La Fundamentación de la Matemática[1]

Carlos Zuppa

Resumen

El objeto del presente trabajo es presentar un muy pequeño pantallazo -por razones de espacio y también por las dificultades técnicas inherentes al tema- de la historia de la fundamentación de la matemática en los dos siglos precedentes y las desventuras del reduccionismo formal absoluto después de los trabajos de Gödel y Turing. Trataremos de mostrar, con las limitaciones inherentes a la simplicidad que se pretende para este trabajo, que es precisamente en la fundamentación donde la matemática también conoce de las angustias epistemológicas, de perturbaciones del espíritu e incertezas, y realiza elecciones metamatemáticas.

Introducción

La reconstrucción que cierta historia de la matemática y el imaginario colectivo han realizado de la matemática, tiene tendencia en general, a tratar a ésta como una suma del conocimiento analítico sin desventuras de ninguna especie. Las ideas esenciales de esta reconstrucción son: en todo sentido es una ciencia diferente y no tiene nada que ver con el mundo. La matemática es una realidad en sí misma, un cuerpo independiente de verdades cuyos objetos nos son otorgados como objetos del mundo real. Los matemáticos meramente descubren esos objetos y propiedades mediante el paradigma del pensamiento reflexivo, formal y axiomático. El pensamiento formal puede ser considerado como un juego donde las reglas forman el centro organizador del pensamiento codificado en un sistema de axiomas. En los casos más simples, toda la estrategia está determinada; las evoluciones posibles son finitas y el espíritu puede así realizar todo el recorrido. La matemática no conoce angustias, no sabe de elecciones epistemológicas, etc.

El objeto del presente trabajo es presentar un muy pequeño pantallazo -por razones de espacio y también por las dificultades técnicas inherentes al tema- de la historia de la fundamentación de la matemática y las desventuras del reduccionismo formal absoluto. Trataremos de mostrar someramente que es precisamente en la fundamentación donde la matemática también conoce de las angustias epistemológicas, de perturbaciones del espíritu e incertezas, y realiza elecciones metamatemáticas.

Me dedicaré solamente a la escuela formalista de Hilbert y los trabajos de Gödel y Turing. Lamentablemente no podemos dedicarle mucho espacio a todas las

---

[1] Conferencia dictada en II Jornada de Historia de la Matemática, San Luis, Octubre 2000.

perturbaciones del espíritu matemático del siglo XIX, que desembocan en la Teoría de Conjuntos y la formalización de los números reales por Peano. Fue un siglo pleno de disputas : intuicionistas vs. formalistas, Kronecker vs. Cantor, Cantor contra sí mismo y contra todos, etc.

Finalmente, las conclusiones reflejan solamente mi opinión acerca de la naturaleza de la matemática a la luz de esta historia. Sin la pasión de revivir la historia como proyecto metodológico; coincido con Bachelard cuando habla de "...lo doloroso que sería revivirla en cada instante...", cada vez que se hace historia, como es bien sabido, se está proyectando en el pasado cómo se piensa que debe ser el presente..

La fundamentación de las matemáticas

Como bien remarca M. Kline ([7], cap. 41), uno de los hechos sorprendentes en la historia de la matemática (al menos desde el punto de vista actual) es el atraso que había sufrido la fundamentación lógica de los números reales con respecto al avance vertiginoso del análisis y el álgebra en los comienzos del siglo XIX; mostrando que a veces, el avance en matemática es más ilógico de lo que aparece a simple vista. Se trabajaba ya sobre discontinuidad de funciones representadas por series de Fourier y todavía no habían sido establecidas las bases lógicas de los números racionales negativos ni de los reales. La comprensión intuitiva de éstos parecía adecuada y los matemáticos operaban sobre esta base, pero esto producía muchas oscuridades y deficiencias. Por ejemplo, la inhabilidad de Cauchy para probar la convergencia de las sucesiones que llevan su nombre por la falta de un estudio riguroso de los números reales.

El método deductivo a partir de axiomas de Euclides, había sido relegado en el olvido hacía mucho tiempo y lo cierto es que la mayor parte de la matemática desde 200 A.C. hasta 1870 se montaba sobre una base empírica y pragmática. Fue Weierstrass el primero en apuntar la necesidad en el análisis de una teoría fundamentada del continuo aritmético a comienzos del siglo. Ya no era posible eludir el rigor en el análisis y el problema del perturbador infinito (o infinitos).

