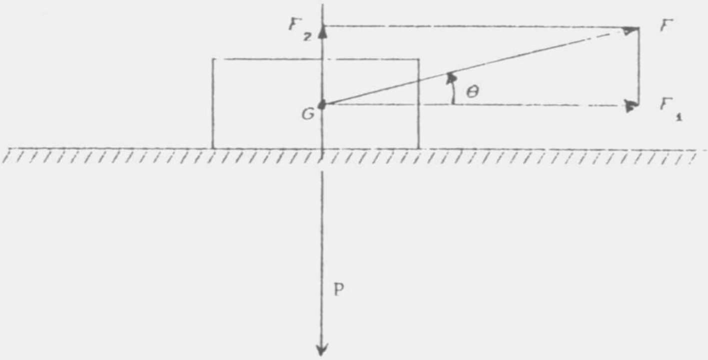
Problemas de extremo sin derivada

Norberto A. Fava

Problema 1. Se desea arrastrar un cuerpo de peso P apoyado sobre una plataforma horizontal (ver figura) tirando de él en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal. La fuerza F mínima necesaria para producir el deslizamiento depende de θ y el problema consiste en averiguar en qué dirección hay que tirar si se desea que el esfuerzo F sea mínimo.



Sean F_1 y F_2 las componentes de F en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente. La fuerza de compresión (normal a las superficies en contacto) es $P - F_2$, por lo que llamando μ al coeficiente de rozamiento estático entre ambos materiales, (que es una constante dados los materiales del cuerpo y la superficie), se tiene

$$\mu = \frac{F_1}{P - F_2} = \frac{F \cos\theta}{P - F \operatorname{sen}\theta},$$

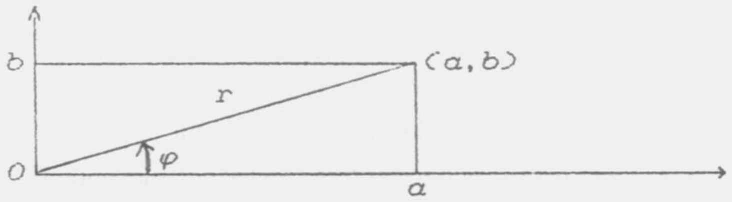
de donde resulta fácilmente

$$F = \frac{\mu P}{\cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta}$$

En este problema como en otros resulta útil transformar un binomio de la forma a cos $\theta + b$ sen θ, como es el denominador de la última expresión, en un monomio de la forma r cos $(\theta - \varphi)$, donde r y φ son ciertas constantes que depende de a y b.

Llamado r y φ a las coordenadas polares del punto (a, b), tendremos (ver figura)

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \text{ sen } \varphi,$$



de donde se sigue que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, cos $\varphi = a/r$, sen $\varphi = b/r$, o bien tan $\varphi = b/a$.

Con estos valores de r y φ podemos escribir el binomio en la forma a cos $\theta + b$ sen $\theta = r \cos \varphi \cos \theta + r \text{ sen } \varphi \text{ sen } \theta = r \cos (\theta - \varphi)$.

En nuestro caso $a = 1, b = \mu$; por lo tanto, $r = \sqrt{1 + \mu^2}$ y tan $\varphi = \mu$, es decir, $\varphi = \text{arctg } \mu$.

Luego, el problema se reduce al estudio de la función

$$F = \frac{\mu P}{\sqrt{1 + \mu^2}\, cos(\theta - \varphi)} \tag{2}$$

Es muy ilustrativo analizar qué pasa cuando θ es negativo: hay un valor negativo de θ, al que llamaremos θ_0, tal que si $-\pi/2 \le \theta \le \theta_0$, ninguna fuerza F por grande que sea será capaz de producir el deslizamiento.

También es interesante calcular el valor mínimo de F y compararlo con el esfuerzo horizonal: el cociente entre ambos esfuerzos es $(1+\mu^2)^{-1/2}$; correspondiente a $\theta = \varphi$ en (2).

