Espacios Semimétricos

María Luisa Oliver

Introducción :

Cuando se trata de determinar si un par (U, d) es o no un espacio métrico, la parte "difícil" suele ser probar si la función distancia verifica la llamada desigualdad triangular. Y es así que de alguna manera, la importancia de dicha propiedad se asocia con esa dificultad. El propósito de este artículo es resaltar la importancia de la mencionada propiedad por la vía inversa, es decir, estudiando ciertas propiedades bastante extrañas y aun sorprendentes que poseen algunos espacios en los que la función distancia **no** verifica la desigualdad triangular.

Definición :

Dado U, conjunto no vacío, munido de una función que es simétrica y definida positiva ; más precisamente

$$s : U \times U \to [0, \infty)$$

es una funciuón tal que

1) s(u, v) = s(v, u) para todo u, v de U.
2) s(u, v) $\geq$ 0 , para todo u, v de U y la igualdad se verifica si y sólo si u y v coinciden

Un par (U, s) se denomina un **espacio semimétrico**.
S lo denominaremos una medida en U.

De su misma definición se desprende que es muy sencillo encontrar y construir ejemplos de espacios semimétricos.

Ejemplos :

1.- En particular, los espacios euclideos y en general los espacios métricos son ejemplos que surgen automáticamente ya que la familia de todos los espacios métricos es subconjunto de la familia de todos los espacios semimétricos.

2.- Para $U = [0,\frac{1}{2}]\cup\{1\}$ se define la función distancia s :

$$s(v,u) = |u - v| \quad para\ todo\ u,\ v\ = \in [0,\frac{1}{2}]$$

$$s(1,v) = s(0,v) = s(v,1) = s(v,u) \quad para\ todo\ v\ = \in (0,\frac{1}{2}]$$

$$s(1,0) = s(0,1) = 1.$$

3.- Sea $U = \{0,1\}\cup\left\{\frac{1}{n},\quad n = 2,3,...\right\}$ consideremos s definida por

$s(\frac{1}{i},\frac{1}{j}) = 1 \qquad si \quad i \neq j\ ,\ i \geq 2\ ,\ j \geq 2\ ,$

$s(u,v) = |u - v|$ en cualquier otro caso.

4.- Dado U, no vacío, definimos s por: $s(u,v) = \begin{cases} 0 & si \quad u = v \\ 1 & si \quad u \neq v \end{cases}$

5.- $U = \Re\times\Re$ = Plano Euclideano. Consideramos definida por

$$s : U \times U \rightarrow [0,\infty)$$

$$s(P,Q) = \|P - Q\|^2\ ,$$

es decir, s es el cuadrado de la distancia euclidea.

6.- Sea $U = \Re \times \Re$ = Planas, Euclideano. Fijemos una recta L en U. Aquí s es la métrica euclidea usual excepto cuando los puntos P y Q se encuentran **ambos** ubicados sobre L y en este caso la distancia entre los puntos es el doble de la correspondiente distancia euclidiana.

Para fijar ideas supongamos que la recta L es el eje x. Para todo punto P y Q del plano definimos una función

$$s(P, Q) = \|P-Q\|$$

a menos que P y Q estén simultáneamente sobre el eje x ; en tal caso

$$s(P, Q) = 2\|P-Q\|.$$

Este plano se lo denomina **plano de Moise,** pues esta geometría fue introducida por E. E. Moise para demostrar que el axioma de congruencia *Lado - Ángulo - Lado* (L A L) para triángulos es independiente de los otros axiomas . Ver [1]. En lo que sigue indicaremos este espacio con **M**.

Ejercicios :

En cada uno de los ejemplos del 2 al 6 verificar si se cumple o no la desigualdad triangular, es decir verificar si cierto o no, que:

para toda terna de puntos p, q *y* r *de* $U \times U$ *se verifica que* $s(p,q) \leq s(p,r) + s(r,q)$

Con el fin de llegar a definir la noción de abierto en un espacio semimétrico comenzamos por definir conceptos tales como límite de una sucesión y punto de acumulación de un conjunto.

Debido a que la función distancia en los espacios semi-métricos sólo se le exige que sea definida positiva y simétrica nos apoyaremos en la noción de convergencia de una sucesión de números reales para definir punto límite de una sucesión.