Por otra parte, la aparición de las geometrías no-euclidianas y las posibilidades de realizar el análisis en dimensiones > 3 que comenzaban a vislumbrarse, destruían las bases de la intuición visual inmediata que había regido el espíritu geométrico hasta esos momentos y removían las bases de certidumbre matemática.

Hacia 1900 *aprés* los axiomas de Peano para los sistemas numéricos (**AP**) y la teoría de conjuntos de Cantor , en un siglo caracterizado -matemáticamente hablando- por disputas metafísicas y epistemológicas terribles (ver por ejemplo [7], [1], [8],[10]), el objetivo de establecer la matemática sobre bases lógicas rigurosas parecía haber sido logrado: la aritmética y la geometría se habían cimentado sólidamente sobre bases axiomáticas aunque la teoría axiomática de conjuntos tenía ciertos puntos oscuros como el mismo Cantor se dio cuenta. Señalemos de paso que ningún teorema viejo de aritmética, álgebra o geometría Euclidiana fue alterado. El rigor, puntualizó J. Hadamard, también sirvió para las conquistas de la intuición!

De todos modos, el siglo XIX sancionó también ciertas metodologías de reflexión y las corrientes de pensamiento sobre las cuales se desenvolverían los problemas epistemológicos de la matemática, su naturaleza y la validez de la lógica deductiva a comienzos del siglo siguiente: el logicismo y el formalismo axiomático.

No trataremos aquí de la corriente logicista que tiene, entre otros, sus máximos exponentes en B. Russel y A. N. Whitehead (ver [9]). La idea esencial de esta corriente es que la matemática es derivable de la lógica sin necesidad de axiomas propios. La monumental obra de estos autores es como un larguísimo programa de computadora destinado a ese fin, pleno de símbolos lógicos, escrito en un lenguaje de computación incomprensible. Así, en el *Principia Mathematica* de ambos autores, el número 1 debe ser definido como

$$\hat{\alpha}\{\exists x \cdot \alpha = i`x\}.$$

Poincaré sostenía que esta teoría de la lógica matemática contribuyó a desarrollar enormemente la rama de la lógica matemática (!). Por otra parte, inspiró también algunos desesperados intentos de filósofos e

nrolados en la corriente positivista, como R. Carnap por ejemplo, para establecer también la física sobre la misma estructura lógica. En su libro "Fundamentación Lógica de la Física" ([2]) , entre otras alternativas, postula las eventuales ventajas de escribir las teorías en términos de lo que se llama la "oración de Ramsey". Por ejemplo, una teoría del electrón sería (aunque muchísima más larga) una expresión del tipo:

$$(\exists C_1)(\exists\, C_2)...(\exists R_4)[...\ C_1\ ...\ \&(R_3(17) = 5)]...$$

Más adelante, se puede leer el párrafo -por demás sabroso- siguiente "...En la manera de hablar de Ramsey acerca del mundo... ya no es necesario indagar el significado de la palabra *electrón* , porque el término mismo no aparece en el lenguaje de Ramsey ..."(!). Un bello ejemplo de lo que se podría llamar "paranoia teórica".

Los problemas de la Teoría de conjuntos

La tranquilidad proporcionada por el rigor de fines del siglo XIX duró poco tiempo. La teoría de conjuntos, establecida sobre bases ingenuas y puramente intuitivas, mostró inmediatamente sus contradicciones que fueron llamadas piadosamente "paradojas" (Cantor, Burali-Forti, y otros, [7]). La causa de estas paradojas eran las definiciones llamadas impredicativas. Esto es, un objeto es definido en términos de una clase de objetos que contiene el propio objeto a ser definido (el conjunto de todos los conjuntos, etc...). Estas definiciones ocurrían particularmente en la teoría de conjuntos.

Estas contradicciones alteraron profundamente a los matemáticos ya que comprometían seriamente no sólo a la teoría de conjuntos, sino también grandes porciones del análisis clásico. Como dice M. Kline, "... La matemática como estructura lógica estaba en estado de locura, y los matemáticos miraban con nostalgia los días felices cuando las paradojas no habían sido reconocidas ...".

El sueño de Hilbert

En el Congreso Mundial de Matemática de 1904 , Hilbert presentó sus puntos de vista acerca de la fundamentación de la matemática. Esta exposición y sus trabajos posteriores hasta aproximadamente 1930 forman la base de lo que se llama el método formal axiomático o corriente formalista.

