Series Geométricas Generalizadas

Marisol Gómez - Esteban Induráin

Resumen : Persiguiendo fines didácticos, analizamos distintas generalizaciones del concepto de serie geométrica, haciendo aparecer conexiones profundas con distintas ramas de la Matemática.

1. Introducción.

El trabajo que aquí presentamos está inspirado en parte de un curso que el segundo coautor impartió en el Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de San Luis (Argentina), en agosto de 1997. El curso iba dirigido a la Formación del Profesorado en Matemáticas. Con este espíritu se pensó que una buena *técnica didáctica* para el aprendizaje de las matemáticas puede ser la *persecución de un buen teorema* a lo largo de las distintas ramas clásicas del saber científico, buscando tanto *aplicabilidad* como *interdisciplinariedad*. Por un "buen teorema", en el sentido anterior, entendemos aquél que haciendo uso de conceptos y técnicas elementales, dé lugar a aplicaciones múltiples no triviales de amplio espectro y variedad.

El *juego didáctico* consistiría entonces no sólo en *exponer uno de esos teoremas* y sus consecuencias e implicaciones, sino también en *ver analogías* y buscar *aplicaciones* "exóticas" a base de rastrear tablas de materias de distintos libros donde podamos pensar que tal teorema haya podido ser empleado.

En nuestro caso, el teorema de referencia o punto de partida que se escogió para el curso en cuestión fue el *Principio de la Aplicación Contractiva,* también conocido como *Teorema del Punto Fijo de Banach.* Tal resultado descansa fundamentalmente en dos ideas básicas: una idea es tan simple como la de *sumar progresiones geométricas,* mientras que la otra es la de *completitud* en espacios métricos. Entre las aplicaciones de dicho teorema de punto fijo se encuentran resultados clásicos del Análisis Matemático, como el teorema de la función implícita, el teorema de la función inversa, teoremas de existencia de solución para determinados sistemas de ecuaciones diferenciales o integrales, aproximación numérica de raíces de una función real de variable real, análisis numérico matricial, análisis input-output en Teoría Económica, conjuntos fractales, etc. (Puede verse esto en Gómez et al. [1993]).

En el presente trabajo, sin pretender desarrollar el curso sobre aplicaciones contractivas, y, pensando además en un público menos especializado, entresacamos una serie de ideas que creemos simples y motivadoras. Podemos resumirlas en un intento de respuesta a la pregunta, aparentemente inocente:

¿ Sabe usted sumar una serie geométrica?

Como veremos, la idea de *serie geométrica*, al pensar en analogías o generalizaciones, va mucho más allá de una serie de números reales del tipo

$$A + A \cdot K + A \cdot K^2 + \ldots + A \cdot K^n + \ldots \quad (A, K \in \mathbf{R}).$$

Eso nos lleva al título que hemos propuesto para el presente trabajo.

2. Series geométricas: Concepto, analogías y generalizaciones.

Situémonos en la recta real $\mathbf{R}$. Una *serie geométrica* se define como una serie numérica de término general a_n tal que existe una constante $k \in \mathbf{R}$, llamada *razón de la serie geométrica*, de manera que $a_{n+1} = k \cdot a_n \quad (n \in \mathbf{N})$. Así, las *sumas parciales* de una tal serie vienen dadas por $S_n = a_1 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 \cdot k) + a_1 \cdot k^2 + \ldots a_1 \cdot k^{n-1} = a_1 \cdot (1 + k + k^2 + \ldots k^{n-1})$. Si $k \neq 1$. la expresión anterior es $S_n = a_1 \cdot (\frac{1-k^n}{1-k})$.

Salvo en el caso trivial en que $a_1 = 0$ vemos que la *convergencia* de una serie geométrica va a depender de la existencia del límite $\lim_{n \to \infty} k^n$. Este límite vale 0 si $|k| < 1$, y vale 1 si $k = 1$. En otros casos, la sucesión no tiene límite finito. Además, en el caso $k = 1$, el término general de la serie es $a_n = a_1 \neq 0$, luego la serie diverge.

En definitiva:

Una serie geométrica de términos no nulos y razón $k \in \mathbf{R}$ converge si y sólo si $|k| < 1$.

La *suma* de la serie geométrica, o valor límite en el caso de convergencia, es $\frac{a_1}{1-k}$.

Observamos que la condición clave para la convergencia indica una *contracción* en los términos o sumandos de la serie: al pasar del sumando a_n al siguiente a_{n+1} ha actuado una "razón de contracción" de módulo $|k| < 1$.

Ahora que ya sabemos lo que ocurre en la recta real $\mathbf{R}$, el siguiente paso es *analizar en profundidad, buscando analogías*, la situación anterior. En primer lugar observamos que la clave viene dada por una expresión del tipo:

$$a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \ldots + a \cdot k^n + \ldots \quad (a, k \in \mathbf{R}).$$

En esta expresión debemos destacar cuatro hechos notables: Aparece un conjunto numérico ($\mathbf{R}$). Sobre él hay definida una operación binaria asociativa ("$+$"). También hay definida otra operación binaria asociativa ("$\cdot$"), distributiva respecto de la anterior, y que da sentido también a expresiones como "k^n". Hay por último una idea de *convergencia o paso al límite* que nos permitirá hablar de *suma de la serie geométrica*, cuando ésta sea convergente.

Claramente, aparecen conceptos *algebraicos* (conjunto con dos operaciones binarias internas, con determinadas propiedades estructurales), y, al menos, un concepto *topológico* (idea de paso al límite, o de *convergencia de una sucesión* de elementos de un conjunto).

Resulta que incluso en conjuntos desprovistos de topología, podemos definir una idea *primitiva* de *convergencia*, basada en los conceptos de *límite superior y límite inferior* de familias de subconjuntos, como sigue: Siendo X un conjunto y $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, se llama *límite superior* de $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} (\bigcup_{n>k} X_n)$, y se llama *límite inferior* de la sucesión a $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (\bigcap_{n>k} X_n)$. Cuando ambos límites coinciden, el conjunto que determina esa coincidencia se denomina *límite de la sucesión de subconjuntos*, de la que a su vez se dice que es *convergente*. En el caso de sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de elementos de X, se puede dar en llamar *límite de la sucesión de elementos* a, cuando exista, el límite de la sucesión de subconjuntos unipuntuales $(\{x_n\})_{n \in \mathbf{N}}$.

