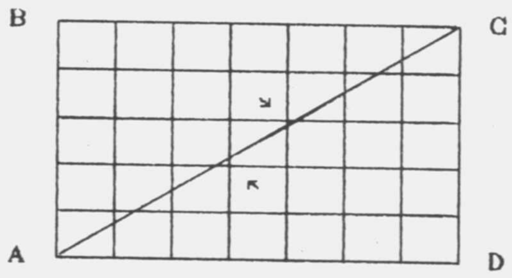
Conclusiones.

4- Sea l una recta que pasa por dos puntos reticulares distintos p y q. Si p = (a,b), q = (c,d), m = d−b, n = a−c. La menor distancia de un punto reticular, exterior a l, a la recta l es $(mn)/\sqrt{m^2+n^2}$.

5- Dos rectas paralelas sobre el reticulado, encierran un número finito de rectas sobre el reticulado, paralelas a las dadas, donde dos consecutivas están separadas por una misma distancia.

6- Sean m y n números naturales, existen enteros s y t tales que (m,n) = sm − tn con $0 \leq s \leq n$ y $0 \leq t \leq m$.

Ejemplo. En el rectángulo ABCD cuyos lados son 7 y 5 encontrar los puntos reticulares más próximos a la diagonal que un A con C.

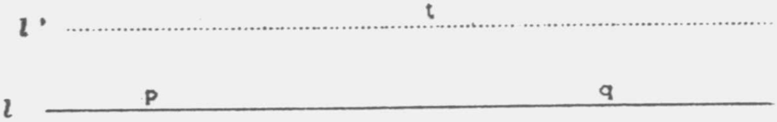


Podemos pensar que A = (0,0), B = (0,5), C = (7,5) y D = (7,0). Estos puntos son (3,2) por debajo de la diagonal y (4,3) por encima de la diagonal, ambos pares nos permiten escribir 1 = (5,7) = 5t + 7s y para esto basta considerar los determinantes

$$det \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{Vmatrix} \quad y \quad det \begin{Vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$$

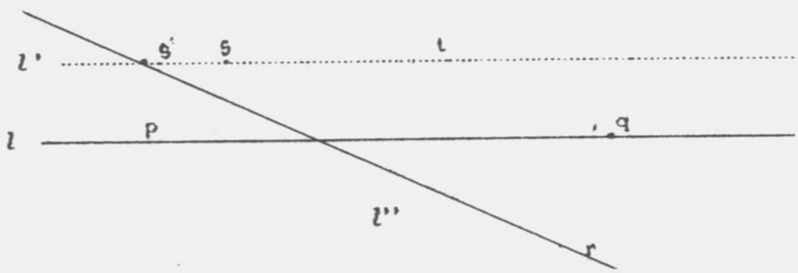
<u>Problema.</u> Dados tres puntos reticulaares p,q y r, mostrar que existe un punto reticular t tal que los segmentos que unen t con p, q y r no contienen puntos reticulares en su interior.

Sea l la recta que pasa por los puntos p y q y t un punto reticular exterior a l tal que la distancia de t a l sea mínima:



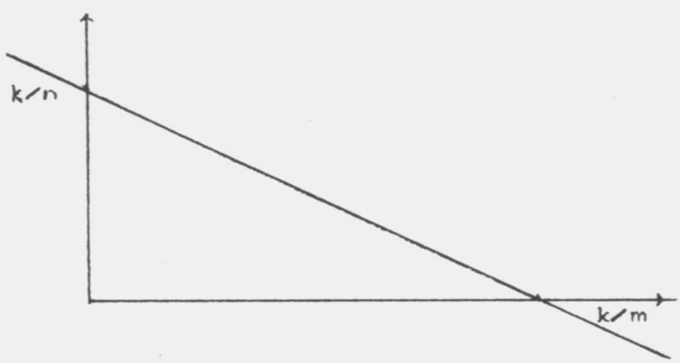
si l' es la recta paralela a l que pasa por t, en el interior de la franja limitada por l y l' no hay puntos reticulares, de modo que cualquiera sea el punto reticular t en l', los segmentos que unen t con p y q no tendrán puntos reticulares en su interior.