Punto límite:

Dada una sucesión de elementos u_n en un espacio semimétrico S, diremos que u, elemento de S, es un **punto límite** de dicha sucesión, sii la sucesión $s(u_n, u)$, de números reales no negativos converge a 0, esto es,

$$\text{u es un punto límite de } u_n \Leftrightarrow s(u_n, u) \to 0$$

Sucesión de Cauchy:

Una **sucesión** u_n en un espacio semimétrico (U, s) se dice de **Cauchy** sii

$$\lim_{i,j \to \infty} s(u_i, u_j) = 0 .$$

Observemos mediante ejemplos que el hecho de ser una sucesión de Cauchy **no es condición necesaria ni suficiente** para asegurar la existencia de un único punto límite de tal sucesión.

Ejemplos :

Un ejemplo trivial sería el conjunto **Q** de los racionales con la distancia euclidea, donde cada sucesión de racionales que define un número irracional es un ejemplo de sucesión de Cauchy que no tiene un punto límite en el espacio.

En el espacio semimétrico del ejemplo 2, consideremos la sucesión $\frac{1}{n}$ que es de Cauchy puesto que

$$\forall \varepsilon \ \exists n_0 \ \forall i > n_0, \ j = i + k ,$$

$$s(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}) = s(\frac{1}{i}, \frac{1}{i+k}) = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{i+k} \right| = \left| \frac{k}{i(i+k)} \right| < \frac{1}{i} < \varepsilon .$$

Pero sin embargo, encontramos que la sucesión tiene dos puntos límite, 1 y 0, ya que

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 : \quad n > n_0 \quad , \quad s(1,\frac{1}{n}) = s(0,\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} < \varepsilon \; .$$

En cambio si consideramos la misma sucesión pero en el espacio semimétrico del ejemplo 3, encontramos que tiene a 0 como su único punto límite aunque dicha sucesión no es de Cauchy puesto que $s(\frac{1}{i},\frac{1}{j}) = 1 \quad si \quad i \neq j$.

Punto de acumulación:

Sea A un subconjunto de un espacio semimétrico S. Un elemento u de S se llama **punto de acumulación de A** sii para cada e > 0 existe un v de A tal que s(u, v) < e.

Conjunto cerrado :

Un conjunto F de un espacio semimétrico se dice **cerrado** sii contiene todos sus puntos de acumulación.

Conjunto abierto:

Un conjunto O de un tal espacio se dice **abierto** sii su complemento es cerrado.

Ejemplos:

En el espacio semimétrico del ejemplo 2, el punto 1 es punto de acumulación de

$A = \left[\, 0,\frac{1}{2} \right]$ por lo que A no es un conjunto cerrado y B = {1} no es abierto.

En el ejemplo 3, el conjunto $A = \left\{ 0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots \right\}$ contiene a su único punto de acumulación, el 0 y por lo tanto A es cerrado y su complemento B = {1} es abierto.

El plano de Moise y algunos resultados inesperados :

Ya en los párrafos anteriores vimos que la modificación de la función distancia puede producir algunos cambios inesperados. Analizaremos algunos resultados que origina la función distancia definida en **M** y que, por lo inusuales, desafían nuestra intuición, siempre dirigida por una mente euclidea.

i) Recordando que en el plano euclideano munido de la métrica usual una consecuencia de la desigualdad triangular es que

$\|P-Q\| = \|P-R\| + \|R-Q\|$ si y sólo si P, Q y R son colineales ,

Ahora, es fácil verificar que s no es una métrica euclideana para **M**, ya que P = (-1,0), Q = (1,0) y R = (0, $\sqrt{3}$) no están alineados y sin embargo

s (P, Q) = s (P, R) + s (R, Q).

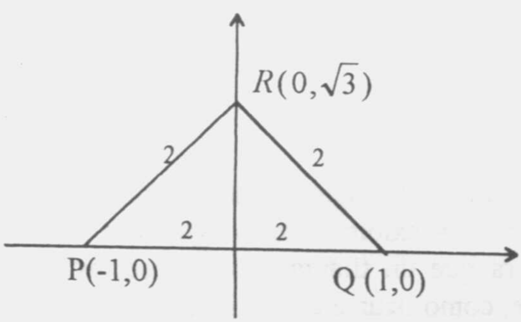

Fig. Nº 1

2 es distancia Moise.

ii) Dadas las rectas $x = a$ y $x = b$, $a \neq b$, la recta de ecuación $x = \dfrac{a+b}{2}$ es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan en la métrica de Moise de ambas pero sin embargo no todos los puntos de esta recta están a igual distancia de Moise de las rectas dadas ya que los puntos $(\frac{a+b}{2}, y)$, con (b,y) y $(\frac{a+b}{2}, y)$ (a,y) $y \neq 0$, distan a Moise $\frac{b-a}{2}$, es decir que "están más cerca" de ambas rectas que el punto $(\frac{a+b}{2}, 0)$ que diste $(b-a)$ de ellas.