Aunque a primera vista esta idea de convergencia pueda dejarnos satisfechos en nuestra intención de generalizar los hechos que se dan en una serie geométrica de números reales, de manera que pasemos a *necesitar únicamente generalizar* *los aspectos algebraicos* (relativos a dos operaciones binarias), una simple observación nos hace ver que esta primera aproximación a una *convergencia* es extremadamente pobre: En efecto, si una sucesión converge en el sentido anterior, debe ser *cuasiconstante*, esto es, sus términos son todos iguales a partir de cierto término.

Al particularizar esto para las series geométricas del tipo $a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \ldots + a \cdot k^n + \ldots \quad (a, k \in X)$ sobre un conjunto abstracto X dotado de dos operaciones binarias "$+$" y "$\cdot$", observamos que a partir de cierto $n_0 \in \mathrm{N}$, y siendo
$S_r = a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \ldots + a \cdot k^r$, debe ser $S_n = S_{n+1} \quad (n \geq n_0)$. Podemos pensar en algo así como que $a \cdot k^n = 0 \quad (n > n_0)$, pero ocurre que incluso el elemento "0" puede no tener sentido en la estructura algebraica $(X, +, \cdot)$, es decir, podría suceder que la operación binaria "$+$" carezca de elemento neutro. Vemos un *ejemplo* en esta dirección: Sea $X = \{a, b, c\}$ con la operación conmutativa "$+$" dada por $a + a = a$; $a + b = b$, $a + c = c$; $b + b = b$; $c + c = c$; y la operación "$\cdot$", también conmutativa, dada por $a \cdot a = a$; $a \cdot b = a$, $a \cdot c = a$; $b \cdot b = b$; $b \cdot c = b$; $c \cdot c = c$. Aquí, por ejemplo, la serie *"geométrica"* $a + a \cdot b + a \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^n + \ldots$ converge al valor $a \in X$.

En este ejemplo anterior, es interesante observar que $x + x = x = x \cdot x$, para todo $x \in X$. A este tipo de estructuras algebraicas $(X, +, \cdot)$ podemos denominarlas *estructuras de doble idempotencia.* Y no son infrecuentes. De hecho aparecen en multitud de contextos. Un caso destacado son las *álgebras de Boole:* Para fijar ideas, podemos decir que se trata de la estructura algebraica que se da en la familia de subconjuntos de un conjunto dado X, con las operaciones de unión ("$\cup$") e intersección ("$\cap$") de subconjuntos. En los casos de *álgebras de Boole*, el orden en que consideramos las operaciones internas "$+$" y "$\cdot$" es indiferente: La estructura $(X, +, \cdot)$ resulta ser isomorfa a la estructura $(X, \cdot, +)$. Las operaciones binarias involucradas son asociativas, conmutativas, y distributivas una de cada otra.

Otra situación de doble idempotencia (aunque no necesariamente un álgebra de Boole) se da en un conjunto totalmente ordenado con las operaciones *"tomar* *el máximo" y "tomar el mínimo"*. El ejemplo previo es de este último estilo sin más que considerar en X el orden total "$\prec$" definido por $a \prec b \prec c$.

Pasando a un ejemplo de otra naturaleza, hay que hacer notar también que, aun existiendo un elemento neutro en $(X, +)$, el hecho de que $a \cdot k^n = 0$ $(n \geq n_0)$ no implica ni que $a = 0$ ni tampoco que $k = 0$. La situación puede darse en estructuras de *anillo con divisores de cero*. Por ejemplo, en el anillo $\mathbf{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ de los enteros módulo 4, donde se verifica que $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$, resulta que la serie *"geométrica"* $\bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{2}^2 + \ldots + \bar{3} \cdot \bar{2}^n + \ldots$ converge al valor $\bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{3} + \bar{2} = \bar{1}$. Obsérvese además que si $n \geq 2$ se tiene que $\bar{3} \cdot \bar{2}^n = \bar{0}$, $\bar{3} \neq \bar{0}$, $\bar{2} \neq \bar{0}$.

Ciertamente, ejemplos semejantes pueden resultar extraños, y, tal vez, desprovistos del interés práctico que despiertan las series geométricas de números reales, punto de partida de nuestro estudio. El lector podría investigarlos sistemáticamente por su cuenta. Nosotros los hemos incluido con la idea de dejar patente que el conjunto de contextos en los que pueden llegar a considerarse series geométricas convergentes es amplio y variado, incluso no exento de cierto exotismo, llegando a tener sentido hasta en ciertas estructuras en las que el conjunto base es *finito,* como ocurre en los dos ejemplos concretos que hemos expuesto. En la línea del segundo ejemplo, y buscando algún resultado algebraico general, apuntamos a título de muestra un resultado que el lector puede verificar por su cuenta:

"Sea $(X, +, \cdot)$ una estructura algebraica de anillo. Sean $a, k \in X$ tales que ni a ni k coinciden con el elemento neutro, que denotaremos " 0", de $(X, +)$. Entonces, la serie geométrica $a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \ldots a \cdot k^n + \ldots$ converge, en el sentido anterior de coincidencia de límites superior e inferior, si y sólo si k es un divisor de cero a derecha en $(X, \cdot)$, es decir, existe un elemento $l \in X$ tal que $l \cdot k = 0$".

Más aún: *"La existencia de una serie geométrica convergente del tipo anterior $a + a \cdot b + a \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^n + \ldots, (a, b \in X \setminus \{0\})$ caracteriza el que un anillo $(X, +, \cdot)$ no sea un dominio de integridad, esto es, tenga divisores de cero".*

Volviendo otra vez a las series geométricas de números reales, nos llevamos la desagradable sorpresa de que con esa idea vaga y primitiva de *convergencia entendida mediante coincidencias de límite superior e inferior*, resulta que sólo convergerían las series $a+a\cdot k+a\cdot k^2+\ldots+a\cdot k^n+\ldots$ $(a,k \in \mathbf{R})$ cuasiconstantes, lo que exige que a partir de cierto $n_0 \in \mathbf{N}$ sea $a \cdot k^n = 0$ $(n \geq n_0)$, forzando, aquí sí, a que o bien $a = 0$, o bien $k = 0$. (Nótese además, en la línea del resultado algebraico anterior, que $(\mathbf{R},+,\cdot)$ es cuerpo, y, por tanto, dominio de integridad). En ambos casos ($a = 0$, $k = 0$) llegamos a que la única serie geométrica convergente sería aquélla con todos sus términos nulos, salvo quizá el primer término. Ciertamente, es una situación muy pobre, que nos hace sacar como conclusión que: *Es necesario disponer a priori de una buena topología o, al menos, de un buen concepto de convergencia, en el conjunto sobre el que se vaya a considerar una idea de serie geométrica generalizada.* Claramente, estas topologías o convergencias dadas a priori pueden tener muy poca relación con la convergencia mediante coincidencia de límites superior e inferior que hemos definido anteriormente.