El paradigma hilbertiano estaba concebido para acompañar el desarrollo de la matemática y clarificar de una vez y para siempre el método de razonamiento empleado. Hilbert quería formular sistemas axiomáticos formales que contuvieran, como conclusión, toda la matemática. Tales sistemas debían establecer precisamente el método de razonamiento, los postulados y los métodos de inferencia que debían ser aceptados por todos los matemáticos.

Siguiendo a M. Kline, podemos decir que la filosofía madura de Hilbert contenía muchas doctrinas. En concordancia con el rol importante que había alcanzado la lógica en la fundamentación, los formalistas mantienen la lógica pero ésta debe ser tratada conjuntamente con la matemática. La matemática tiene varias ramas, y cada una de estas ramas debe tener su propia fundamentación axiomática. Ésta debe consistir en conceptos y principios lógicos y matemáticos. La lógica es el lenguaje simbólico que coloca las aserciones matemáticas en fórmulas y exprime el razonamiento por medio de procesos formales. Los axiomas expresan las reglas por medio de las cuales las fórmulas resultan una atrás de otra. Todos los símbolos son además despojados de cualquier significado intuitivo o contextual, etc., etc....

Los sistemas formales deben ser -claramente- "**Consistentes**" y "**Completos**". En particular, el "**Problema de Decisión**" está resuelto en el sistema.

Consistente significa que no se puede probar una aserción y también su contraria. Esto es, si A vale, no puede valer también 'NO A' (~A) dentro del sistema. Esta condición adquiere particular relevancia en esos momento por los problemas anteriormente mencionados en la teoría de conjuntos.

Completo significa que si se tiene alguna aserción A que tenga sentido en el sistema, seremos capaces de resolverla. Esto es, alguna de las dos: A o ~A debe ser un teorema probable mediante los axiomas y las reglas de inferencia del sistema axiomático formal.

Tener resuelto el **Problema de Decisión** significa tener un algoritmo ("**Procedimiento de Decisión**") que nos permita decidir si dada una sentencia significativa , ésta es un teorema o no. Si el sistema es **Completo**, hay **Procedimiento de Decisión.**

Además, Hilbert y sus alumnos W. Ackermann y P. Bernays, conjuntamente con Von Neumann desarrollaron una metamatemática ("Proof Theory") que era el método para establecer la consistencia de cualquier sistema formal. Hilbert propuso usar solamente una lógica especial que sería básica y libre de todas las objeciones. Esta debería emplear razonamientos concretos y finitos al estilo pregonado por los intuicionistas. Principios controversiales como inducción transfinita y el axioma de elección estaban prohibidos. Sólo métodos finitos de prueba debían ser usados. Esto es, el sistema formal es una "Finite Machine", aunque potencialmente el sistema envolviera entidades infinitas. Recordemos que , para oídos más inexpertos, la inducción transfinita

$$A(\tau(A)) \rightarrow A(a)$$

suena más o menos como esto: si un predicado A vale para unos objetos confiables $A(\tau(A))$, entonces A vale para cualquier objeto a . Esto es, si A =ser corruptible, podemos decir: si los buenos son corruptibles entonces todos son corruptibles.
El Axioma de Elección dice que dada cualquier colección de conjuntos, existe una función que selecciona un elemento de cada conjunto de la colección.

Una mínima reflexión acerca de estos principios nos convencen que pueden ser realmente controversiales, especialmente para aquellos a los cuáles les disgusta la introducción de la metafísica en la matemática.

Por otra parte, el matemático Ernnest Zermelo había desarrollado (1920) un sistema formal axiomático para la teoría de conjuntos, mejorado por A. A. Fraenkel (**ZF**). Cambios posteriores fueron realizados por Von Neumann (**ZF**'). A '*grosso modo*', la esperanza de evitar las contradicciones de la teoría de conjuntos ingenua se basan en:

(**ZF**): restringir los tipos de conjuntos aceptados eliminando los que se habían mostrado particularmente peligrosos pero manteniendo suficientes "conjuntos" como para servir al fundamento del análisis.

(**ZF'**): Von Neumann estableció la diferencia entre clases y conjuntos. Una clase es un conjunto tan grande que no está contenido en ninguna otra clase o conjunto, y los conjuntos son clases más restrictivas que pueden miembros de una clase. Así, los conjuntos son las clases "buenas". (Ver 12).