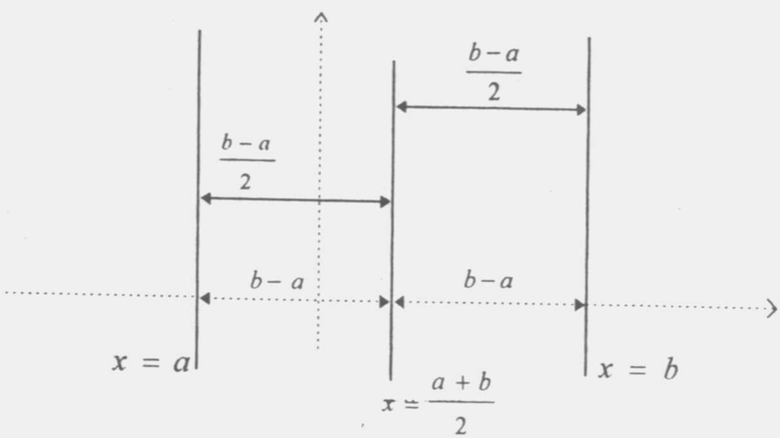

Fig. Nº 2

Triángulos en M :

Habiéndose utilizado originalmente el plano de Moise para demostrar la independencia de los axiomas de congruencia de triángulos no es de extrañar que ocurra que un triángulo sea isósceles sin tener dos ángulos congruentes Moise, como ocurre en el triángulo representado en la fig. Nº 1, o más aun que la propiedad de un triángulo de ser equilátero no equivale a ser equiángulo.

Analice Ud. la relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Es siempre la hipotenusa mayor que los catetos ?. ¿Sigue siendo válido el Teorema de Pitágoras ?. ¿ Y su recíproco ?.

Circunferencias en M :

Una circunferencia con centro C(x, y) y radio r es el conjunto de puntos P del plano tales que s (P, C) = r, su representación gráfica es la usual excepto en el caso en que C pertenezca al eje x .

En la Fig. Nº 3, en la circunferencia pequeña de centro (x, 0) y radio r. Un diámetro es R S ; en efecto :

$$s(R,S) = 2\,\|R - S\| = 2\,\left\|(x - \frac{r}{2}) - (x + \frac{r}{2})\right\| = 2\,r\ .$$

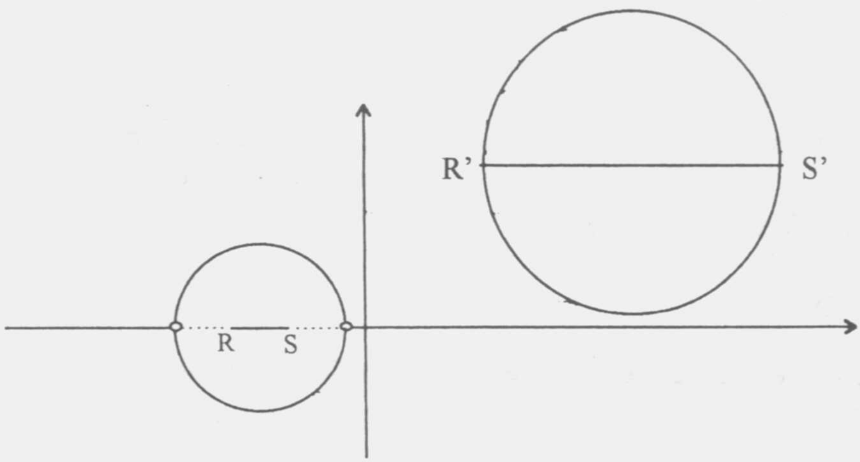

Fig. Nº 3

Resulta así que en **M** la gráfica de una circunferencia puede no ser una curva continua en el sentido euclideano.