En el caso de la recta real $\mathbf{R}$, la topología usual o *euclídea* viene dada por la métrica $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ dada por $d(x,y) = |x-y|$ $(x,y \in \mathbf{R})$. Los abiertos de esta topología son uniones de intervalos abiertos simétricos del tipo $(x-\alpha\ ,\ x+\alpha)$, donde $x \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. En esta topología, una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge a un valor $L \in \mathbf{R}$ si para todo $\alpha > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|x_n - L| < \alpha$ para cualquier $n \geq n_0$. Puede comprobarse además que esta convergencia coincide con una del tipo "coincidencia de límite superior e inferior", tras modificar en la dirección siguiente las definiciones de los conceptos básicos *límite superior e inferior:* $Lim\,Sup(x_n) = inf_{n \in \mathbf{N}}(sup_{k \geq n}\{x_k\})$; $Lim\,Inf(x_n) = sup_{n \in \mathbf{N}}(inf_{k \geq n}\{x_k\})$, donde dado $A \subseteq \mathbf{R}$, por $sup(A)$, $inf(A)$ denotamos respectivamente el *supremo* (menor cota superior) e *ínfimo* (mayor cota inferior) de A en la topología euclídea usual.

Otro hecho fundamental que se da en $\mathbf{R}$, y que forma parte de su propia axiomática, es el *postulado de continuidad,* que podemos traducir por el hecho de que el espacio métrico que la distancia euclídea determina en $\mathbf{R}$ es *completo.*

Esto significa que toda *sucesión fundamental* (también llamada *sucesión de Cauchy*) en $\mathbb{R}$ es convergente algún límite $L \in \mathbb{R}$. Por *sucesión fundamental* entendemos aquella $(x_n)_{n \in \mathbb{R}}$ tal que para todo $\alpha > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $|x_n - x_m| < \alpha$, para cualesquiera $n, m \geq n_0$.

Es con estos conceptos de *espacio métrico* y de *completitud* con los que puede generalizarse convenientemente el concepto de *serie geométrica* al estilo de las series geométricas de números reales. Para ello necesitamos alguna definición previa.

Definición: Consideremos X un conjunto no vacío. Una *distancia o métrica* en X es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ verificando las propiedades siguientes:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y \ (x, y \in X)$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \ (x, y \in X)$,

(iii) *desigualdad triangular:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ (x, y, z \in X)$.

Al par (X, d) se le denomina *espacio métrico.* Se le dota de una topología cuyos conjuntos abiertos son uniones de *bolas abiertas.* La *bola abierta* de centro en $x \in X$ y radio $\alpha > 0$ se define como el conjunto $B_\alpha(x) = \{y \in X : d(x, y) < \alpha\}$.

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice *convergente* a $L \in X$ si para todo $\alpha > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, L) < \alpha \ (n \geq n_0)$. Se dice *sucesión fundamental* si para todo $\alpha > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \alpha \ (n, m \geq n_0)$. El espacio (X, d) se dice *completo* si toda sucesión fundamental converge a algún valor $L \in X$. Como primer ejemplo tenemos que por el propio postulado de continuidad de la recta real, ésta es un espacio métrico completo con la métrica euclídea.

Veamos ahora cuál es la *idea clave,* por otra parte muy sencilla y natural, de la generalización que pretendemos desarrollar:

"Si tenemos un espacio métrico completo (X, d) en el que además hay definidas dos operaciones binarias internas "+" y "$\cdot$", en el momento que una serie geométrica de la forma $a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \ldots + a \cdot k^n + \ldots \quad (a, k \in X)$ sea tal que llamando $S_n = a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \ldots + a \cdot k^{n-1} \quad (a, k \in X \ , n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 1)$

se tenga que la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\in N}$ sea fundamental, entonces la serie geométrica en cuestión es convergente al valor límite de la sucesión de sumas parciales".

En esta dirección, y con el ánimo de encontrar también alguna buena idea que pueda ser fácilmente generalizada a este contexto de espacios métricos completos, cabe regresar otra vez al punto de partida de las series geométricas de números reales, analizándolas desde esta perspectiva de convergencia. Como ya indicamos, una serie numérica del tipo $1 + k + k^2 + \ldots + k^n + \ldots$ $(k \in \mathrm{R})$ es convergente si y sólo si $|k| < 1$. Si $n, m \in \mathrm{N}$, $n \leq m$ resulta que

$$|S_m - S_n| = |k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1}| \leq$$

$$|k|^n + |k|^{n+1} + \ldots + |k|^{m-1} \leq |k|^n + |k|^{n+1} + \ldots = \frac{|k|^n}{1 - |k|}.$$

Como quiera que, al ser $|k| < 1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} |k^n| = 0$, se concluye que $(S_n)_{n\in N}$ es sucesión fundamental. Como vemos, *la clave radica nuevamente en el hecho* $|k| < 1$.

Teniendo presente esta observación, y utilizando la desigualdad triangular en un espacio métrico completo (X, d) nos damos cuenta de que siendo "$+, \cdot$" operaciones binarias en X, dada una serie geométrica de la forma $a + a \cdot b + a \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^n + \ldots$, $(a, b \in X)$, si podemos encontrar una constante $k \in [0.1)$ con $d(S_n, S_{n+1}) \leq k^n$ $(n \in \mathrm{N})$, entonces la serie geométrica en cuestión será tal que su sucesión de sumas parciales es fundamental y, por ende, convergente a un valor que pasaría a considerarse *"suma de la serie geométrica"*. Nótese también que esto es análogo a encontrar $k \in [0, 1)$ tal que $d(S_{n+1}, S_{n+2}) \leq k \cdot d(S_n, S_{n+1})$. Esto nos lleva a una idea con la que abríamos esta seeción, a saber, la posibilidad de encontrar un *factor de contracción,* de forma que al pasar de $d(S_n, S_{n+1})$ a $d(S_{n+1}, S_{n+2})$ este último valor aparezca *"contraído mediante el factor k"* con respecto al valor anterior". Estamos ya muy próximos a enunciar el importante resultado conocido como *"Principio de la Aplicación Contractiva"*, también llamado *"Teorema del Punto Fijo de Banach"*, al cual le dedicamos la siguiente sección.