Por último, la solución del problema adquiere una evidencia geométrica si se observa que la representación polar de una función de la forma

$$r = \frac{a}{cos\ (\theta - \varphi)}$$

es una recta perpendicular a la recta $\theta = \varphi$ en el punto de coordenadas polares $r = a, \theta = \varphi$, de modo que la representación polar de la función (2) es una recta.

El siguiente problema es un clásico de la óptica geométrica que como es bien sabido tiene más de geometría que de Física. Se trata de un tema que suele figurar en los manuales de Física de la escuela secundaria, sobre el que nos proponemos echar una segunda mirada, un poco más atenta.

En nuestro caso sólo hará falta recordar que cuando un rayo luminoso atraviesa una superficie que separa dos medios transparentes distintos como suelen ser aire y vidrio, experimenta un cambio de dirección (refracción) y que si denotamos por i y r los ángulos que forman el rayo incidente y el rayo refractado con la recta normal a la superficie en el punto de incidencia, se cumple la ley descubierta por el matemático holandés Snell en 1621, hallada nuevamente por Descartes cinco años más tarde:

$$\operatorname{sen} i = n \ \operatorname{sen} r,$$

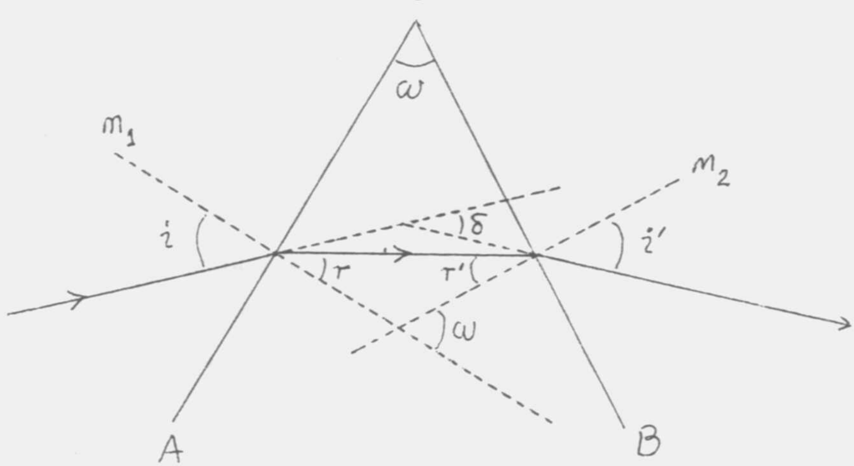
donde n es una constante llamada el *índice de refracción* entre las substancias que forman los dos medios.

Además, si n es el índice de refracción del medio B con respecto al medio A, entonces el índice de A con respecto a B es $1/n$.

Para formarse una idea de los valores posibles en el problema que vamos a estudiar conviene añadir que el índice de refracción del vidrio con respecto al aire varía según la composición química del primero y suele estar comprendida entre 1.5 y 2.

Recordemos también que en óptica se llama *prisma* a un diedro sólido homogéneo formado por alguna substancia transparente como el vidrio. La sección normal de dicho diedro será denotada por ω.

Imaginemos un rayo luminoso que incide sobre la cara OA del prisma (ver figura) formando con la normal n_1 un ángulo i; que se refracta en dicha cara formando con n_1 un ángulo r; que incide sobre la cara OB formando con la normal n_2 un ángulo r' y que -finalmente- emerge del prisma refractándose por segunda vez, formando con n_2 un ángulo i'.



Observando la figura y recordando que cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él, resulta inmediatamente que

$$\omega = r + r' \tag{3}$$

El ángulo δ forma el rayo incidente con el rayo emergente se llama la *desviación*, y usando la propiedad recordada arriba, es inmediato que

$$\delta = (i - r) + (i' - r') = i + i' - \omega. \tag{4}$$

Finalmente, la ley de Snell aplicada en cada una de las caras nos da las relaciones:

$$\begin{cases} \text{sen } i = n \text{ sen r} \\ \text{sen } i' = n \text{ sen} r' \end{cases} \tag{5}$$

Estos son los elementos teóricos necesarios para el planteo de nuestro segundo problema.