Supongamos que p,q y r no están alineados, en caso contrario, el problema se resuelve tomando un punto cualquiera en l'. Sea l'' la recta que pasa por r y es paralela al segmento que une t con q:



los puntos r + k.(t-q) con $k \in \mathbf{Z}$, son todos los puntos reticulares de l'', dado que el segmento que une t con q no contiene puntos reticulares en su interior.

Por otro lado, las rectas paralelas a l que pasan por puntos reticulares de l son todas las rectas paralelas a l sobre el reticulado, pues en caso contrario, una tal recta podría trasladarse con un múltiplo entero de t$-$q hasta quedar ubicada en el interior de la franja limitada por l y l' donde no hay puntos reticulares. En consecuencia, el punto s$'$ en la intersección de l y l'' es decir, el punto s$'$ en la intersección l' y l'' es un punto reticular. Sea s un punto reticular en l' consecutivo con s', h el número de puntos reticulares en el segmento que une r con s$'$ y T el triángulo de vértices r, s, s$'$. Si δ es la distancia entre s y s$'$ y η es la distancia entre l y l', el área de T es $\delta.\eta.(h-1)/2 = (h-1)/2$. La cantidad B de puntos en el borde de T es mayor o igual que h + 1, de donde $B/2 - 1 \geq (h+1)/2 - 1$, se sigue que T contiene exactamente h + 1 puntos reticulares, y en consecuencia el segmento que une r con s no contiene puntos reticulares en su interior.



Problema. Sean m y n números naturales coprimos y k un número natural mayor o igual que m.n. ¿De cuántas formas es posible escribir
k = s.m + t.n con s y t enteros no negativos?

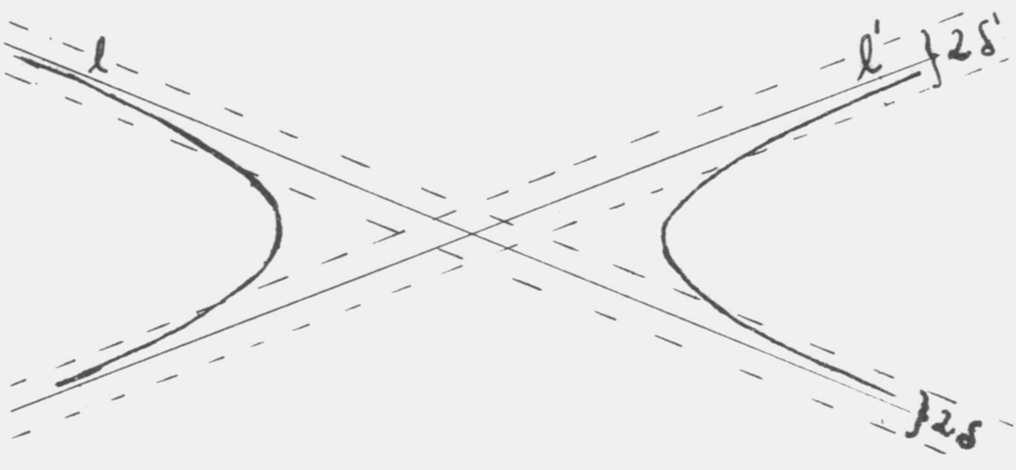
Si consideramos la recta de ecuación mx + ny = k, ésta corta a los ejes coordenados en los puntos (k/m,0) y (0, k/n):

El segmento que une estos puntos tiene por longitud $k\sqrt{m^2+n^2}/mn$ y la distancia entre dos puntos reticulares consecutivos en la recta es $\sqrt{m^2+n^2}$, es decir la cantidad de soluciones anda en el orden de [k/mn], donde los corchetes indican la parte entera. Dejamos como ejercicio probar que el número de soluciones es [k/mn] en algunos casos y [k/mn] + 1 en los casos restantes.

HIPERBOLAS SOBRE EL RETICULADO

En este punto trataremos el siguiente problema.

¿Si las asíntotas de una hipérbola son rectas sobre el reticulado, qué puede decirse sobre el número de puntos reticulares sobre la hipérbola"?.



Notemos primero que una porción "limitada" de curva en el plano, solo puede contener un número finito de puntos reticulares, pues es posible encerrar esta porción en un rectángulo cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados.