3. Aplicaciones contractivas.

A la vista del final de la sección anterior, siendo (X, d) un espacio métrico completo dotado de dos operaciones binarias "+" y "·" que den sentido a series geométricas de la forma $a + a \cdot b + a \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^n + \ldots, \quad (a, b \in X)$, queremos estudiar cuándo puede existir alguna constante $k \in [0, 1)$ de manera que $d(S_{n+1}, S_{n+2}) \leq k \cdot d(S_n, S_{n+1})$. Podemos pensar intuitivamente en la aparición de una determinada función $f : X \longrightarrow X$ que transforme S_n en $S_{n+1} \quad (n \in \mathrm{N})$. Esa intuición nos haría imaginar el comportamiento de f sobre los elementos de la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n \in \mathrm{N}}$, pero no su comportamiento global en X. Así, con un grado mayor de imaginación y buscando una definición clara y precisa, podemos llegar al concepto de *aplicación contractiva*, que introducimos a continuación.

Definición: Sea (X, d) un espacio métrico. Una aplicación $F : X \longrightarrow X$ se dice *contractiva* si existe una cierta constante $k \in [0, 1)$ tal que $d(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Pasamos a continuación a enunciar el importante resultado conocido como *"Principio de la Aplicación Contractiva"*. Como veremos se trata de un *teorema de punto fijo* y no de una colección de técnicas de sumación de series geométricas. Así, a primera vista, la introducción de tal resultado podría parecer ajena al tema que nos ocupa. Sin embargo, como veremos, en la prueba de este resultado interviene decisivamente el concepto de serie geométrica. Más aún, veremos que ciertas series geométricas en determinados espacios métricos completos resultan ser convergentes al provenir de adecuadas aplicaciones contractivas que determinan su comportamiento.

Teorema 1. (Principio de la aplicación contractiva o Teorema del punto fijo de Banach): Sea (X, d) un espacio métrico (no vacío) completo y sea $F : X \longrightarrow X$ una aplicación contractiva. Entonces, existe un punto fijo de F, es decir, un elemento $z \in X$ tal que $F(z) = z$. Además, este punto fijo es único.

Demostración: Probaremos en primer lugar la *unicidad* del punto fijo (supuesto existente). A continuación, probaremos su *existencia*.

Si z_1, z_2 fuesen puntos fijos de F resultaría que $d(z_1, z_2) = d(F(z_1), F(z_2)) \leq k \cdot d(z_1, z_2)$. Al ser $|k| < 1$ se sigue que $d(z_1, z_2) = 0$. Luego, por la definición de distancia, se concluye que $z_1 = z_2$.

Para probar la existencia, tomemos un elemento cualquiera $x_0 \in X$. Consideramos la sucesión $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$ definida recurrentemente mediante $x_{n+1} = F(x_n)$ $(n \in \mathrm{N})$. Se tiene que dados $n, m \in \mathrm{N}$, $n \leq m$, resulta

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \leq$$

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) + \ldots =$$

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(F(x_n), F(x_{n+1})) + d(F(F(x_n)), F(F(x_{n+1}))) + \ldots \leq$$

$$(d(x_n, x_{n+1})) \cdot (1 + k + k^2 + \ldots) = \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1-k}.$$

Por otra parte, y de manera análoga, resulta que $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1)$. Así se llega a $d(x_n, x_m) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1)$. Comoquiera que al ser $|k| < 1$ se tiene $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$, se concluye que $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$ es sucesión fundamental, y, por tanto, es convergente a un valor $z \in X$.

Para ver que $z = F(z)$ basta comprobar que $d(z, F(z)) = 0$, o, equivalentemente, que para todo $\alpha > 0$ se tiene que $0 \leq d(z, F(z)) < \alpha$. Tomemos pues $\alpha > 0$ y sea $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $d(x_n, z) < \frac{\alpha}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Eligiendo $n > n_0$ cualquiera, por la desigualdad triangular de la distancia se tiene que

$$d(z, F(z)) \leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(z)) = d(z, x_{n+1}) + d(F(x_n), F(z)) \leq$$

$$d(z, x_{n+1}) + k \cdot d(x_n, z) < \frac{\alpha}{2} + k \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{1+k}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} < \alpha.$$

Esto concluye la demostración.

Notas 1

i) En la prueba del resultado anterior puede observarse que aparece un *algoritmo de convergencia* hacia el punto fijo que estamos buscando: Se parte de un elemento x_0 cualquiera, y se van calculando recurrentemente las distintas *iteradas* de la aplicación F actuando sobre x_0, esto es, se hallan los valores x_0, $F(x_0)$, $F(F(x_0)), \ldots$ dando lugar a la sucesión $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$ donde $x_{n+1} = F(x_n)$ $(n \in \mathrm{N})$.

ii) El hecho de que podamos partir de *cualquier* $x_0 \in X$ de forma que la convergencia, independientemente de este valor de partida, sea siempre hacia el punto fijo de F, hace que podamos afirmar que el algoritmo anterior *"lleva incorporado un código corrector de errores"*. En efecto, si en los cálculos de las distintas iteradas de F sobre un valor inicial x_0 cometemos un error, calculando un dato "falso" $y_0 \in X$, podemos empezar de nuevo con este dato y_0 como si fuera el dato inicial, volviendo a aplicarle el algoritmo, y sabiendo que, debido a esa independencia del dato inicial, se debe alcanzar también la convergencia al punto fijo de F.

iii) Vemos que en la prueba del resultado anterior se han utilizado de manera decisiva dos conceptos, a saber, *serie geométrica* de números reales, y *completitud* en espacios métricos.

iv) Si en el espacio métrico completo (X, d) hay definidas dos operaciones "+" y "·" que den sentido a la consideración de series geométricas como las que hemos ido manejando, y siendo además $(X, +)$ una estructura de *grupo* (por tanto está definida la operación "−", $(-) : X \times X \longrightarrow X$ de forma que $x - y = z$ con z único tal que $z + y = x \quad (x, y \in X)$), entonces si $F : X \longrightarrow X$ es una aplicación contractiva, y x_0 es un elemento cualquiera de X, la evolución de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ $(x_n = F(x_{n-1})$,
$n \in \mathrm{N})$ puede entenderse como la evolución de una "serie en X" de la forma $x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \; (n \in \mathrm{N})$. Si bien esta "serie" no tiene por qué ser geométrica, sí que ocurre que algunas series geométricas, de frecuente aparición en contextos diversos, responden al esquema anterior, y, por consiguiente, son convergentes en virtud del principio de la aplicación contractiva.

v) El resultado en cuestión apareció en la tesis doctoral (1920) del matemático polaco Stefan Banach, en la Universidad de L'vov. Se publicó en lengua francesa en 1922. (Véase Banach [1922]).

