Triángulos cuyos lados son de longitud un número natural, y cuya área es un número natural. Tetraedros cuyo volumen es un número natural

Miriam Pacheco

1 Introducción

El propósito de esta nota consiste en resolver los siguientes problemas:

i) determinar el área mínima entre los triángulos de lados cuya longitud es un número natural y su área es un número natural.

ii) hallar el volumen mínimo entre los tetraedros de lados cuya longitud es un número natural y su volumen es un número natural.

Comenzaremos resolviendo la primera de estas cuestiones y, siguiendo un esquema similar, abordaremos la segunda de ellas. En el proceso, aprovecharemos para establecer algunos hechos vinculados a áreas de triángulos cuyos lados tienen por longitud un número natural y su área igual a un número natural y volúmenes de tetraedros de lados naturales y volumen natural.

2 El área es un múltiplo de 6

Como hemos dicho anteriormente, comenzaremos tratando el problema referido al área mínima de un triángulo de lados y área naturales. En primer lugar, fijemos alguna notación: $a - b - c$ significa el triángulo cuyos lados miden a, b y c unidades.

Para tener alguna percepción respecto de la solución del problema, sería útil calcular algunas áreas para triángulos rectángulos con lados naturales, es decir, aquellos cuyos lados constituyen ternas pitagóricas. Por ejemplo: $3-4-5$ tiene área 6; $6-8-10$, $24=4\times 6$; $9-12-15$, $54=9\times 6$; $t\times 3-t\times 4-t\times 5$, $t^2\times 6$; $5-12-13$, $30=6\times 5$.

A partir del tercer y el último de los ejemplos anteriores podemos construir un triángulo que no es rectángulo con lados naturales y área 24, ver Figura 1.

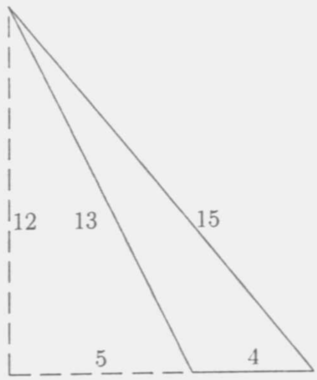

Figura 1

Podemos observar que todas las áreas que hemos obtenido son múltiplos de 6. Usando un programa de computadoras implementamos un algoritmo que nos permitió listar áreas de triángulos con lados naturales entre 1 y 100 y área natural, con lo que comprobamos que el hecho antes mencionado no es aislado, producto de una elección particular o de una construcción específica, sino que es un hecho general. Ahora nos abocaremos a dar una demostración matemática del hecho que el área de un triángulo con lados naturales y área natural es un múltiplo de 6.

En primer lugar, observamos que deberíamos usar una fórmula para calcular el área de un triángulo que involucre la medida de los lados, en lugar de la difundida, base por altura dividido 2, pues con este último recurso perdemos la información sobre la medida de los lados, que son números naturales lo que no tiene ninguna implicancia particular sobre la medida de la altura.

Una fórmula con las características que buscamos es la fórmula de Herón que establece: sea $a-b-c$ un triángulo, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, y A el área de $a-b-c$, entonces

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)s.$$

Esta relación también se escribe

$$(4A)^2 = (a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(a+b+c), \tag{1}$$

o

$$(4A)^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4. \tag{2}$$

Proposición 1 *Sea $a-b-c$ un triángulo de área A. Si a, b, c y A son números naturales, entonces A es un múltiplo de 6.*

Demostración. En primer lugar, probaremos que A es un múltiplo de 3. De la siguiente tabla de congruencias módulo 3 se observa que un cuadrado perfecto es congruente módulo 3 a 0 ó 1.

x	0	1	2
x^2	0	1	1

Probaremos que $(4A)^2 \equiv 0(3)$; en consecuencia, $A = 0(3)$. Sea U el miembro de la derecha en la igualdad (2) y analicemos todas las posibilidades para a^2, b^2 y c^2.

