PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Cada problema fue calificado con un puntaje de cero a diez.

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. Son aquellas que más nos gustaron, además der ser correctas. En caso de haber varias (esencialmente) iguales entre ellas elegimos una cualquiera.

En el detalle que damos a continuación figura un vector construído en base a los puntajes obtenidos por las 47 mejores pruebas. La primera coordenada de estos vectores es la cantidad de los alumnos que no intentaron resolver el problema y los que se ve calificaron con 0 puntos, la segunda indica cuantos obtuvieron 1, 2 ó 3 puntos; la tercera los que obtuvieron 4, 5, 6 ó 7 puntos y la cuarta los participantes que obtuvieron 8, 9 o 10 puntos:

Ejercicio	Nº	Apellido/s y Nombres/s	Fac. Univers.
1(17,0,0,30)	13019	Cerviño Juan Marcos	Cienc. Exactas y Natur. Mar del Plata
2(44,2,1,0)	13152	Gelso Esteban Reinaldo	Ingeniería - Universidad del Cent. Prov. de Bs. As.
3(15,2,3,27)	13059	Lowenthal Sonia Morgenstern Tal	Ciencias Económicas U.B.A.
4(19,1,5,22)	13025	Kocsard Alejandro Suárez Alvarez Mariano	Cienc. Exactas, Ing. y Agrim. Rosario (Santa Fe)
5(9,16,12,10)	13215	Fumero Yanina Busaniche Manuela	Ing. Química - Litoral Dep. Matemática - Sur

En el próximo número publicaremos los problemas y algunas soluciones.

Problemas para resolver

1) Supongamos que un amigo le propone a Ud. tomar en un mazo de cartas españolas, todas las espadas (12 cartas) y además agregarle 3 comodines, para un total de 15 cartas. Luego mezcla bien las cartas y saca 3. Si entre las 3 cartas hay al menos algún comodín, Ud. gana un peso. Si no, su amigo gana un peso. Pruebe que le conviene aceptar el juego.

2) Un conocido acertijo requiere encontrar una moneda falsa entre 12 monedas con sólo 3 pesadas. Acá va una versión algo más complicada: Ud. tiene una balanza de platillos y 39 monedas, una de las cuales puede o no ser falsa. Si lo es, pesará distinto de las otras monedas, pero Ud. no sabe si pesa más o pesa menos. Con sólo 4 pesadas, decida si hay una moneda falsa, en caso afirmativo descubra cuál es, y determine si es más pesada o más liviana que las otras.

3) (El siguiente ejemplo todavía no ha ocurrido, que yo sepa, pero es posible) La UNC tiene dos colegios secundarios dependientes de ella: el Manuel Belgrano y el Monserrat, ambos mixtos. En un cierto año, un cierto número de chicas y chicos se presentan a rendir los exámenes de ingreso. Al finalizar los exámenes, un grupo proclama que los chicos son más inteligentes que las chicas, puesto que entró el 60% de ellos, contra sólo el 45% de las chicas. Sin embargo, cuando se analiza el comportamiento por colegio, se descubre que en el Manuel Belgrano entró el 40% de las chicas, contra sólo el 20% de los chicos. Además en el Monserrat, entró el 90% de las chicas, contra sólo el 70% de los chicos. Es decir, las chicas superaron a los chicos en ambos colegios, y sin embargo terminaron peor cuando se toma la estadística global.

Dé un ejemplo numérico que ejemplifique que estos números son posibles, y explique cuál es el fenómeno por detrás de estos números.

4) En un curso donde hay 15 chicos y 15 chicas, se los quiere formar a todos

en fila. De cuántas formas puede hacerse esto si se quiere que las chicas estén todas juntas y se quiere que al principio y al final de la fila haya un chico?

5) Probar que si en una fiesta hay 40 invitados, y cada invitado conoce a por lo menos 20 de los otros invitados, entonces se pueden sentar todos en una mesa circular de forma tal que cada persona esté sentada entre dos personas a las cuales conoce.

