Un concepto matemático muy incorporado aunque no tan obvio: EL AXIOMA DE CONTINUIDAD Y ALGUNAS APLICACIONES

Cristina Ferraris – Martha Ferrero

La idea de continuidad en relación espacio - números reales, que a partir de ciertos estudios en matemática se incorpora como natural tanto en cuanto a su utilización cuanto a su comprensión, tiene fuerte protagonismo histórico.

En la enseñanza, desde la conocida frase que nos lleva a motivar la idea de que *un gráfico es continuo si lo podemos trazar sin levantar la tiza del pizarrón*, hasta la formalización analítica de la continuidad, pasamos de una representación mental primaria a otra bastante más elaborada.

Rastreando en la historia de la Matemática, se puede ver el interés que despierta el tema desde Pitágoras (siglo VII a. c.), hasta la necesidad planteada a fines del siglo pasado por Sophus Lie de explicitar el axioma correspondiente, pasando por las distintas interpretaciones que realizan pensadores como R. DEDEKIND, H. POINCARE, B. LEVI, L. GEYMONAT y otros de la obra de Euclides.

Hans Freudenthal afirma que *etimológicamente "continuo" significa conectado, entonces éste fue el objeto mental que precedió al concepto* moderno de continuidad.

En nuestra experiencia en la formación de docentes en el Profesorado de Matemática, el análisis de las fuertes implicaciones que tiene el axioma de continuidad en el estudio de la longitud, el área y el volumen en el cursado de la asignatura Geometría Métrica, nos llevó a trabajarlas con detenimiento. Baste pensar en un teorema tan importante como el de Thales, cuya demostración exige utilizar el axioma de continuidad, aunque sea de manera velada como la que presenta L.

Santaló utilizando áreas. Es conveniente también considerar porqué no alcanza con una demostración como la que aparece en el libro de Repetto la que, como bien advierte la autora, es válida sólo para segmentos conmensurables.

Esto devino en la necesidad de demostrar algunas proposiciones que ponen de manifiesto que, a pesar de la "naturalidad" de ciertos supuestos respecto a la "continuidad del espacio" (a través de la recta) que hace que ciertas propiedades de la longitud sean tratadas como obvias, creemos no lo son tanto, como por ejemplo:

- La longitud de un segmento sólo depende del segmento U elegido y no de la recta en la que se considera el sistema de abscisas (que, en lenguaje cotidiano significa obtener igual medida de un segmento con distintas reglas si están graduadas utilizando la misma unidad).

- La longitud de un segmento suma de otros dos (se considera la definición de suma segmentos conocida: un segmento $\overline{ab}$ es suma de otros dos $\overline{pq}$ y $\overline{rs}$ si existe un punto m perteneciente a $\overline{ab}$ tal que $\overline{pq} \equiv \overline{am}$ y $\overline{rs} \equiv \overline{mb}$) respecto a un segmento unitario U, es igual a la suma de las longitudes de dichos segmentos (respecto al mismo segmento U):

$$\text{si } \overline{ab} = \overline{am} + \overline{mb}\text{; entonces } |\overline{ab}| = |\overline{am}| + |\overline{mb}|$$

Esta última propiedad es, creemos, una de las que nos muestran un resultado muy fácilmente aceptado. Sin embargo, aparte de la posibilidad real de demostración a partir del axioma (unido a los de congruencia), utilizando la definición de longitud de un segmento, no resulta trivial ya que cada medida se considera utilizando la regla desde cero.

Utilizaremos una versión del axioma de continuidad basada en la que aparece en <u>El Plano</u> de TIRAO, J. A., donde se establece una biyección entre toda recta orientada y los números reales:

Axioma de continuidad

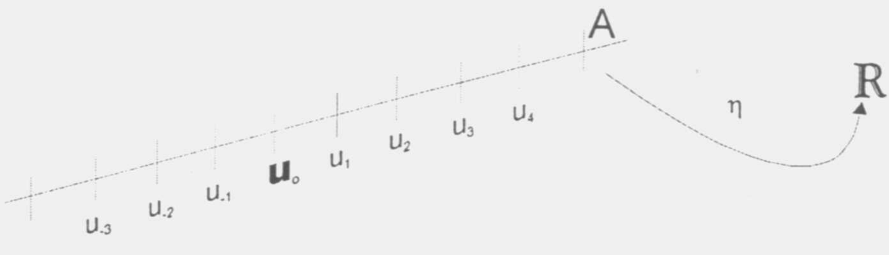
Dados una recta orientada A, un segmento U, y puntos $u_i \in$ A con $i \in \mathbf{Z}$ (conjunto de números enteros) tales que u_i sigue a u_j si $i > j$ y $\overline{u_i u_{i+1}} \equiv$ U para todo i, existe una única función biyectiva de la recta en los números reales, η:A $\rightarrow \mathbf{R}$, que verifica:

i) preserva los órdenes, esto es, si el punto a precede al punto b, en el orden considerado en la recta A, entonces $\eta(a) < \eta(b)$, como números reales;

ii) $\eta(u_i) = i$, para todo $i \in \mathbf{Z}$;

iii) para todo par de puntos a y b en A, el punto medio m del segmento $\overline{ab}$, tiene por imagen según η, la semisuma de las imágenes de a y de b,

$$\eta(m) = \tfrac{1}{2}(\eta(a) + \eta(b))$$



Definición

En las condiciones del teorema se dice que se tiene sobre A definido un <u>*sistema de abscisas*</u> y al segmento U se lo llama <u>*segmento unitario*</u>. Asimismo, a la imagen $\eta(p)$ de un punto $p \in$ A, se la llama <u>*abscisa de p*</u>.

Definición

Dados un segmento U y una recta orientada A en la cual se determina un punto u_o, queda determinado sobre A un sistema de abscisas de modo que para todo par de puntos p y q en el plano, se puede definir <u>*longitud del segmento* $\overline{pq}$ *con respecto a U*</u> como la abscisa del punto p', donde $p' \in \overrightarrow{u_0u_1}$, y $\overline{u_0p'} \equiv \overline{pq}$. Entonces anotamos:

$$longitud\ de\ \overline{pq} = \eta(p') = |\overline{pq}|$$

Teorema

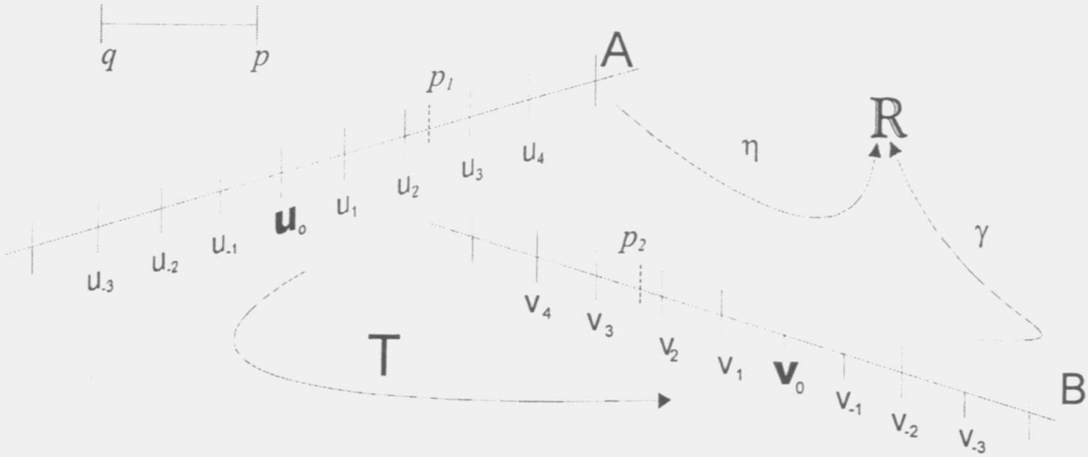
La longitud de un segmento sólo depende del segmento U elegido y no de la recta en la que se considera el sistema de abscisas.

<u>Demostración</u>.

Sean U un segmento y A y B dos rectas orientadas sobre las que se consideran los sistemas de abscisas que determinan sendas funciones $\eta: A \to \mathbf{R}$ y $\gamma: B \to \mathbf{R}$ cuyas existencias determina el axioma de continuidad. Supongamos que llamamos u_i y v_i respectivamente a los puntos de abscisas enteras. Consideremos la única transformación rígida T que preserva orientación y aplica la semirrecta $\overrightarrow{u_0u_1}$ en la semirrecta $\overrightarrow{v_0v_1}$. Por el axioma 7 b de congruencia, $T(u_i) = v_i$ para todo i entero.

Dados dos puntos q y p en el plano, quedan determinados dos puntos $p_1 \in$ A y $p_2 \in$ B, tales que:

$$\overline{u_0p_1} \equiv \overline{qp} \text{ y } \overline{v_0p_2} \equiv \overline{qp}^{(*)}$$



Hasta completar la demostración anotaremos $|\overline{qp}|_A$ y $|\overline{qp}|_B$ a la longitud del segmento $\overline{qp}$ medida en la recta A y en la recta B respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} |\overline{qp}|_A = \eta(p_1) \\ \\ |\overline{qp}|_B = \gamma(p_2) \end{array}\right| \ (1)$$