Caso 1. Si $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 0(3)$, claramente $U \equiv 0(3)$.

Caso 2. Si $a^2 \equiv b^2 \equiv 0(3)$ y $c^2 \equiv 1(3)$, resulta que $U \equiv 2(3)$, lo que no es posible, puesto que, A es un número natural y de la igualdad (2) se desprende que U es un cuadrado perfecto.

Caso 3. Si $a^2 \equiv 0(3)$ y $b^2 \equiv c^2 \equiv 1(3)$, se obtiene que $U \equiv 0(3)$.

Caso 4. Si $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1(3)$, nuevamente, $U \equiv 0(3)$.

Luego, del análisis realizado obtenemos que $(4A)^2 = U \equiv 0(3)$. Resta probar que A es un múltiplo de 2. Para ello escribimos a U como el miembro de la derecha de (1) y analizamos las distintas posibilidades según la paridad de a, b y c.

Caso I. Si a, b y c son números naturales impares, resulta que U es un número natural impar, lo que no es posible pues $U = (4A)^2$ y A es un número natural.

Caso II. Si a es un número natural par, b y c son números naturales impares, sean $a = 2x$, $b = 2y + 1$, $c = 2z + 1$, entonces

$$U = 16(x + y - z)(x - y + z)(y + z - x + 1)(x + y + z + 1),$$

en consecuencia,

$$A^2 = (x + y - z)(x - y + z)(y + z - x + 1)(x + y + z + 1).$$

Por inspección directa se puede comprobar que, cualquiera sea la paridad de los elementos x, y, z alguno de los factores de A^2 es un número par. En consecuencia, A es múltiplo de 2.

Caso III. Si a y b son números naturales pares y c es un número natural impar, resulta que U es un número impar, lo que no es posible como hemos dicho anteriormente.

Caso IV. Por último, si a, b y c son números naturales pares, sean $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$ operando obtenemos que

$$A^2 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4. \tag{3}$$

Analizamos en la igualdad (3) congrúencia módulo 4; para ello observemos en primer lugar la siguiente tabla de congruencias módulo 4:

x	0	1	2	3
x^2	0	1	0	1

Si $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1(4)$, entonces $A^2 \equiv 3(4)$ lo cual no es posible. La misma situación se presenta si $x^2 \equiv 1(4)$, $y^2 \equiv z^2 \equiv 0(4)$.

Tanto si $x^2 \equiv y^2 \equiv 1(4)$, $z^2 \equiv 0(4)$; como si $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 0(4)$, obtenemos que $A^2 \equiv 0(4)$.

En consecuencia, A es un múltiplo de 2. Como ya hemos probado que A es un múltiplo de 3, finalmente obtenemos que, bajo nuestras hipótesis, A es un múltiplo de 6. □

Por lo que acabamos de probar, para mostrar que para las condiciones impuestas el área mínima es 6, basta exhibir un triángulo de lados enteros y área 6. El triángulo rectángulo de lados $3-4-5$ constituye un ejemplo.

Observación: Un triángulo equilátero con lados naturales, no tiene área entera. Basta observar que si $a = b = c$ debería cumplirse que

$$16A^2 = 3a^4$$

lo cual no es posible si A es natural. Es fácil construir ejemplos de triángulos isósceles de lados y área natural, y la Figura 1 constituye un ejemplo de un triángulo escaleno con tales propiedades.

En la Proposición 1 probamos que el área de un triángulo de lados y área naturales es un múltiplo de 6. Podemos ahora formular la siguiente pregunta: ¿para cada natural m, donde m es múltiplo de 6, existe un triángulo de lados naturales y área m? La respuesta es no, falla para 18. Esto puede comprobarse numéricamente, implementando el algoritmo del apéndice.

De ahora en adelante, nos ocuparemos de abordar el problema de hallar el volumen mínimo para tetraedros con lados y volumen naturales.