Notemos con γ los puntos de la hipérbola, y con l y l' sus asíntotas. Si δ y δ' son las mínimas distancias de puntos reticulares exteriores a l y l'

respectivamente, las franjas de amplitud 2δ y $2\delta'$ centradas en l y l' respectivamente, contendrán en su interior sólo los puntos reticulares de l y l', dejando la posibilidad de encontrar puntos reticulares en una porción limitada de hipérbola, como consecuencia:

7- Una hipérbola con asíntotas sobre el reticulado, contiene a lo sumo un número finito de puntos reticulares.

Ejemplo. Probar que la ecuación:

$$3x^2 + 7xy + 4y^2 + 3x + 3y = 1$$

admite un número finito de soluciones enteras.

POLIGONOS REGULARES

¿Es posible dibujar un triángulo equilátero uniendo 3 puntos reticulares?. Para responder a esta pregunta observemos primero que el área de un triángulo equilátero de lado l es $\sqrt{3}/4l^2$. Si además los vértices del triángulo son puntos reticulares, por la fórmula [1], cuatro veces su área es un número entero. Por otro lado l^2 es el cuadrado de la distancia entre dos puntos reticulares, luego l^2 es un número entero. Se tiene que $\sqrt{3}l^2$ es un número entero, luego $\sqrt{3}$ debería ser racional, lo que indica una contradicción.

Naturalmente que un cuadrado puede ser dibujado uniendo 4 puntos reticulares. En general, que ocurre con un polígono de n lados, un razonamiento análogo al anterior nos conduciría a decidir si $tg(\pi/n)$ es un número racional o no. Usando identidades trigonométricas la cuestión pasaría por saber si $\cos(2\pi/n)$ es racional. Es posible establecer que, salvo n = 4, esto nunca ocurre, pero con argumentos poco elementales, sin em-

bargo varios casos chicos se pueden resolver, por ejemplo n = 5,6,7,9,10,12, 14,15 etc. puesto que si es posible dibujar un exágono con puntos reticulares, también será posible dibujar un triángulo equilátero, de modo que podemos descartar los múltiplos de 3 y quedarnos con los casos n = 5,7,14.
Si n = 5, consideremos el número complejo:

$$w = cos(2\pi/5) + i\, sen(2\pi/5)$$

este número satisface la identidad $w^5 - 1 = 0$, factorizando:

$$(w-1)(w^4 + w^3 + w^2 + w + 1) = 0$$

o bien $\qquad w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0$
Pues $w \neq 1$, dividiendo la última igualdad por w^2 se tiene:

$$w^2 + w + 1 + w^{-1} + w^{-2} = 0$$

Escribiendo: $(w+w^{-1})^2 = w^2+w^{-2}+2$, la ecuación anterior puede ponerse como:

$$(w + w^{-1})^2 + (w + w^{-1}) - 1 = 0$$

teniendo en cuenta que $w^{-1} = \overline{w}$ el conjugado de w, la última identidad nos dice que 2 cos$(2\pi/5)$ es raíz del polinomio:

$$X^2 + X - 1$$

pero las raíces de este polinomio no son racionales.
Para n = 7 se procede del mismo modo con w = cos$(2\pi/7) + i\, sen(2\pi/7)$ en este caso hay que usar además la identidad:

$$(w + w^{-1})^3 = w^3 + w^{-3} + 3(w + w^{-1})$$

para ver que $2\cos(2\pi/7)$ es raíz del polinomio:

$$X^3 + X^2 - 2X - 1$$

por el criterio de Gauss, si este polinomio tiene raíces racionales, éstas deben ser $\pm$ 1, como estos valores no anulan al polinomio, el polinomio no tiene raíces racionales.

De este modo se descartan los múltiplos de 3,5 y 7. Puede descartar el caso de un múltiplo de 8? puede descartar el caso de n impar?

Aunque no se haya demostrado, enunciemos la propiedad.

8- El cuadrado es el único polígono regular que puede dibujarse uniendo puntos reticulares.

CONVEXOS

Cuál es el número máximo de puntos reticulares que puede cubrir un cuadrado de lado entero n?

Hay un cuadrado de lado n que cubre $(n+1)^2$ puntos reticulares, basta elegir dos de sus vértices consecutivos sobre un eje coordenado.

Si el cuadrado se encuentra en el plano en forma arbitraria, podemos encerrar con un polígono P convexo los puntos reticulares cubiertos por el cuadrado, de modo que todos los vértices de este polígono sean puntos reticulares. El hecho que el cuadrado sea convexo asegura que el polígono P quede incluído en él.