Además, por (*) y transitividad de la congruencia, resulta $\overline{u_0 p_1} \equiv \overline{v_0 p_2}$, por lo que resulta, por definición,

$$|\overline{u_0 p_1}|_B = \gamma(p_2) \ ^{(2)}$$

También:

$$|\overline{u_0 p_1}|_A = \eta(p_1) \ ^{(3)}$$

De $^{(1)}$ $^{(2)}$ y $^{(3)}$ se obtiene la tesis ya que

$$|\overline{qp}|_A = \eta(p_1) = |\overline{qp}|_B = \gamma(p_2)$$

obteniendo la tesis. Por lo tanto, podemos obviar los subíndices y escribir

$$|\overline{qp}| = \eta(p_1) = \gamma(p_2) \blacklozenge$$

Teorema

La longitud de un segmento suma de otros dos respecto a un segmento unitario U, es igual a la suma de las longitudes de dichos segmentos (respecto al mismo segmento U):

$$\text{Si } \overline{ab} = \overline{am} + \overline{mb}; \text{ entonces } |\overline{ab}| = |\overline{am}| + |\overline{mb}|$$

Demostración:

Sean A una recta orientada, u_i puntos en A que determinan, en base a U, el sistema de abscisas y η la biyección asociada. Entonces:

$$b' \in \overrightarrow{u_0u_1} \text{ tal que } \overline{u_0b'} \equiv \overline{ab}^{(1)}$$

$$m' \in \overrightarrow{u_0u_1} \text{ tal que } \overline{u_0m'} \equiv \overline{am}^{(2)}$$

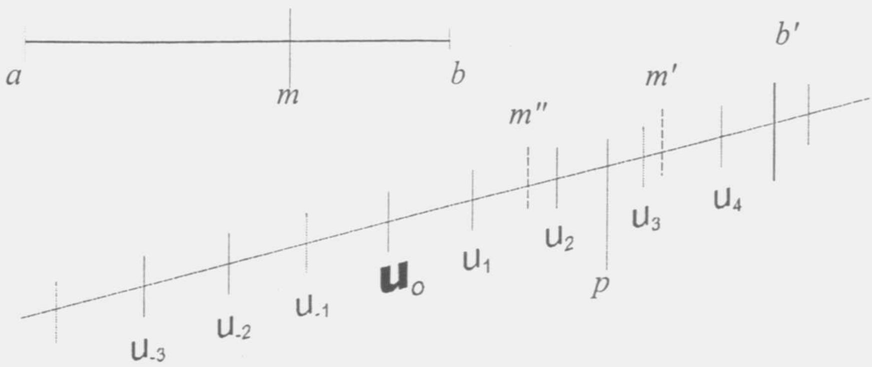
$$\text{y } \; m'' \in \overrightarrow{u_0u_1} \text{ tal que } \overline{u_0m''} \equiv \overline{mb}$$

De $^{(1)}$ y $^{(2)}$ resulta, como consecuencia de la definición de suma de segmentos y dado que $\overline{ab} = \overline{am} + \overline{mb}$ y $\overline{u_0b'} = \overline{u_0m'} + \overline{m'b'}$, que

$$\overline{m'b'} \equiv \overline{mb}$$

Si p es el punto medio del segmento $\overline{u_0b'}$, llamando S_p a la simetría respecto del mismo, tenemos:

$$S_p(u_o) = b',\ S_p(b') = u_o,$$



Como, además, $\overline{m'b'} \equiv \overline{mb}$ y $\overline{u_0m''} \equiv \overline{mb}$, se tiene

$$S_p(\overline{m'b'}) = \overline{u_0m''} \text{ y } S_p(m') = m''$$

Entonces

$$\overline{m'b'} \equiv \overline{u_0m''} \equiv \overline{mb}$$

Por el axioma de continuidad y teniendo en cuenta que

$$|\overline{ab}| = \eta(b'),\ |\overline{am}| = \eta(m') \text{ y } |\overline{mb}| = \eta(m'')$$

$$\eta(p) = \tfrac{1}{2}\,(\eta(u_o) + \eta(b')) = \tfrac{1}{2}\,(0 + \eta(b')) = \tfrac{1}{2}\,|\overline{ab}|$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(\eta(m'') + \eta(m')) = \tfrac{1}{2}\,(|\overline{am}| + |\overline{mb}|)$$

y se obtiene la tesis: $|\overline{ab}| = |\overline{am}| + |\overline{mb}|$ ♦

Referencias Bibliograficas:

FREUDENTHAL, H. (ed. 1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Ed. Reidel.

GEYMONAT, L (1998). *Historia de la Filosofía y de la Ciencia.* Ed. Grijalbo. Barcelona .

LEVI, B. (1947). *Leyendo a Euclides.* Ed. Rosario.

POINCARE, H. y EINSTEIN A. (1948). *Fundamentos de la Geometría.* Colección Infinito Iberoamericana Bs. As. Serie 3 Filosofía de la Ciencia Vol. 1.

TIRAO, J. (1986). *El Plano.* Ed. Docencia.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO BARILOCHE
Quintral 1250 – San Carlos de Bariloche – Río Negro
cronopio@bariloche.com.ar mferrero@crub.uncoma.edu.ar