También ocurre un ejemplo de una circunferencia que tiene una cuerda de longitud 2r y que sin embargo no es un diámetro, como ocurre con la circunferencia de ecuación

$$x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4,$$

de diámetro 4 y que determina sobre el eje x un segmento de igual longitud. (En la fig. N° 1, el centro es R y P Q , el segmento de longitud 4).

Además, encontramos ejemplos de dos circunferencias disjuntas aunque la distancia entre sus centros es menor que la suma de los radios, como por ejemplo ocurre con las circunferencias de centros C = (0,0) y C' = (0,1) y de radios 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente, pues

$$s(C, C') = 2 < R + R' = 1 + \sqrt{2}$$

O también cuando

$$s(C, C') = R + R'$$

las circunferencias pueden tener 3 puntos en común ; tal caso ocurre cuando C = (0, 0) , C' = (1, 0) y ambas tiene radio unidad. Los puntos comunes son: (1/2, 0), (1/2, $\sqrt{3}$/2), (1/2, -$\sqrt{3}$/2).

Ejercicios :

¿Puede Ud. encontrar ejemplos de circunferencias que tienen cuatro puntos en común ?

Recordemos que una elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' es constante.
Dibujar elipses en el plano de Moise y determinar sus ejes.

Estudiar parábolas e hipérbolas en el plano de Moise. Parte del ejercicio es definir, elipse parábola e hipérbola en el plano de Moise.

Conjuntos abiertos en M:

Puesto que el comportamiento anómalo de **M** ocurre sobre el eje Ox, analicemos el conjunto $N(O,r)=\left\{P \middle| s(P,O)<r\right\}$ donde O es el origen de coordenadas. Es un ejercicio sencillo mostrar que este conjunto es abierto.

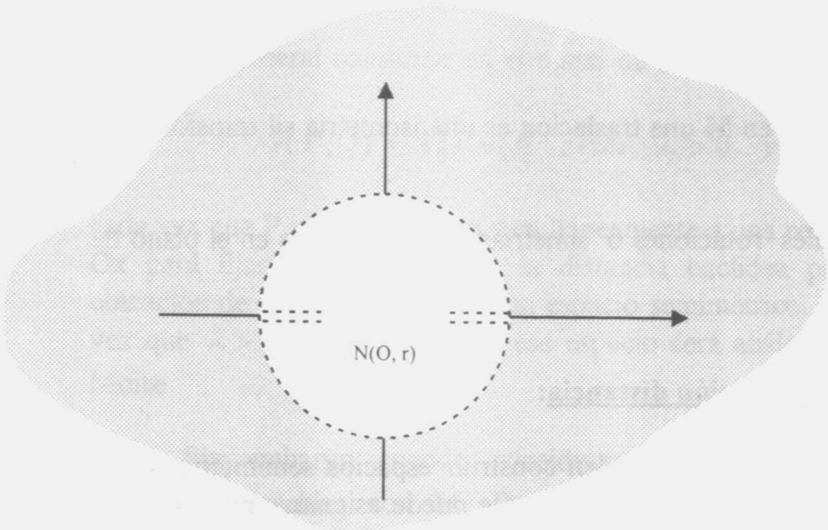

Fig. Nº 4

Pero sin embargo, el conjunto

$$\mathrm{B}=\left\{P \middle| s(P,O)\leq r\right\}$$

no es cerrado puesto que los puntos

$$\left\{(x,0) \middle| -r<x<-\frac{r}{2} \quad o \quad \frac{r}{2}<x<r\right\}$$

son puntos de acumulación de B y no pertenecen a dicho conjunto.

Sin embargo, **M** y **R²** son topológicamente equivalentes puesto que si N(P, r) es un disco abierto en **M**, en cada punto de él se puede centrar un disco abierto en el sentido euclideo y recíprocamente.

Isometrías en M:

En el plano euclidiano las isometrías o transformaciones rígidas son las traslaciones, rotaciones y simetrías y reflexiones deslizantes. Sin embargo en el plano de Moise una traslación puede no ser isometría como ocurre si por ejemplo se considera la traslación determinado por un vector no horizontal

Ejercicio :

Demuestre que en **M** una traslación es una isometría sii transforma el eje x en sí mismo.

Estudiar cuáles rotaciones ó simetrías son isometrías en el plano de Moise.