Veamos ahora alguna aplicación del teorema del punto fijo de Banach al estudio de ciertas familias de series geométricas en determinados espacios métricos completos.

Un primer ejemplo va a ser $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots x_n) \ ; \ x_i \in \mathbf{R} \ (i = 1, \dots, n)\}$. Podemos dotar a este conjunto de las operaciones "+" y "·" dadas, repectivamente, por la suma y producto coordenada a coordenada. También podemos dotarle de distintas distancias que hagan de él un espacio métrico completo, como por ejemplo $d((x_1, \dots, x_n) \ , \ (y_1, \dots, y_n)) = max_{i=1,\dots,n}\{|x_i - y_i|\}$. Resulta inmediato ver que una serie geométrica en este contexto no es más que una colección de n series geométricas de números reales, que pueden tratarse individualmente. Si tenemos $(a_1, \dots, a_n) \ , (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ la serie geométrica $(a_1, \dots, a_n) + (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)^2 + \dots +$ $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)^p + \dots$ da lugar a n series $a_i + a_i \cdot b_i + a_i \cdot b_i^2 + \dots +$ $a_i \cdot b_i^p + \dots \ (i = 1, \dots, n)$. En consecuencia, la serie converge si y sólo si $max_{i=1,\dots,n}\{|b_i|\} < 1$. Obsérvese también que, en este caso, la aplicación $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dada por $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdot b_1, \dots, x_n \cdot b_n)$ es contractiva, luego en virtud de la nota 1. iv) anterior podríamos haber deducido también de aquí la convergencia de la serie en $\mathbf{R}^n$.

La siguiente familia de ejemplos proviene del concepto de *espacio normado*, más restrictivo que el de espacio métrico. Introducimos este concepto a continuación.

Definición: Sea $(X, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. (Aquí "+" denota la operación interna que hace de $(X, +)$ un grupo abeliano, mientras que "·" denota la operación externa con dominio de operadores en $\mathbf{R}$). Llamaremos *norma* definida sobre X a una aplicación $||\cdot|| : X \longrightarrow [0, +\infty)$ que cumpla las propiedades siguientes:

i) $||x|| = 0 \iff x = \bar{0}$ (elemento neutro de $(X, +)$),

ii) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, para todo $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in X$.

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, para todo $x, y \in X$.

Al par $(X, ||\cdot||)$ se le denomina *espacio normado*. A la aplicación $D : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $D(x, y) = ||x - y|| \ (x, y \in X)$ se le denomina *distancia* *asociada a la norma.*

Puede comprobarse que, en efecto, (X, D) es un espacio métrico. En el caso especial en que (X, D) sea espacio métrico completo, decimos que es un *espacio de Banach.* Ejemplos de esta situación son R con la norma $\|x\| = |x|$ $(x \in \mathrm{R})$ y R^n donde pueden definirse distintas normas, como es el caso de $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = max_{i=1,\ldots,n}\{|x_i|\}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$.

Ejemplos más sofisticados son $l_p = \{(x_1, \ldots, x_i, \ldots) : x_i \in \mathrm{R}\ ,\ i \in \mathrm{N},$ $1 \leq p < \infty\ , \sum_1^\infty |x_i|^p < \infty\}$, con la norma $\|(x_1, \ldots, x_i, \ldots)\| = (\sum_1^\infty |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, o también $C([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathrm{R}\ ,\ f\ continua\}$ con la norma $\|f\| = sup_{x \in [0,1]}\{|f(x)|\}$, ejemplos que el lector puede consultar en cualquier libro introductorio de Análisis Funcional, como Jameson [1974].

Siendo $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, también es espacio de Banach el conjunto $L(X,Y) = \{f : X \to Y\ ,\ f$ lineal y continua$\}$ con la norma $\|f\| = sup_{\{x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\}}\|f(x)\|_Y$.

Un caso particular de especial atención aparece cuando $X = Y = \mathrm{R}^n$, dado que las aplicaciones lineales (que resultan ser siempre continuas) de R^n en R^n pueden identificarse con el espacio M_n de las matrices cuadradas de n filas y n columnas de números reales.

En este conjunto M_n nos podemos plantear la convergencia de "series geométricas" de tres tipos:

i) $I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n + \ldots,\ A \in \mathrm{M}_n$,

ii) $A + A \cdot B + A \cdot B^2 + A \cdot B^3 + \ldots + A \cdot B^n + \ldots\ ,\ A, B \in \mathrm{M}_n$,

iii) $A + B \cdot A + B^2 \cdot A + B^3 \cdot A + \ldots + B^n \cdot A + \ldots\ ,\ A, B \in \mathrm{M}_n$.

Las de este último tipo iii) vienen a ser equivalentes a las del tipo ii) sin más que tomar matrices traspuestas. En cuanto al tipo ii), al haber divisores de cero en $(M_n, +, \times)$ (aquí "$\times$" denota el producto de matrices) puede haber series con A, B matrices no nulas, que sean "trivialmente" sumables al ser $A \cdot B$ la matriz nula, incluso aunque la serie $I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n + \ldots,\ A \in \mathrm{M}_n$ no sea sumable. Un ejemplo típico de esta situación aparece tomando

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por su interés, nos centraremos en el estudio de las series geométricas matriciales del tipo i).