Problema 2. La desviación δ depende de i y el problema consiste en probar que alcanza un mínimo cuando $i = i'$ (lo que equivale a que se cumpla $r = r'$).

En virtud de (3), para que se cumpla $r = r'$, deberá ser $r = \omega/2$, sen $i = n$ sen $(\omega/2)$. Por consiguiente, la condición de posibilidad para nuestro problema es n sen $(\omega/2) < 1$.

Desde un punto de vista matemático el problema involucra cinco variables: i, i', r, r' y δ ligadas por las cuatro relaciones (3), (4) y (5), dos de las cuales son trascendentes. Algunas veces se propone en cursos de Análisis como ejemplo de aplicación del *método de los multiplicadores de Lagrange.*

Sin embargo, quienes apliquen aquel método con el único fin de ejercitarse en su uso podrán comparar el esfuerzo realizado con el que se requiere para una solución completamente elemental del problema.

Restando miembro a miembro las ecuaciones (5) y aplicando la fórmula trigonométrica

$$\text{sen } a \pm \text{ sen } b = 2 \text{ sen } \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2} \tag{6}$$

y las relaciones (3) y (4), se obtiene fácilmente

$$\text{sen } \frac{i - i'}{2} \cos \frac{\delta + \omega}{2} = n \text{ sen } \frac{r - r'}{2} \cos \frac{\omega}{2}.$$

Puesto que $\delta + \omega = i + i' < \pi$, de la relación anterior se deduce que si $i \neq i'$, entonces $i - i'$ tiene el mismo signo que $r - r'$ y además

$$\|i - i'\| > \|r - r'\|. \tag{7}$$

Téngase presente que $n > 1$, que $\cos t$ es decreciente en el intervalo $0 \leq t \leq \pi/2$ y que sen t es creciente en $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (5) y volviendo a aplicar (6), (3) y (4) obtenemos también fácilmente

$$\text{sen } \frac{\delta + \omega}{2} \cos \frac{i - i'}{2} = n \text{ sen } \frac{\omega}{2} \cos \frac{r - r'}{2} \tag{8}$$

Puesto que para $i \neq i'$,

$$\cos \frac{i - i'}{2} < \cos \frac{r - r'}{2}$$

se tendrá

$$(9) \qquad \operatorname{sen} \frac{\delta + \omega}{2} > n \operatorname{sen} \frac{\omega}{2},$$

salvo que i sea igual a i', en cuyo caso se alcanza la igualdad entre ambos miembros de (9), en virtud de (8).

No queda más que observar que para que δ sea mínimo es necesario y suficiente que lo sea el miembro izquierdo de (9). En símbolos:

$$\min \left\{ \operatorname{sen} \frac{\delta + \omega}{2} \right\} = \operatorname{sen} \frac{\delta_{min} + \omega}{2} = n \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$$

Comentarios finales.

En vista de que tanto ω como δ_{min} pueden medirse experimentalmente con bastante precisión, la última fórmula se ha usado para medir índices de refracción. El valor de n varía con la longitud de onda o color de la luz, por lo que las consideraciones geométricas realizadas valen con exactitud sólo para rayos de luz monocromática.

Los problemas considerados ilustran sobre la utilidad de las fórmulas trigonométricas y el uso de las coordenadas polares para describir algunas situaciones de la manera más conveniente.

Por sencillez en la notación, en el primer problema hemos preferido no distinguir entre el vector cuyas componentes son F_1 y F_2 y su módulo o norma que hemos llamado F. Simplificaciones como esa son aceptables, siempre que no induzcan a error.

Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas
Universidad de Buenos Aires
Güemes 3931 - (1425) Capital Federal.