Discontinuidad de la función distancia:

La facilidad con que se pueden construir espacios semimétricos con propiedades inusuales surge del hecho de que puede asignarse un valor a la distancia entre algunos puntos del espacio y cambiar drásticamente su valor para otros puntos. Dicho de un modo más preciso, en los espacios semimétricos la función distancia puede ser discontinua. Esto es,

Sean u y v dos puntos de un espacio semimétrico, diremos que la función distancia s es continua en u, v sii para todo par de sucesiones u_n y v_n tales que $lim\, u_n = u$ y $lim\, v_n = v$ ocurre que $lim\, s(u_n, v_n) = s(u, v)$.

La función distancia s de **M** no es continua en P(1, 0) , Q ($\frac{1}{2}$, 0) ya que si consideramos las sucesiones $P_n(1, \frac{1}{n})$ y $Q_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 0)$, la sucesión

$$s(P_n, Q_n) = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right]^{1/2}$$

tiende a $\frac{1}{2}$ mientras que $s(P,Q) = 2\|P-Q\| = 1$

Caso general:

En general considere en el plano de una función distancia s definida por

$$s(P,Q) = \lambda\|P-Q\| \quad , con \quad \lambda > 0 \quad y \quad \lambda \neq 1$$

cada vez que P y Q pertenecen simultáneamente a una recta particular (el eje Ox para fijar ideas) e igual a la distancia euclidea para cualquier otra ubicación de P y Q. Generamos un espacio semimétrico. Por supuesto, cada vez que $\lambda > 1$, la geometría de ese espacio será análoga a la del plano de Moise.

Sin embargo cuando consideramos $0 < \lambda < 1$ aparecen algunas diferencias notables con **M**. De manera análoga al caso ya analizado comprobamos que si $\lambda = \frac{1}{2}$, s es una semimétrica analizando el triángulo rectángulo con vértices A = (0,0), B = (4,0) y C = (0,3) determinando que la "longitud" del lado AB es 2 y

$$\|B-A\| + \|C-A\| = \|B-C\|,$$

aunque A, B y C no son colineales.
En este caso el conjunto N(O, r) = $\{P \mid S(P,O) < r\}$ tiene la siguiente representación, en Fig. No. 5.

Y a diferencia de lo que ocurre en el plano de Moise, este conjunto no es abierto ya que los puntos que están sobre el eje Ox y cuyas abscisassean $r \leq |x| < 2r$, son puntos de acumulación del complemento de N(O, r).

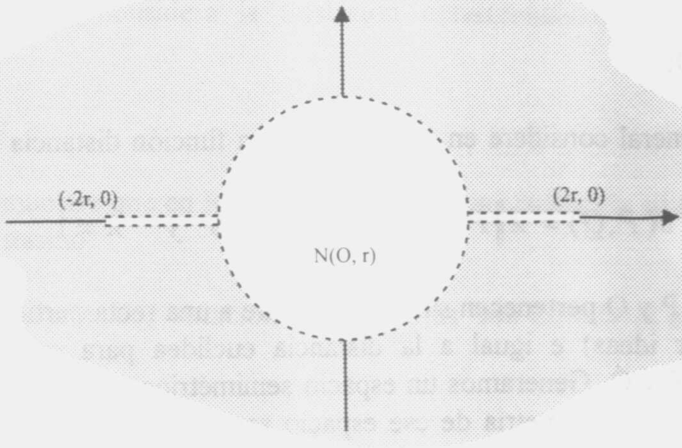

Fig N° 5

Observaciones finales:

En los espacios métricos la exigencia de la validez de la desigualdad triangular establece un fuerte nexo entre las distancias de todos los puntos del plano ; esta circunstancia es la que impide que en los espacios métricos se planteen estas situaciones anómalas que vimos en los ejemplos anteriores. O más precisamente, en los espacios métricos la función distancia es continua en todo par de punto P, Q del espacio. Es posible probar que en un espacio semimétrico cuya función distancia es continua vale la desigualdad triangular, es decir la función distancia es una métrica.

Bibliografía :

1. **The Moise Plane**, James Boone, The College Mathematical Journal, Vol 27, N 3, May 1996.
2. **Theory and Applications of Distance Geometry**, L. Blumenthal. Oxford at Clarendom Press. 1953.

Elementos de Geometría Superior. E. E. Moise - Méjico Centro Regional de Ayuda Tec. 1968.

Universidad Nacional de Tucumán.