Si I y B denotan la cantidad de puntos reticulares en el interior y el borde de P respectivamente, la cantidad de puntos reticulares en el cuadrado estará dada por I + B. Como el área de P es a lo sumo n^2, se tiene:

$$I + B/2 - 1 \leq n^2 \tag{1}$$

Como la distancia entre dos puntos reticulares es mayor o igual que 1, B no puede superar al perímetro de P, el que es a su vez menor o igual que el perímetro del cuadrado, resulta:

$$B \leq 4n \text{ o } B/2 \leq 2n \tag{2}$$

de las desigualdades en (1) y (2) se concluye que:

$$I + B \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Si en lugar de un cuadrado, se tiene un círculo de radio r, con el mismo razonamiento podríamos establecer que el número de puntos reticulares contenidos en él no excede a $\pi r^2 + \pi r + 1$.
En general.

9- Una figura convexa limitada, de área Δ y perímetro p cubre a lo sumo $[\Delta + p/2 + I]$ puntos reticulares.

ORDENANDO FRACCIONES

Si se desea ordenar las fracciones a/b con a y b números enteros $0 \leq a \leq b$ y donde b permanece menor o igual que un número n fijo. El problema es dar un criterio para saber si dos fracciones son consecutivas o no.

Supongamos que a/b < c/d, donde los pares de números a,b y c,d no tienen factores comunes. Si estas fracciones son consecutivas, la fracción a+c/b+d no puede integrar la lista de fracciones puesto que se encuentra estrictamente entre las fracciones dadas. Debe ser entonces b+d > n. Si por otra parte consideramos el paralelogramo P con vértices (0,0), (b,a), (d,c) y (b+d, a+c), el hecho que b,a y c,d sean coprimos nos dice que los únicos puntos en el borde de P son sus 4 vértices, de modo que el área de P es la cantidad de puntos reticulares en su interior más 1. También el área de P es bc$-$da $\geq$ 1, usando la expresión con el determinante. Si bc$-$da $\neq$ 1, entonces el área de P es mayor o igual que 2, de donde el área del triángulo T de vértices (0,0), (b,a) y (d,c) es mayor o igual que 1, entonces T contiene al menos un punto reticular (e,f) distinto de sus vértices y fuera de las aristas que pasan por el origen. Se tiene que f $\leq$ máx {a,c } $\leq$ n y las pendientes de las rectas que unen el origen con (b,a), (e,f) y (d,c) están en orden estrictamente creciente, es decir a/b $<$ e/f $<$ d/c. En conclusión, si las fracciones consideradas son consecutivas, entonces b + c $>$ n y bc$-$da = 1. Veamos si la implicación recíproca es válida. Asumimos entonces que a/b $<$ c/d, bc$-$ad = 1 y b + d $>$ n. Si una fracción e/f satisface: a/b $<$ e/f $<$ c/d, planteamos la posibilidad de expresar:

$$(f,e) = \alpha(b,a) + \beta(d,c) \text{ con } \alpha \text{ y } \beta \text{ números reales}$$

esta identidad conduce a resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} b\alpha + d\beta = f \\ a\alpha + c\beta = e \end{cases}$$

Resolviendo por Crámer, se tiene:

$$\alpha = det \begin{Vmatrix} \text{f} & \text{d} \\ \text{e} & \text{c} \end{Vmatrix} = fc - ed \geq 1 \quad \beta = det \begin{Vmatrix} \text{b} & \text{f} \\ \text{a} & \text{e} \end{Vmatrix} = be - af \geq 1$$

resulta $f = \alpha b + \beta d \geq b + d > n$. De modo que cualquier fracción en la situación de e/f debe tener denominador mayor que n.

10- Dos fracciones a/b y c/d, en las condiciones fijadas, son consecutivas si y sólo si $|bc - ad| = 1$ y $b+d > n$.

Depto. de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas.
Universidad Nacional del Centro. Tandil.
Provincia de Buenos Aires.

Pensamientos

Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada viene solo, nada es dado. Todo esto es construído.

Bachelard, *La formación del espíritu científico.*

No hay problemas resueltos, hay solamente problemas más o menos resueltos

H. Poincaré