3 Algunas aproximaciones previas al problema del tetraedro

Comencemos construyendo un tetraedro de lados y volumen naturales. La fórmula más conocida para el volumen V de un tetraedro es

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

donde B es el área de la base del tetraedro y h es la altura correspondiente a dicha base. Una manera simple de comenzar, es construir un tetraedro de modo que tres de sus lados coincidentes formen ángulos rectos entre sí, es decir, de forma que pueda encajar en la esquina de una caja.

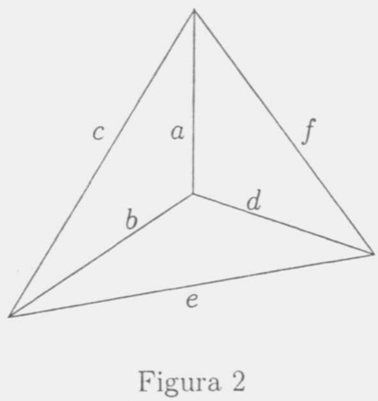

Figura 2

En la Figura 2 supongamos que las caras $a-b-c$, $a-d-f$ y $b-d-e$ forman triángulos rectángulos. Probando con valores pequeños para a, b y d podemos comprobar que no hay soluciones triviales. Asombrosamente, por métodos computacionales la primera solución generada se obtuvo para $a = 240$, $b = 117$, $d = 44$; en este caso, $c = 267$, $e = 125$, $f = 244$ y el volumen $V = \frac{1}{6}abd = 205.920$. Este valor podemos pensar que no es el volumen más chico para un tetraedro de lados y volumen naturales.

Sin embargo, podemos construir un tetraedro más pequeño de la siguiente forma: para la base, pegamos dos triángulos rectángulos de lados $3 - 4 - 5$ por el lado de longitud 4 obteniendo un triángulo isósceles de lados $5 - 5 - 6$ y área 12, sobre los lados de longitud 5 pegamos respectivamente dos triángulos rectángulos con lados $5 - 12 - 13$. Ver Figura 3.

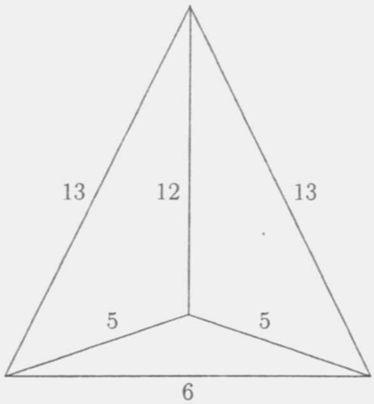

Figura 3

El tetraedro así construído tiene volumen 48. Esto mejora el volumen antes obtenido, pero aún podemos esperar que este no será el valor mínimo en las condiciones exigidas. Para seguir avanzando, resulta útil contar con una fórmula para el volumen de un tetraedro que dependa solamente de la medida de los lados, en forma análoga al caso del triángulo.

4 Una fórmula alternativa para el volumen.

Una fórmula que sirve para calcular el volumen de un tetraedro a partir de la medida de los lados fue hallada en el siglo XVIII por Euler. A continuación, daremos un esquema que permite deducir esta fórmula.

Consideremos un tetraedro con lados a, b, c, d, e y f como en la Figura 4.

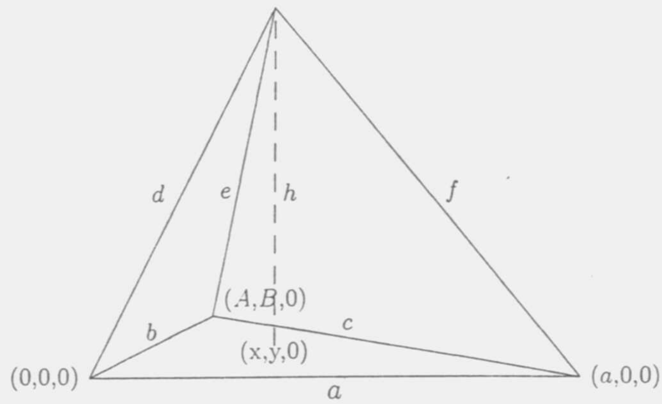

Figura 4

Colocamos un sistema de coordenadas, de modo que, la base $a - b - c$ quede sobre el primer cuadrante. De la figura podemos ver que se cumplen las siguientes relaciones:

$$x^2 + y^2 = d^2 - h^2, \tag{4}$$

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = e^2 - h^2, \tag{5}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = f^2 - h^2, \tag{6}$$

$$A^2 + B^2 = b^2, \tag{7}$$

$$(a - A)^2 + B^2 = c^2. \tag{8}$$

De (4), (5), y (6), se obtiene que:

$$x = \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2a} \quad \text{y} \quad y = \frac{a(A^2 + B^2 + d^2 - e^2) - A(a^2 + d^2 - f^2)}{2aB}.$$

Sustituyendo en la ecuación (4) obtenemos

$$h^2 = d^2 - \left[\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2a}\right]^2 - \left[\frac{a(A^2 + B^2 + d^2 - e^2) - A(a^2 + d^2 - f^2)}{2aB}\right]^2.$$

Operando convenientemente se tiene la siguiente igualdad:

$$4a^2B^2h^2 = 4a^2B^2d^2 - B^2(a^2+d^2-f^2)^2 - [a(A^2+B^2+d^2-e^2) - A(a^2+d^2-f^2)]^2. \tag{9}$$

Observemos que el volumen V de este tetraedro es, $V = \frac{1}{3}\frac{1}{2}aBh = \frac{1}{6}aBh$. Luego, $144V^2 = 4a^2B^2h^2$. Combinando esta información con (9), se obtiene

$$144V^2 = 4a^2B^2d^2 - B^2(a^2+d^2-f^2)^2 - [a(A^2+B^2+d^2-e^2) - A(a^2+d^2-f^2)]^2. \tag{10}$$

Para obtener una fórmula para V que solo involucre la medida de los lados, resta reemplazar A y B^2. De (7) y (8), resulta que

$$A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad \text{y} \quad B^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a}.$$

Sustituyendo y resolviendo para V, encontramos que el volumen del tetraedro está dado por

$$\begin{aligned} V \;=\; & \frac{1}{12}[4a^2b^2d^2 - a^2(b^2 + d^2 - e^2)^2 - b^2(a^2 + d^2 - f^2)^2 - d^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 + \\ & (b^2 + d^2 - e^2)(a^2 + d^2 - f^2)(a^2 + b^2 - c^2)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{11}$$

Para aplicar esta fórmula hay que ser cuidadoso, puesto que es posible encontrar valores naturales para a, b, c, d, e y f, de modo que se forman triángulos

$a-b-c$, $a-d-f$, $b-d-e$, y $c-e-f$, y que el radicando es positivo.

Ejemplo: Si $a=b=c=14$, $d=e=f=8$; con estos valores las caras $a-b-c$, $a-d-f$, $b-d-e$, $c-e-f$ son triángulos; sin embargo, el valor del radicando en (11) es -153.664.

Esto sucede, puesto que si llamamos : α al ángulo entre los lados a y b, β al ángulo entre los lados b y d, γ al ángulo entre los lados a y d, es claro que se forma un tetraedro si y solamente si $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$. Esto es lo que falla en el ejemplo, pues $\alpha=60^o$ y $\gamma=\beta<29^o$.

A esta altura podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Esta situación se ve reflejada en la fórmula (11)? A continuación daremos respuesta a esta pregunta.

Haciendo uso de identidades trigonométricas podemos deducir que

$$V=\frac{abd}{3}\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)sen\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)\right]\frac{1}{2},$$

de donde inferimos que el radicando es positivo si y solamente si $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$. Lo que responde afirmativamente la pregunta antes formulada.