Aplicando razonamientos anteriores, podemos pensar que una matriz $A \in \mathbf{M}_n$ es un elemento de $L(\mathbf{R}^n\ ,\ \mathbf{R}^n)$. En este espacio se consideran *normas matriciales* como $\|A\| = sup_{\{X \in \mathbf{R}^n\ ,\ \|X\|_{\mathbf{R}^n} \leq 1\}}\{\|A \cdot X\|_{\mathbf{R}^n}\}$. Las normas que se obtienen dependen, en consecuencia, de las normas $\|\cdot\|_{\mathbf{R}^n}$ que se hayan considerado en $\mathbf{R}^n$.

A tal respecto, puede demostrarse el resultado siguiente:

Proposición 1.

i) Si en $\mathbf{R}^n$ se toma la norma $\|\cdot\|_1$ dada por $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$ $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, entonces en $\mathbf{M}_n$ se genera como norma asociada:

$\|A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}\|_{\mathbf{M}_n} = max_j\{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\} = max\{|a_{11}| + |a_{21}| + \ldots + |a_{n1}|, |a_{12}| + |a_{22}| + \ldots + |a_{n2}|, \ldots, |a_{1n}| + |a_{2n}| + \ldots + |a_{nn}|\}$.

ii) Si en $\mathbf{R}^n$ se toma la norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, entonces en $\mathbf{M}_n$ se genera como norma asociada:

$\|A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}\|_{\mathbf{M}_n} = max_i\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\} = max\{|a_{11}| + |a_{12}| + \ldots + |a_{1n}|, |a_{21}| + |a_{22}| + \ldots + |a_{2n}|, \ldots, |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nn}|\}$.

iii) Si en $\mathbf{R}^n$ se toma la norma $\|\cdot\|_2$ dada por $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, entonces en $\mathbf{M}_n$ se genera una norma asociada que verifica:

$\|A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}\|_{\mathbf{M}_n} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$, donde la desigualdad puede ser estricta.

Demostración: Puede verse en Gómez et al. [1993]. También puede verse en Gasca [1987]. En p. 12 de Isaacson y Keller [1966] se calcula explícitamente la norma matricial que aparece en el caso iii). Puede probarse que este valor es $max\{\sqrt{|\lambda|}\ :\ \lambda$ es un autovalor de $A^T \cdot A$, siendo A^T la traspuesta de $A\}$.

Pensando nuevamente en los resultados obtenidos sobre *aplicaciones contractivas,* podemos ver que, dada una matriz $A \in \mathrm{M}_n$, al entenderla como un elemento de $L(\mathrm{R}^n\ ,\ \mathrm{R}^n)$ pasa a ser contractiva en el momento que para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{R}^n$ se tenga que exista una constante $k \in [0,1)$ tal que $\|A{\cdot}X - A{\cdot}Y\| \leq k{\cdot}\|X - Y\|$. Como resulta que, por la propia definición de norma matricial, se tiene $\|A \cdot X - A \cdot Y\| \leq \|A\| \cdot \|X - Y\|$, vemos que una *condición suficiente de contractividad* es que $\|A\| < 1$ para alguna norma matricial. Y en este caso, por tanto, se tiene que la serie de tipo i) $I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$ es convergente. Obsérvese como *corolario* de la Proposición 1, que si tenemos una matriz $A \in \mathrm{M}_n$ tal que la suma de los valores absolutos de cualquiera de sus filas es menor que 1, entonces la serie $I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$ converge. Lo mismo pasa si la suma de los valores absolutos de cualquier columna de A es menor que 1. También ocurre si la suma de los cuadrados de los elementos de A es menor que 1. Un ejemplo de esto último, que no entra en las situaciones anteriores de acotación estricta por 1 de las sumas de valores absolutos de elementos de filas o columnas es $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Formalizamos la discusión anterior, con algún resultado adicional, en la Proposición 2 que enunciamos a continuación, y en las Notas 2 que le siguen:

Proposición 2. Si para alguna norma matricial ocurre que $\|A\| < 1$, siendo $A \in \mathrm{M}_n$, entonces la serie geométrica $I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$ es convergente, y tiene por valor de convergencia $(I - A)^{-1}$, matriz inversa de $I - A$.

Demostración: La convergencia de la serie se sigue inmediatamente del hecho de resultar contractiva la aplicación que A determina como elemento de $L(\mathrm{R}^n\ ,\ \mathrm{R}^n)$. Si hacemos ahora el cálculo, para cada $p \in \mathrm{N}$, de la expresión $(I - A) \cdot (I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1})$ obtenemos $I - A^p$. Por la propia definición de norma matricial es fácil probar que $\|A^p\| \leq (\|A\|)^p$ $(p \in \mathrm{N})$, de donde al ser $\|A\| < 1$ se sigue que $\lim\limits_{p\to\infty} \|A^p\| = 0$, y por la definición general de norma se concluye que $\lim_{p\to\infty} A^p = (\bar{0})$, matriz nula en M_n. (Para más detalles véase la sección 5.6 de Horn y Johnson [1992]). Concluimos entonces que $\lim_{p\to\infty}(I - A)\cdot(I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}) = \lim_{p\to\infty}(I - A^p) = I$, luego $\lim_{p\to\infty}(I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}) = (I - A)^{-1}$, de manera que la serie geométrica converge a este valor $(I - A)^{-1}$.

Notas 2

i) En el caso de ser $n = 1$ las "matrices reales de una fila y una columna" obviamente pasan a identificarse con los números reales. Recuperamos así como caso particular el resultado de partida que afirma que si $|k| < 1$ la serie geométrica de números reales $1 + k + k^2 + \ldots + k^p + \ldots$ converge, y lo hace precisamente a $\dfrac{1}{1-k}$.

ii) El recíproco de la Proposición 2 es cierto, esto es, si siendo $A \in M_n$, la serie matricial $I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$ converge y lo hace precisamente a $(I - A)^{-1}$ entonces existe alguna norma matricial tal que $||A|| < 1$. Sin embargo, la prueba de este hecho requiere técnicas avanzadas de análisis matricial. Incluimos brevemente los pasos que habría que dar para demostrar el recíproco: (i) Si la serie converge a $(I - A)^{-1}$ entonces $\lim_{p\to\infty} A^p = (\bar{0})$; (ii) Siendo $\rho(A)$ el mayor valor absoluto de los autovalores de A, si $\lim_{p\to\infty} A^p = (\bar{0})$ entonces $\rho(A) < 1$; (iii) Para cada $\alpha > 0$ puede encontrarse una adecuada norma matricial tal que $||A|| \leq \rho(A) + \alpha$. Esto permite ya concluir. Los resultados a utilizar pueden verse en Horn y Johnson [1992].

