Una aplicación del teorema de Bayes

Hugo Alvarez

Resumen

Se estudia un problema en el que un sujeto debe adivinar en cuál de tres recipientes iguales se oculta un objeto, contando para ello con la ayuda de otro que descarta uno de los recipientes. Cómo varía la probabilidad de éxito en la búsqueda de acuerdo con la modalidad de la ayuda.

Nos ocuparemos aquí de un problema bastante conocido, y que ha sabido engendrar no pocas polémicas. Su enunciado conoce muchas versiones más o menos pintorescas. La nuestra, algo modificada de la bibliografía citada al final, será la siguiente:

> *Juan debe adivinar cuál de tres cajitas, para él iguales, es la que contiene una moneda que fue guardada en ellas. Escoge una y está meditando sobre si la elegirá definitivamente cuando recibe la ayuda de Pedro, quien conocedor de cuál es la caja correcta, toma una de las otras dos y la abre para mostrar que está vacía. La cuestión es saber si alguna de las dos cajitas ahora posibles, la que Juan tiene en la mano o la que Pedro no abrió de las otras dos, tiene más probabilidades de contener la moneda.*

El resultado sorprendente, y por ende el que generalmente se menciona en los artículos que se ocupan del tema sostiene que cambiarse a la caja dejada libre por Pedro otorga a Juan una probabilidad de éxito de $\frac{2}{3}$ en su objetivo de encontrar la moneda. Inclusive se menciona una experiencia de simulación con una computadora que apoya este resultado. Sin embargo, existen sólidas argumentaciones a favor de la tesis de que las dos elecciones posibles tienen igual probabilidad de éxito. Nosotros afirmamos que las discrepancias provienen de distintas interpretaciones del enunciado del problema y mostramos que pequeñas modificaciones del mismo hacen más razonable una u otra solución. Por último, proponemos una tercera solución, no menos adecuada que las conocidas, para la forma ambigua con que hemos presentado el problema.

Existen dos maneras básicas de interpretar el problema. Una de ellas no adjudica a la acción de Pedro un carácter estructural, no la ve como el resultado de una intención que debe manifestarse de esta o alguna otra manera parecida, sino como un hecho imprevisible que ocurrió esa vez pero que podría no repetirse en circunstancias idénticas. La otra, por el contrario, supone que Pedro está actuando dentro de un patrón de comportamiento previsible en algún grado. Ese grado de previsibilidad da origen a diversas subinterpretaciones del problema, todas ellas dentro de la segunda manera básica.

En la primer manera de interpretar, la acción de Pedro no puede ser supuesta independiente de la elección previa hecha por Juan. De modo que la información anterior que se tenía, queda cancelada por esta nueva situación en la que, concretamente, estamos frente a dos cajas con idéntica probabilidad de contener la moneda. En la segunda interpretación básica, se supone que la acción de Pedro forma parte de un experimento más complejo, con varios pasos: primero Juan elige una caja, segundo Pedro descarta una caja, tercero Juan hace la elección definitiva. Pero estos pasos se pueden realizar bajo diferentes reglas, incluyendo o no aleatoriedad cada uno de ellos. Y estas son las subinterpretaciones.

La suposición de un patrón de comportamiento en Pedro, permite considerar su acción como un paso más dentro de la secuencia de acciones que determinan el experimento. En particular, permite considerar el suceso aleatorio

> *N: la caja que Pedro elige para mostrar vacía no es la que Juan ha escogido en su primera elección*

que jugará un papel primordial en el análisis del problema.

Como se ha dicho, todavía caben diversas interpretaciones del problema, al aceptar hipótesis más finas acerca del patrón de comportamiento de Pedro.

Supongamos por ejemplo que aceptamos la hipótesis

H_1: Pedro elige para mostrar una caja vacía entre aquellas que Juan no ha tomado

(nótese que esto es siempre posible), y llamemos P_1 a la probabilidad bajo esta hipótesis. Lo primero que notamos es que entonces N es un suceso cierto y por lo tanto independiente con cualquier otro. Esto es,

$$P_1(\cdot/N) = P_1(\cdot) \tag{1}$$

Esta igualdad es de mucha importancia, porque con los datos a nuestra disposición, que informan que el suceso N se ha verificado, el espacio muestral del problema (el conjunto de todos los resultados posibles del experimento) no podrá exceder a N . Y la probabilidad asignada a cualquier suceso deberá ser la probabilidad condicional $P_1(\cdot/N)$ que viene a coincidir con $P_1(\cdot)$.

Vamos a considerar el suceso

B: la primera elección de Juan recae en la caja llena

y también el suceso cuya probabilidad interesa calcular,

E: Juan encuentra la moneda al abandonar su elección original y tomar la caja no abierta por Pedro.

Nótese que E está admitiendo en su enunciado que ha ocurrido N. Debemos pues aceptar que, en el lenguaje conjuntista habitual en Probabilidades, $E \subset N$. Bajo la hipótesis H_1, E es equivalente a $\sim B$ y por lo tanto su probabilidad es 2/3. Si se prefiere, puede usarse para probarlo la fórmula de la "probabilidad completa"

$$P_1(E) = P_1(E/B)\,P_1(B) + P_1(E/\sim B)\,P_1(\sim B) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \tag{2}$$

H_1 es la hipótesis que ha asumido Ian Stewart [2], aunque no es claro que ella esté implicada por el enunciado del problema. También podría haberse interpretado que

H_2: Pedro elige para abrir cualquiera de las cajas vacías, sin importar cuál ha seleccionado Juan.