Juntando toda esta información podemos concluir que: *Si un tetraedro tiene lados de longitudes a, b, c, d, e y f de modo que se forman triángulos $a-b-c$, $a-d-f$, $b-d-e$ y $c-e-f$ entonces el volumen está dado por la fórmula (11). Recíprocamente, si los números reales a, b, c, d, e y f forman triángulos $a-b-c$, $a-d-f$, $b-d-e$ y $c-e-f$ y el radicando de (11) es positivo, entonces se puede formar un tetraedro con lados de longitudes a, b, c, d, e y f cuyo volumen está dado por la fórmula (11).*

Ahora, para contribuir en la búsqueda de la solución al problema, resulta útil generar una lista de tetraedros con lados naturales y volumen natural, por ejemplo, para lados entre 1 y 20, haciendo uso de algún programa de computadora. En esta lista se puede observar que el volumen más pequeño que aparece es 6; sin embargo, los volumenes que aparecen son múltiplos de 3. En primer lugar, probaremos que el volumen de un tetraedro con lados y volumen naturales efectivamente es un múltiplo de 3; y luego buscaremos un tetraedro con lados naturales y volumen 3.

5 El volumen es un múltiplo de 3

Proposición 2 *Si un tetraedro tiene lados y volumen naturales, entonces el volumen es un múltiplo de 3.*

Demostración: Consideraremos diferentes casos dependiendo del número de lados que son múltiplos de 3.

Como observamos en la demostración de la Proposición 1, los cuadrados perfectos son congruentes a 0 ó 1 módulo 3, hecho que usaremos frecuentemente en la prueba de esta proposición.

Sea $U = (12V)^2$. Como $12V \equiv 0(3)$, $U \equiv 0(3)$. De la fórmula (11) multiplicando convenientemente y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} U \;=\; & a^2b^2e^2+a^2b^2f^2+a^2c^2d^2+a^2c^2e^2+a^2d^2e^2+a^2e^2f^2+b^2c^2d^2+b^2c^2f^2+ \\ & b^2d^2f^2+b^2e^2f^2+c^2d^2e^2+c^2d^2f^2-a^2b^2c^2-a^2d^2f^2-b^2d^2e^2-c^2e^2f^2- \\ & a^2e^4-a^4e^2-b^2f^4-b^4f^2-c^2d^4-c^4d^2. \end{aligned}$$

De esta última igualdad se ve que la fórmula (11) no depende del vértice que rotulamos como abd. Comenzamos con el análisis de las distintas posibilidades.

Caso 1. Si ninguno de los lados es múltiplo de 3, entonces el cuadarado de cada uno de los lados es congruente a 1 módulo 3, resultando $U \equiv 2(3)$, lo que no es posible.

Caso 2. Supongamos que exactamente uno de los lados es múltiplo de 3, sea $a \equiv 0(3)$. Luego

$$U = \{-a^4e^2\} + \{a^2(b^2e^2 + b^2f^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2 + e^2f^2 - b^2c^2 - d^2f^2 - e^4)\} + \{b^2c^2d^2 + b^2c^2f^2 + b^2d^2f^2 + b^2e^2f^2 + c^2d^2e^2 + c^2d^2f^2 - b^2d^2e^2 - c^2e^2f^2 - b^2f^4 - b^4f^2 - c^2d^4 - c^4d^2\}.$$

La primer llave encierra un múltiplo de 81, y la segunda un múltiplo de 27, pues la expresión entre paréntesis es congruente a 0 módulo 3. Si probamos que la expresión dentro de la última llave es múltiplo de 27, obtenemos que $U \equiv 0(27)$ y como $U = 144V^2$, resulta que V es un múltiplo de 3. Veamos entonces que la última llave es un múltiplo de 27.