El sistema formal de la teoría de conjuntos de Zermelo, con las modificaciones de Fraenkel y Von Neumann, se mostró adecuado para todo el análisis clásico y está "aparentemente" libre de contradicciones en el sentido que nadie encontró ninguna todavía. Aparte de la cuestión de la consistencia, el sistema usa el controvertido "Axioma de Elección", que es necesario para establecer partes esenciales de análisis, topología, etc.

Los problemas de consistencia de los sistemas formales pueden reducirse a la consistencia de (**ZF**) o la consistencia de (**AP**) (teoremas del tipo : si (**ZF**) es consistente entonces la Geometría es consistente, etc.), y el problema de la consistencia de (**AP**) se reduce a verificar que no se puede mostrar 1=2.

Por otra parte, y gracias al optimismo epistemológico del positivismo imperante, la **Completitud** estaba fuera de toda discusión: con la máquina de deducir, se podría sacar a luz todo lo que el sistema encierra (aún hoy muchos pueden creer en esto!).

Se comprende claramente que todo el programa de Hilbert y su escuela es realmente formidable y estaban realmente convencidos de que los matemáticos podrían llevarlo a cabo. El único problema con este inspirado proyecto es que era imposible!

Gödel y Turing

Los trabajos de K. Gödel en 1931 ([6]) fueron realmente una injuria al reduccionismo formal. El mayor resultado de Gödel (Teorema de Incompletitud) establece que si un sistema formal *T* adecuado para contener la teoría de números es consistente y si los axiomas del sistema formal de la aritmética son axiomas o teoremas en *T*, entonces *T* es incompleto. En consecuencia, existen sentencias *S* de la teoría de números tal que ni *S* ni *~S* pueden ser probados. Para hacer más grande el insulto, hay sentencias que no pueden ser resueltas en el sistema formal pero que son intuitivamente verdaderas!

Como corolario de este resultado Gödel obtiene que la consistencia del sistema aritmético tampoco puede ser probada en los límites de la lógica finita permitida. Esto es algo así como que las "máquinas finitas" que contienen (**AP**) no pueden probar su propia consistencia y no pueden probar muchas otras cosas acerca de sí mismas! El trabajo de Gödel, que es un verdadero "tour de force", debe ser admirado por la tremenda imaginación intelectual; esto era claramente lo opuesto de lo que se había esperado.

Si el sistema es incompleto todavía puede existir un **Procedimiento de Decisión** y Gödel deja abierta esta cuestión. En 1936 Turing publica su trabajo "*On Computable Numbers and application to the Decision Problem*" que da una respuesta negativa a la cuestión y se convertiría en una piedra basal para la teoría de computación ([3],[4],[5]). La "*Máquina de Turing*" es, a grosso modo, como un sistema formal axiomático de Hilbert, los teoremas son como programas (algoritmos), etc.. Conocer la verdad y toda la verdad en un sistema como el (**AP**) implica en particular que podemos tener algoritmos para determinar el N-dígito de cualquier número que se nos ocurra: un número se llama "*computable*" cuando existe un algoritmo que permite calcular sucesivamente todos sus dígitos. Por ejemplo, existen programas para π, y programas para soluciones de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros, etc., y la mayoría de los números que aparecen en análisis son computables. Pero hay un número grande de excepciones: de hecho, los números computables forman nada más que un conjunto numerable.

Esta es la idea básica de Turing de donde deduce que no puede haber un **Procedimiento de Decisión** en el sistema (**AP**). En el trabajo de Turing se adelantan ciertas cuestiones acerca de la cantidad de información (Teoremas, por ejemplo) que puede "caber" en una máquina finita con algoritmos finitos (los sistemas formales de Hilbert en particular).

Hagamos ahora un pequeño resumen de la situación, muy angustiante si se quiere, en que ha quedado el sistema formal (**AP**) de los números reales.

Consistencia.

No podemos probar la consistencia de (**AP**), al menos con la lógica de primer orden. Se puede probar la consistencia si se admite inducción transfinita (G. Gentzen, 1936) pero esto es más problemático todavía.

Veamos cómo puede lucir este problema de la consistencia: supongamos que mi sistema es como una calculadora. Funciona todo bien, salvo que el resultado de realizar (7.7777777777 - 5.5555555555) es igual a 2.2222222223. Se percibe claramente que el sistema puede pasar mucho tiempo funcionando correctamente, pero algún día se puede llegar (es razonable) al teorema formal:

$$B = B + q\big((7.7777777777 - 5.5555555555) - 2.2222222222\big)$$

para todo par B,q. Como corolario se llega a la conclusión 1=2 !