Es decir: que hayamos visto ocurrir N no tiene por qué inducirnos a suponer que la intención de Pedro era restringirse siempre a las cajas no elegidas por Juan. Si llamamos P_2 a la probabilidad bajo esta hipótesis, ahora N no es un suceso cierto y $P_2(\cdot/N) \neq P_2(\cdot)$. En efecto,

$$P_2(N/B) = 1, \qquad P_2(N/\sim B) = 1/2 \tag{3}$$

de donde

$$P_2(N) = P_2(N/B)\,P_2(B) + P_2(N/\sim B)\,P_2(\sim B) = 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \tag{4}$$

lo que permite calcular, con la fórmula de Bayes,

$$P_2(B/N) = \frac{P_2(N/B)\,P_2(B)}{P_2(N)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

Pensando ahora *dentro* de N, que es el suceso cierto o espacio muestral, E es equivalente a $\sim B$ y tiene probabilidad (condicional) $1/2$:

$$P_2(E/N) = \frac{1}{2} \tag{6}$$

Nosotros Pensamos que la hipótesis H_2, que da lugar al mismo resultado que la posición ortodoxa de no suponer ni siquiera algun patrón de comportamiento en Pedro, es más "juiciosa" que la suposición H_1. Sin embargo, si cambiamos los números del problema, digamos 100 cajas en vez de 3 y, puestos en el lugar de Juan, con una caja en la mano vemos que Pedro descarta otras 98, sentiremos una fuerte tentación por ir a buscar la "otra caja". Es como si hubiésemos visto 98 veces que ocurre N y, siguiendo el principio de inducción de las ciencias naturales, nos inclínasemos a aceptar la hipótesis H_1. Pero Bayes [1] nos enseñó cómo se debe interpretar ese principio: las dos hipótesis en conflicto son aleatorizadas con probabilidad $1/2$ cada una y se revalorizan luego de acuerdo con la experiencia. Ahora el espacio muestral se llama H y admite como sucesos mutuamente excluyentes de probabilidad $1/2$ a los eventos H_1 y H_2. Las probabilidades P_1 y P_2 que utilizamos antes son las probabilidades condicionales de la nueva probabilidad P relativas a los sucesos H_1 y H_2 respectivamente

$$P_1(\cdot) = P(\cdot/H_1), \qquad\qquad P_2(\cdot) = P(\cdot/H_2) \tag{7}$$

Nuestro objetivo es calcular $P(E/N) = P_N(E)$. Pero

$$P_N(E) = P_N(E/H_1)\,P_N(H_1) + P_N(E/H_2)\,P_N(H_2) \tag{8}$$

Un sencillo cálculo muestra que, en general,

$$P_C(A/B) = P_B(A/C) = P(A/BC) \tag{9}$$

Y con esta observación, se ve que la mayoría de los ingredientes de (8) ya están calculados. Como $H_1 \subset N$, usando (2), (9)

$$P_N(E/H_1) = P_{H_1}(E/N) = P_1(E) = \frac{2}{3}\,.$$

Por su parte, usando (4),

$$\begin{aligned} P_N(H_1) &= \frac{P(N/H_1)\,P(H_1)}{P(N/H_1)\,P(H_1) + P(N/H_2)\,P(H_2)} = \\ &= \frac{1/2P_1(N)}{1/2P_1(N) + 1/2P_2(N)} = \frac{1/2}{1/2 + 1/2\cdot 2/3} = \frac{3}{5}\,. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$P_N(E/H_2) = P_2(E/N) = 1/2$$

por (6), mientras que

$$P_N(H_2) = 1 - P_N(H_1) = 2/5$$

Entonces,

$$P_N(E) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Apéndice

Usamos, como es habitual, la notación $P_A(B) = P(B/A)$ para la probabilidad condicional del suceso B habiendo ocurrido A, que se define por

$$P(B/A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

donde, naturalmente, AB representa la ocurrencia simultánea de ambos sucesos (la intersección).

Un grupo de sucesos mutuamente excluyentes pero que es segura la ocurrencia de uno de ellos se llama un *grupo completo*. Esto es, $H_1, ..., H_n$ forman un grupo completo si $H_iH_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup H_i = \Omega$, el suceso seguro, el espacio muestral. Se usan en este artículo los siguientes conocidos resultados (Ver por ejemplo [4]):

Teorema (fórmula de la probabilidad completa). Si $H_1, ..., H_n$ forman un grupo completo, para todo suceso A,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)$$

De la definición de probabilidad condicional, es claro que $P(A/B)P(B) = P(AB) = P(B/A)P(A)$, de donde surge el

Teorema de Bayes

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$$

A veces se llama fórmula de Bayes a la combinación de los dos resultados anteriores:

$$P(H_j/A) = \frac{P(A/H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i))}$$

que se interpreta de la manera siguiente: Si $H_1, ..., H_n$ son las (mutuamente excluyentes) hipótesis posibles bajo las que se puede dar un suceso A, y es conocida la probabilidad de que A ocurra bajo cada una de esas hipótesis, una vez realizado el experimento y observado que A ocurrió la fórmula de Bayes da la probabilidad de que la hipótesis H_j fuera la que estaba en vigencia.

BIBLIOGRAFIA:

[1] T. Bayes, *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances,* reimpreso en Biometrika, 45, pp. 296-315 (1968)

[2] I. Stewart, *Juegos Matemáticos,* Investigación y Ciencia, enero de 1992

[3] E. Felizia, *El Dilema de Perseo*, Ciencia Hoy,Vol. 5 n^o 26 (1994)

[4]R. Maronna, *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencias,* Ed. Exacta,(1995), ejercicio 1.6

Hugo Alvarez
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de San Luis
Ejército de los Andes 950
5700 SAN LUIS
e-mail: halvarez@unsl.edu.ar