Reemplacemos en la última llave $b^2 = 3B + 1$, $c^2 = 3C + 1$, $d^2 = 3D + 1$, $e^2 = 3E + 1$, $f^2 = 3F + 1$, obteniendo

$$\begin{aligned}&\{27(BCD + BCF + BDF + BEF + CDE + CDF - BDE - CEF - \\ &C^2D - CD^2 - B^2F - BF^2) + 9(2BC + BD - CD - BF + CF + 2DF - \\ &C^2 - D^2 - F^2 - B^2)\} \\ &= 27(*) - 9\{(B - C)^2 + (D - F)^2 + (C - B)(D - F)\}\end{aligned}$$

donde (*) es un polinomio en B, C, D, E y F. Sea $S = (B - C)^2 + (D - F)^2 + (C - B)(D - F)$. Analizando posibilidades, se tiene que S es congruente a 0 ó 1 módulo 3. Ahora, $(4V)^2 = \dfrac{U}{9} = 3(*) - S$. Si $S \equiv 1(3)$, entonces $(4V)^2 \equiv -1 \equiv 2(3)$ lo que no es posible pues es un cuadrado perfecto. Luego, $(4V)^2 \equiv 0(3)$, y en consecuencia, $V \equiv 0(3)$.

Caso 3. Si exactamente dos lados son múltipos de 3. En este caso, se presentan dos posibilidades, o bien los dos lados comparten un vértice o no.

Si comparten un vértice, supongamos, por ejemplo, que $a \equiv b \equiv 0(3)$ y todos los otros lados no lo son, entonces como en el caso 1, $U \equiv 2(3)$, lo que es una contradicción.

Si los lados no se encuentran, deben ser opuestos. Por ejemplo, $a \equiv e \equiv 0$. Como en el caso 2

$$U = 27(**) - 9\{(B-C)^2 + (D-F)^2 + (C-B)(D-F)\}$$

donde (**) es un polinomio en B, C, D, y F. De igual modo que antes concluimos que V es múltiplo de 3.

Caso 4. Supongamos que al menos tres lados son múltiplos de 3.

Si hay exactamente 3 lados múltiplos de 3 pero estos lados no forman una cara de un tetraedro, entonces los lados forman un vértice, por ejemplo abd, o una espina abe.

En el primer caso, si $a \equiv b \equiv d \equiv 0(3)$, resulta que $U \equiv 2(3)$ lo que no es posible.

En el segundo caso, supongamos $a \equiv b \equiv e \equiv 0(3)$, entonces $U \equiv 2(3)$ lo que conduce nuevamente a una contradicción.

Si exactamente 4 lados son múltiplos de 3 y no forman una cara del tetraedro, entonces forman dos pares de lados opuestos, por ejemplo, ae y bf. En este caso, $U \equiv 1(3)$ lo que no es posible pues $U \equiv 0(3)$.

Solo resta analizar la posibilidad que una cara del tetraedro se forme con lados múltiplos de 3. Supongamos que $a = 3A$, $b = 3B$ y $c = 3C$, luego

$$U = 27(***)+9\{A^2(d^2-e^2)(e^2-f^2)+B^2(f^2-d^2)(e^2-f^2)+C^2(d^2-f^2)(e^2-d^2)\}$$

Obsevemos que al menos dos de los cuadrados d^2, e^2, f^2 deben ser congruentes módulo 3 (recordemos que las únicas posibilidades de congruencia módulo 3 para cuadrados perfectos son 0 ó 1), entonces alguna de los diferencias (d^2-e^2), (e^2-f^2), (f^2-d^2) es congruente a 0 módulo 3. En tal caso, a lo sumo uno de los términos de la última llave no será congruente a 0 módulo 3. Supongamos que
$A^2(d^2-e^2)(e^2-f^2) \not\equiv 0(3)$. Luego, $A^2 \equiv 1(3)$ y $(d^2-e^2)(e^2-f^2) \equiv 2(3)$. Entonces, $(4V)^2 = \frac{U}{9} \equiv 2(3)$ lo cual no es posible. Hemos probado que todos los términos dentro de la llave son múltiplos de 3, con lo que resulta que $U \equiv 0(27)$ y V es un múltiplo de 3. □