6) Evaluar la siguiente integral definida:

$$\int_e^{\ln \sqrt[19]{19}} (\sqrt{\ln(x^2 + e^x) + \cos(x)}).\cos(x + \sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x}})\ \mathrm{dx}$$

Daniel Penazzi.
Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
Ciudad Universitaria. 5000 - Córdoba.

Soluciones enviadas

Solución al problema 2 Vol. 12 No. 3.

Probar que todo primo impar es diferencia de cuadrados.

Si a es primo impar, $a = 1.a = (\frac{1+1}{2} + \frac{a-a}{2})(\frac{a+a}{2} + \frac{1-1}{2}) = (\frac{a+1}{2} - \frac{a-1}{2})(\frac{a+1}{2} + \frac{a-1}{2}) = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ con $x = \frac{a+1}{2}$, $y = \frac{a-1}{2}$.

Como a es impar mayor que uno, tanto x como y son enteros.

(Nota de la revista: en realidad, esto prueba que todo impar mayor que uno, primo o no, es diferencia de cuadrados).

Solución al problema 4 Vol. 12 No. 3.

En una receta de cocina se pide añadir exactamente 400 ml de agua. Ud. tiene sólo un vaso que sabe que tiene 300 ml de capacidad, y una botella vacía de agua mineral con capacidad de 500 ml. Cómo hace para agregar 400 ml?.

a) llena la botella; b) con la botella llena el vaso; c) tira el contenido del vaso; d) pasa al vaso los 200 ml que quedaban en la botella; e) llena la botella; f) con la botella llena el vaso, es decir que traspasa 100 ml pues el vaso tenía 200 ml. Así, en la botella quedan 400 ml.

Solución al problema 5 Vol. 12 No. 3.

Probar que si a divide a b, entonces $2^a - 1$ divide a $2^b - 1$.

Como $a|b$, entonces existe k entero con $b = ak$. Entonces, $2^b - 1 = 2^{ak} - 1 = (2^a)^k - 1 = (2^a)^k - 1^k$

Recordemos que la diferencia de potencias de igual grado es siempre divisible por la diferencia de sus bases (propiedad reconocida por los alumnos del secundario como el sexto caso de factoreo). Es decir que $(2^a)^k - 1^k = (2^1 - 1).K$ para $K = \sum_{i=1}^{k} 2^{a(k-i)}$ entero. Así, hemos probado que $2^b - 1 = (2^a - 1)K$ es decir $2^a - 1 | 2^b - 1$.

Solución al problema 14 Vol. 7 No. 1.

Una escalera de longitud L se apoya en una pared vertical. Suponga que hay un escalón que dista D tanto de la pared como del piso. Encuentre explícitamente en términos de L y D la altura H a la que llega la escalera apoyada sobre la pared.

$H - D = \sqrt{L^2 - D^2}$, $H = D + \sqrt{L^2 - D^2}$.

Solución al problema 3 Vol. 13 No. 3

Sea $x_i \in \{0, 1, \ldots, 10\}$, $i = 1, 2, 3$, con $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = 7$ y $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = 2\sqrt[3]{30}$. De la segunda igualdad deducimos que $x_1x_2x_3 = 240 = 2^4.3.5$ Analicemos las distintas combinaciones de 3 divisores de 240 tal que dichos divisores sean naturales menores o iguales que 10 y tal que su promedio sea 7.

a) $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 8$ no tiene promedio 7.

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $x_3 = 10$, si tiene promedio 7.

c) No tiene sentido buscar otras ternas pues algún x_i será mayor que 10.

Por lo tanto las notas fueron 3, 8 y 10.

(Nota de la revista: la Lic. Rocha no observó que también esta el caso $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 10$. Pero tampoco el promedio es 7, así que la solución es la correcta).

Las soluciones fueron enviadas por María Isabel Viggiani Rocha, Universidad Nacional de Tucumán.