Aún así, como en física, se puede hablar de sistemas localmente consistentes. Esto es, sistemas consistentes mientras no se lo presione demasiado. Existe por otra parte mucha gente que trabaja en estos temas que creen que cualquier sistema formal suficientemente complejo es inconsistente si se lo presiona demasiado!

Indecisibilidad e incompletitud

En el contexto de la teoría formal, la mayoría de los números no son computables y existen proposiciones (acerca de los números reales) sobre las cuáles no se puede asegurar si son verdaderas o falsas (incertidumbre!).

Podemos además agregar el siguiente resultado de E. Borel:

Normalidad

Para casi todos los números reales (en el sentido de medida de Lebesgue), sus dígitos aparecen con distribución uniforme y totalmente al azar (sin estructura).

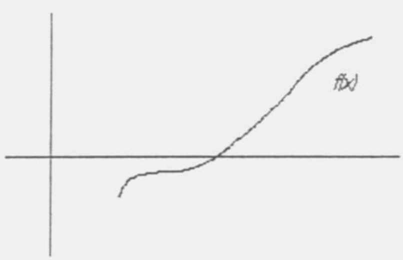
Todo esto quiere decir que aún la simple recta es como un "test de Rorschach" de las preocupaciones metamatemáticas y metafísicas que uno puede tener (suponiendo que tenga alguna!). La recta puede también ser mirada como una representación de todas las metáforas que perturban tanto a la paranoia teórica, o sea, la inflación maniática de la teoría sobre la praxis: indeterminación, caos, azar, etc.

Para colmo de males, y saliéndonos un poco de la pura aritmética, si agregamos cuestiones fenomenológicas o interpretativas: la recta como modelo del movimiento continuo, el continuo del universo, etc., tenemos las complicaciones de las "Paradojas de Zenón". Ver ([11]) por ejemplo, para una interesante discusión de estas cuestiones en el contexto de la teoría del espacio-tiempo de la relatividad.

Podríamos entonces preguntarnos porqué el espíritu se obstina en mantener ese "continuo" que es tan problemático desde todo punto de vista, si además, cuando calculamos efectivamente no vamos más allá de algunos decimales.

Sería muy largo de discutir cómo ciertas imágenes influyentes han jugado un rol esencial en la formación misma del espíritu matemático, y cómo situaciones antropológicas ilustran la introducción y el empleo de ciertos dispositivos e instrumentos psico-matemáticos bien definidos, en particular el continuo. Para los antiguos griegos, el continuo era la manera natural de hacer "geometría", esto es, imaginar el mundo unidimensional, aunque posteriormente y cuando se midiera, efectivamente se limite a los racionales. Para ellos, los irracionales no eran más que encajes de intervalos racionales -las cortaduras de Dedeking modernas- y esto es más que suficiente, casi igual que para nosotros!. Algunos sostienen que estos griegos sufrieron un terror místico con los irracionales. Sin embargo, es difícil imaginar alguna aventura del pensamiento a la cuál estos antiguos griegos le tuvieran miedo!

Empleando otra metáfora matemática, un modelo de muchos procesos en ciencia puede ser así:



y lo que nos interesa es $f(x)=0$. Pensando continuamente, es fácil crear un algoritmo (Newton) que converge a la solución, al menos aproximada. Imaginen Uds. las complicaciones espirituales a las que nos someteríamos si no pensáramos continuamente!

Acerca de la Naturaleza de la Matemática

Primero que nada, espero que no se haya interpretado en esta charla que los sistemas formales no sirven para nada y que Hilbert creía que la matemática era un juego sin sentido que se juega con lápiz y papel. No era así!. Dijo justamente que para ser absolutamente claros y precisos en todas las cuestiones acerca de la matemática, hay que especificar las reglas que determinan la corrección de nuestras acciones. Ningún matemático que haya hecho lo que él hizo y con esa capacidad de liderazgo es un ingenuo ni mucho menos. Además, los sistemas formales finitos tienen actualmente una importancia singular porque son los modelos naturales de la ciencia de la computación.