A partir del resultado de esta última proposición bastaría con encontrar un tetraedro de lados naturales y volumen 3 para probar que este es el volumen mínimo bajo nuestras condiciones. En la lista mencionada antes de la Proposición 2, no se encontró un tetraedro con volumen 3. Con un poco más de paciencia y haciendo variar los lados en un rango más amplio, podemos encontrar dos tetraedros de volumen 3 para los valores de los lados que siguen:

$$a = 35,\quad b = 33,\quad c = 32,\quad d = 76,\quad e = 44,\quad f = 70;$$
$$a = 47,\quad b = 32,\quad c = 21,\quad d = 58,\quad e = 56,\quad f = 76.$$

Notemos que el lado mayor en ambos casos es 76. La forma del tetraedro presenta una cara triangular alargada, por lo que la altura correspondiente a la cara más larga será muy pequeña. En el segundo de los ejemplos, si tomamos como base la cara 47-58-76, su área es de aproximadamente 1236.05, por lo que la altura correspondiente es del orden de 0.006. Esto hace prácticamente imposible construir físicamente un modelo de este tetraedro.

6 Apéndice

En este apéndice transcribimos algunos de los programas básicos que nos permitieron calcular las áreas y los volumenes mencionadas en este trabajo. Todos los algoritmos se implementaron usando el programa Mathematica.

El primero de ellos calcula áreas de triángulos de lados y área naturales para valores de los lados entre 1 y 100; el segundo, notablemente más complicado, calcula volumenes de tetraedros de lados y volumen naturales para lados de longitudes entre 1 y 20.

```
Do[u = (a + b + c) * (a - b + c) * (a + b - c) * (b + c - a);
   If[u > 0,A=N[Sqrt[u/16]];
   If[A==Floor[A],Print[{a, b, c,A}]]],
   {a, 100}, {b, a, 100}, {c, b, 100}]
```

```
Do[w = 4 * a^2*b^2 * d^2 - a^2 * (b^2 + d^2 - e^2)^2-
   b^2 * (a^2 + d^2 - f^2)^2 - d^2 * (a^2 + b^2 - c^2) ^2+
   (b^2 + d^2 - e^2) * (a^2 + d^2 - f^2) * (a^2 + b^2 - c ^2);
   If[w > 0,A=N[Sqrt[w]/12];
   If[a <Min[b + c, d + f],
   If[b <Min[a + c, d + e],
   If[e - f < c < e + f,
   If[d <Min[a + f, b + e],
   If[A==Floor[A],
   Print[{a, b, c, d, e, f,A}]]]]]]],
   {a, 20}, {b, 20}, {c, a + b}, {d, 20}, {e, b + d},
   {f, Min[a + d, c + e]}]
```

Para hallar un triángulo de lados naturales y área 18, a partir de (1) vemos que debemos hallar valores de a, b y c que verifiquen

$$(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)(a + b + c) = 16 * 18^2 = 2^6 3^4.$$

Pero, para que esta igualdad se cumpla, alguno de los paréntesis debe ser menor o igual que $\sqrt[4]{2^6 3^4}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(a+b-c) \leq \sqrt[4]{2^6 3^4}$. Esto, junto con el hecho que $(a+b-c)$debe ser un divisor de $2^6 3^4$, implica que, $(a+b-c) \leq 8$. Luego,

$$(a-b+c)(b+c-a)(a+b+c) \leq 2^6 3^4.$$

Razonando de igual forma, se obtiene que $(a-b+c) \leq \sqrt[3]{2^6 3^4}$, de donde, $(a-b+c) \leq 16$. Entonces,

$$(b+c-a)(a+b+c) \leq 2^6 3^4$$

y debe ser, $(b+c-a) \leq \sqrt{2^6 3^4} = 72$. Juntando toda esta información y operando convenientemente, se observa que $a \leq 12$, $b \leq 40$, $c \leq 44$. Con esto y el primer algoritmo se comprueba que tal triángulo no existe.

Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, 9000 Comodoro Rivadavia, Prov. del Chubut.