iii) No es cierto que si la serie $I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$ converge a $(I - A)^{-1}$ entonces para *cualquier* norma matricial es $||A|| < 1$. Un ejemplo se tiene para $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, matriz para la que alguna de las normas que hemos ido manejando toma el valor 1.

iv) Puede demostrarse también que, siendo $A \in M_n$, si la serie geométrica $I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$ converge, entonces forzosamente lo hace a $(I - A)^{-1}$. La prueba de este hecho se obtiene como sigue: (i) La convergencia de $I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$ conlleva que $\lim_{p\to\infty} A^p = (\bar{0})$; (ii) $\lim_{p\to\infty} A^p = (\bar{0})$ conlleva que $\rho(A) < 1$; (iii) a su vez $\rho(A) < 1$ conlleva que exista una norma matricial para la que $||A|| < 1$; (iv) la Proposición 2 permite concluir.

Terminamos esta sección comentando que los resultados que acabamos de ver para matrices $A \in \mathrm{M}_n$, identificables con elementos de $L(\mathrm{R}^n , \mathrm{R}^n)$ pueden todavía extenderse a espacios de dimensión infinita. Así, si E es un espacio de Banach real, y $f \in L(E, E)$ con $||f|| < 1$, siendo $\bar{1}$ el operador identidad de E en E, se tiene que la "serie geométrica" $\bar{1} + f + f^2 + \ldots + f^p + \ldots$, donde por f^p se entiende la composición reiterada del operador f consigo mismo p veces, converge a un operador $g : E \longrightarrow E$ que resulta ser el operador inverso de $\bar{1} - f$. La demostración sigue esencialmente los mismos pasos que la de la Proposición 2, y puede verse en p. 175 de Jameson [1974]. Un hecho a destacar, de nuevo, es la *gran analogía* entre las distintas generalizaciones que se han ido haciendo: En el caso de números reales, si la serie $1 + k + k^2 + \ldots + k^p + \ldots$converge, lo hace al valor $\dfrac{1}{1-k} = (1 - k)^{-1}$. En el caso de matrices $A \in \mathrm{M}_n$, si la serie $I+A+A^2+\ldots+A^p+\ldots$ converge, lo hace a $(I-A)^{-1}$. En el caso de un operador contractivo f en un espacio de Banach E, la serie $\bar{1} + f + f^2 + \ldots + f^p + \ldots$ converge a $g = (\bar{1} - f)^{-1}$. La analogía salta a la vista.

4. Otras familias de series geométricas.

Abandonamos ahora el estudio de aplicaciones contractivas en espacios normados, y pasamos a consi–derar "series geométricas" en otros ámbitos importantes. El primer caso que vamos a considerar apareció ya citado en la sección 2. Se trata de las estructuras denominadas *álgebras de Boole*.

Definición Se denomina *álgebra de Boole* a una estructura que consta de un conjunto no vacío A y dos operaciones internas, "+" y "·" definidas en todo $A \times A$ verificando las propiedades siguientes: i) ambas son asociativas, conmutativas, y distributivas una de otra; ii) existe un elemento $0 \in A$ tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in A$; iii) existe un elemento $1 \in A$ tal que $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in A$; iv) $0 \neq 1$; v) dado $a \in A$ existe un elemento $\bar{a} \in A$ tal que $a + \bar{a} = 1$, $a \cdot \bar{a} = 0$.

Un ejemplo de esta estructura es el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de un conjunto dado X, con las operaciones de unión de conjuntos "$\cup$" e intersección de conjuntos "$\cap$". El papel de 0 lo juega aquí el conjunto vacío ($\emptyset$), mientras que el papel de 1 lo juega aquí el conjunto universal (X). En un álgebra de Boole ocurre siempre que $a+a = a \cdot a = a$, para todo $a \in A$, lo que lleva consigo que cualquier "serie geométrica" del tipo $a + a \cdot b + a \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^p + \ldots$ sea cuasi constante, luego trivialmente convergente al valor $a + a \cdot b$. Pero además, en todo álgebra de Boole se verifican las denominadas *leyes de absorción*, a saber, $a + a \cdot b = a \cdot (a + b) = a$, para cualesquiera $a, b \in A$. Eso lleva consigo que: *"En un álgebra de Boole cualquier serie geométrica converge trivialmente al primer término de dicha serie"*.

Estudiamos ahora otro contexto importante en el que las series geométricas juegan un papel relevante: Sea X un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{R}(X) = \{\mathcal{R} : \mathcal{R}$ es una relación binaria definida sobre $X\}$. Obviamente $\mathcal{R}(X)$ puede identificarse con el conjunto $\mathcal{P}(X \times X)$ de todos los subconjuntos del producto cartesiano $X \times X$. Y, por lo visto anteriormente, este conjunto con las operaciones de unión ($\cup$) e intersección ($\cap$) de conjuntos resulta ser un álgebra de Boole. Sin embargo, en lo que sigue nos vamos a referir al conjunto $\mathcal{R}(X)$, pero no con las operaciones "$\cup$, $\cap$" sino con las operaciones "$\cup, \circ$", donde dadas $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{R}(X)$ se define $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ como $\{(x, y) \in X \times X$: existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in \mathcal{R}$, $(z, y) \in \mathcal{S}\}$. (Utilizaremos también la notación habitual $x\mathcal{R}y$ en vez de $(x, y) \in \mathcal{R}$). Así "$\circ$" se interpreta como la *composición de relaciones binarias.*

Pues bien, en este contexto ocurre que series geométricas como

$$\mathcal{R} \cup (\mathcal{R})^2 \cup \ldots \cup (\mathcal{R})^p \cup \ldots,$$

donde $(\mathcal{R})^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ y recurrentemente $(\mathcal{R})^p = (\mathcal{R})^{p-1} \circ \mathcal{R}$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$), tienen una interpretación importante. Definen lo que se denomina la *clausura transitiva* de la relación binaria $\mathcal{R}$, concepto que precisamos con más rigor a continuación.