Pero ningún pensamiento puramente formal, por ejemplo, hubiera tolerado el estudio de un objeto, tan irracional (en sus orígenes) como la "delta de Dirac" δ: una función que vale cero en todas partes, salvo en cero donde toma el valor $+\infty$, y para colmo cumple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Sin embargo, esta forma de pensar contra toda lógica condujo a la Teoría de Distribuciones de tan amplia utilidad en Ecuaciones en Derivadas Parciales y otros temas.

Unas de las implicaciones más importantes del teorema de Gödel es que ningún sistema formal de axiomas puede contener, no sólo toda la matemática, sino ninguna rama importante de la matemática. Felizmente, la matemática es algo más que sistemas formales finitos y tiene angustias metafísicas. La admisión del "Axioma de Elección" es realmente perturbadora, aunque muchos matemáticos pueden seguramente trabajar tranquilos sin saber siquiera que dicho axioma está soportando gran parte del análisis!

Una actividad matemática puramente formal, abandonada a ella misma, no tarda en crear estructuras gratuitas, desinteresadas, modelos semánticos que no tienen otra realización que su propia combinatoria. No tarda en caer en las insignificancias más absolutas. Por más que se crea que "...en matemáticas nunca se sabe de qué se habla...", la matemática continua fuerte y vivaz porque habla del mundo.

Y no habla de un mundo que está simplemente afuera y hay que descubrir. Hacer matemática no consiste meramente en copiar ese mundo de objetos matemáticos, sino en "inventarlo", en construir imágenes operativas de nuestra relación con el mundo que incorporados en coherencias nuevas, permiten otorgar significados a lo real.

A diferencia de lo real, lo material no tiene signo, y es a partir de esa ausencia de signo que el pensamiento científico construye una nueva "realidad". Lo "real" es la forma que asume al transformarse, la organización de lo material, de modo de volverlo real y operativo. Es esa cristalización de lo material en una forma organizativa operativa lo que llamo lo real. Este proceso de "invención" de significaciones nuevas está en la base de cualquier ciencia y también de la matemática. El carácter de creación de un nuevo significante no se deduce a veces de su veracidad ni de su acuerdo formal con un sistema preexistente, sino por su capacidad de modificar el sistema existente, es decir, suscitar nuevas estructuras de "acuerdo con el mundo", que tienen además la virtud de convertirlo en un pensamiento capaz de operar en él.

Kronecker decía que Dios creó los números naturales y todo lo demás es obra del hombre. Es más que dudoso que haya sido realmente así. Se han encontrado hace poco huesos con marcas (muescas) ordenadas de cinco en cinco que datan de al menos 30.000 años. Podemos suponer aquí la aparición de algunas ideas abstractas acerca de contar, cardinalidad, y un sistema de base cinco. En todo caso, parece bien probable que es una lectura del mundo como dijimos arriba. Esta idea abstracta es anterior inclusive a la abstracción monoteísta (que según algunos es la primera idea abstracta).

Para Weyl ([10]), la matemática "... puede bien ser una actividad creadora del hombre, como el lenguaje o la música, de singular originalidad, cuyas decisiones históricas desafían la racionalización objetiva...", y deseamos que así continúe por mucho tiempo. Cómo esta manera de pensar la matemática influye en las elecciones metodológicas e epistemológicas en la acción de enseñar es otra historia , más larga y polémica todavía, que esperamos continuar en otros trabajos.

Referencias

1. Brouwer L. , *Intuitionism and Formalism*, Amer. Math. Soc. Bull. , 20, 1913/1914, 81-96
2. Carnap R. ,*Fundamentación Lógica de la Física*, Ed. Sudamericana, 1969
3. Chaitin G. J., *Information-Theoretic Incompleteness*, World Scientific, 1992
4. Chaitin G. J., *Information, Randomness & Incompleteness*, World Scientific, 1990
5. Chaitin G.J., *Algorithmic Information Theory*, Cambridge Univ. Press, 1990

6. Gödel K., *On formally undecidable propositons of* Principia Mathematica *and related systems*, Basic Books, 1965
7. Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 3, Oxford Univ. Pres.., 1972
8. Poincaré H., *The Foundations os Science*, Science Press, 1946
9. Rusell B., *The Principles of Mathematics*, Allen and Uwin, 1903
10. Weyl H., *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*, Princeton Univ. Press, 1949
11. *Zeno and the Paradox of Motion*, http://mathpages.com/rr/s3-07/3-07.htm
12. Kelley, J., *Topología General,* Eudeba

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de San Luis
Chacabuco y Pedernera
5700 – San Luis
e-mail: zuppa@unsl.edu.ar