Definición Dada una relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto X se define la *clausura transitiva* de $\mathcal{R}$ como la relación binaria $\mathcal{RR}$ definida en X mediante $x\mathcal{RR}y$ si existen $z_1, \ldots, z_n \in X$ para cierto $n \in \mathrm{N}$ tales que $x\mathcal{R}z_1$, $z_1\mathcal{R}z_2, z_2\mathcal{R}z_3, \ldots,$ $z_{n-1}\mathcal{R}z_n$, $z_n\mathcal{R}y$. No es difícil ver que $\mathcal{RR}$ es una relación transitiva, y que coincide con $\mathcal{R}$ si y sólo si $\mathcal{R}$ es una relación transitiva. Para más información puede consultarse Rodríguez-Palmero [1997]. Hay que hacer notar que este tipo de series geométricas de relaciones binarias fue introducido hace más de un siglo por el propio G. Boole (1815-1864) en su libro *"Análisis Matemático de la Lógica"*. (Véase Boole [1984]).

Resulta curioso saber que cuando X es *finito*, el cálculo de $\mathcal{RR}$ puede hacerse mediante técnicas *matriciales*, lo que de alguna manera completa el estudio sobre series geométricas de matrices que hemos realizado en la sección anterior. Veamos ahora cómo proceder:

En primer lugar observemos que si X tiene n elementos, la serie geométrica $\mathcal{R}\cup(\mathcal{R})^2\cup\ldots\cup(\mathcal{R})^p\cup\ldots$ coincide con la expresión finita $\mathcal{R}\cup(\mathcal{R})^2\cup\ldots\cup(\mathcal{R})^{n-1}$. Teniendo esto presente, escribimos la relación binaria $\mathcal{R}$ como una matriz A de dimensiones $n\times n$ en la que en la casilla a_{ij} escribimos 1 si $x_i\mathcal{R}x_j$ y escribimos 0 en otro caso, siendo $X = \{x_1, \ldots x_n\}$, $(i, j = 1, \ldots n)$. Estas matrices de ceros y unos se *"suman y multiplican en sentido Booleano"*, esto es, mediante las reglas $0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$; $0 + 1 = 1 + 1 = 1 \cdot 1 = 1$. Con estas reglas es fácil obtener la expresión matricial de $\mathcal{RR}$. Obsérvese, por ejemplo, que el *producto booleano* de la matriz que represente a $\mathcal{R}$ por sí misma da como resultado la matriz que representa a $(\mathcal{R})^2$, y así sucesivamente. Naturalmente, aquí ya no tiene sentido hablar de *matrices contractivas* en el sentido de la sección anterior.

Otro contexto interesante donde aparecen series geométricas generalizadas es el relativo a *series de funciones.* Por ejemplo, si f es una función real de variable real, uno puede preguntarse acerca de la convergencia de expresiones funcionales del tipo $f + f^2 + \ldots + f^p + \ldots$. Esto nos plantea, para cada x en el dominio de f, si la serie numérica $f(x) + (f(x))^2 + \ldots + (f(x))^p + \ldots$ es o no es convergente. La forma habitual de trabajar globalmente con estas situaciones es considerar funciones en algún espacio métrico completo funcional (por ejemplo, el ya mencionado espacio de Banach $C([0,1])$), y aplicar las técnicas ya introducidas en contextos generales de espacios métricos, por ejemplo, las relativas a aplicaciones contractivas. (Véase por ejemplo Garay, Cuadra y Alfaro [1974], pp. 285 y ss.).

Un último contexto, con el que cerramos este trabajo, corresponde al estudio de *conjuntos fractales,* y puede verse con detalle en Barnsley [1988]: Si (X,d) es un espacio métrico completo, el conjunto $\mathcal{F}(X)$ de los subconjuntos compactos no vacíos de X resulta también ser un espacio métrico completo con una adecuada métrica que se denomina *métrica de Hausdorff*. Por fijar ideas, supongamos que $X = \mathbf{R}^n$, y sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una determinada función continua, que, como sabemos, transforma compactos en compactos, de manera que puede interpretarse como una aplicación $f : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$. El estudio de "series geométricas" de la forma $f(A) \cup f(f(A)) \cup \ldots \cup f^p(A) \cup \ldots$ donde A es un determinado compacto no vacío de $\mathbf{R}^n$ y f^p es la composición reiterada p veces de la función f consigo misma, se suele trabajar en base al estudio de la contractividad de f, o de alguna función asociada a f, en esa métrica de Hausdorff. En el caso de que f sea contractiva, a su punto fijo único según el Teorema 1 (principio de la aplicación contractiva), se le dice *conjunto fractal asociado a f*. (Para más detalles véase Gómez et al. [1993] o bien Barnsley [1988]).

5. Referencias bibliográficas.

BANACH, S. : "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales". Fundamenta Mathematicae 3, 133-181. (1922).

BARNSLEY, M.: "Fractals everywhere". Academic Press. Boston. 1988.

BOOLE, G.: "El análisis matemático de la lógica". Cátedra. Madrid. 1984.

GARAY, J. , CUADRA, J. L. y M. ALFARO: "Una introducción al cálculo infinitesimal". Octavio y Félez. Zaragoza. 1974.

GASCA, M.: "Cálculo numérico: Resolución de ecuaciones y sistemas".

Universidad de Zaragoza. 1987.

GOMEZ, M., INDURAIN, E. y J. L. MENDEZ: "Aplicaciones contractivas en el Análisis Matemático". (Documento de trabajo). Universidad de Zaragoza. Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano. Sección 5 (Cuadernos). Número 22. (1993).

HORN, R. A. y C. R. JOHNSON: "Matrix analysis". Cambridge University Press. Cambridge, U. K. 1992.

ISAACSON, E. y H. B. KELLER: "Analysis of numerical methods". Wiley. Nueva York. 1966.

JAMESON, G. J. O.: "Topology and normed spaces". Chapman and Hall. Londres. 1974.

RODRIGUEZ-PALMERO, C.: "Estudio de varias clases de estructuras preferenciales". Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Valladolid, España. 1997.

Agradecimientos: El segundo coautor desea mostrar su agradecimiento a los colegas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de San Luis (Argentina), por la agradable atmósfera de trabajo disfrutada allí en el transcurso de dos visitas académicas realizadas en 1995 y 1997.

Universidad Pública de Navarra. Departamento de Matemática e Informática.
Campus Arrosadía s.n. E-31006. Pamplona. (España).