Sucesiones Recursivas Lineales

Segunda parte

Juan Sabia *Susana Tesauri*

Nuestro objetivo (como ya fue establecido en la primera parte de estas notas) es calcular una fórmula cerrada para el término general de una sucesión recursiva lineal. Antes de proseguir, recordemos la definición:

Definición: Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos se dice **recursiva lineal** si existen $k \in \mathbb{N}$ y números complejos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ tales que

$$x_{n+k} = \alpha_0.x_n + \alpha_1.x_{n+1} + \cdots + \alpha_{k-1}.x_{n+k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. La fórmula general

En esta sección, mostraremos cómo se obtiene una fórmula general para el término n-ésimo de una sucesión recursiva lineal. Para eso, usaremos la siguiente

Definición: Sea $P = \sum\limits_{0\le i\le k} \alpha_i X^i \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ un polinomio de grado k y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **satisface** P si

$$\alpha_0.x_n + \alpha_1.x_{n+1} + \cdots + \alpha_k.x_{n+k} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, estamos asociando un polinomio a la ecuación de recurrencia de la sucesión. Por ejemplo, una sucesión geométrica de razón λ satisface los polinomios $(X - \lambda)$ y $(X^2 - \lambda^2)$ (ver Ejemplos 1 y 2), cualquier sucesión aritmética satisface el polinomio $X^2 - 2X + 1$ (ver Ejemplo 3) y la sucesión de Fibonacci satisface el polinomio $(X^2 - X - 1)$ (ver (1) en Introducción).

Para encontrar una fórmula general del término n-ésimo de una sucesión recursiva lineal $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, traducimos nuestro problema a una ecuación matricial.

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface un polinomio $P = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i.X^i$ en $\mathbb{C}[X]$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i.x_{n+i}$. En notación matricial, podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{k-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k-2} \\ x_{n+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \\ x_{n+k} \end{pmatrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y más generalmente, si notamos con C_P a la matriz

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

tendremos que

$$(C_P)^j . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{j+1} \\ x_{j+2} \\ x_{j+3} \\ \vdots \\ x_{j+k} \end{pmatrix} \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, tomando $j + 1 = m$, tendremos que el término m-ésimo de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será una combinación lineal fija de los coeficientes de $(C_P)^{m-1}$. Nuestro problema se reduce, por lo tanto, a encontrar una fórmula para las potencias de la matriz C_P. Para eso, consideraremos primero un caso particular.

3.1. El caso de las raíces simples

Supongamos que el polinomio P tiene todas sus raíces simples. Como la matriz C_P tiene a P como polinomio característico (notar que C_P es la matriz compañera del polinomio P), la matriz C_P resulta diagonalizable. Es decir, si $\lambda_1, \dots \lambda_k$ son las raíces de P en $\mathbb{C}$, existe una matriz $D \in \mathbb{C}^{k\times k}$ inversible tal que

$$D.C_P.D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, usando la convención $0^0 = 1$ si es necesario,

$$(C_P)^{n-1} = D^{-1}. \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix} .D \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, los coeficientes de $(C_P)^{n-1}$ serán combinaciones lineales fijas de $\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \dots, \lambda_k^{n-1}$ y por lo tanto el término n-ésimo de la sucesión también será una combinación lineal fija de $\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \dots, \lambda_k^{n-1}$, con lo que queda demostrada la siguiente

Proposición. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal que satisface un polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ de grado k cuyas raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son todas distintas. Entonces existen $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ tales que

$$x_n = a_1.\lambda_1^{n-1} + a_2.\lambda_2^{n-1} + \ldots + a_k.\lambda_k^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Ahora utilizaremos esta Proposición para encontrar una fórmula general de algunas sucesiones que ya vimos.

Consideremos la sucesión periódica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (Ejemplo 5) definida por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \\ x_{n+3} = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Esta sucesión satisface el polinomio $P = X^3 - 1$ y, por lo tanto, usando la Proposición anterior, deben existir a, b y c en $\mathbb{C}$ tales que

$$x_n = a.1 + b.\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + c.\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta las igualdades para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, se obtiene

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ \\ a + b.\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + c.\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = 3 \\ \\ a + b.\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) + c.\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 5 \end{cases}$$

y, resolviendo el sistema se tiene que $a = 3$, $b = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $c = -1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = 3 + \left(-1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + \left(-1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.$$

Consideremos ahora la sucesión de Fibonacci $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ver Introducción) definida por

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Esta sucesión satisface el polinomio $P = X^2 - X - 1$ que tiene por raíces a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, existen a y b en $\mathbb{C}$ tales que

$$f_n = a.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + b.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$, tenemos que

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \\ a.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

de donde $a = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ con lo que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicación: Sean a y b números naturales. Queremos estimar la cantidad de divisiones necesarias para calcular el máximo común divisor entre a y b mediante el algoritmo de Euclides.

Lema: Sean $a \leq b$ números naturales. Consideramos que el algoritmo de Euclides siempre comienza dividiendo el mayor número por el menor. Si $f_n \leq a < f_{n+1}$ (donde f_i es el i-ésimo número de Fibonacci), la cantidad de divisiones necesarias para efectuar el algoritmo de Euclides está acotada por n.

Demostración: Lo demostraremos por inducción en n. Si $n = 1$ ó $n = 2$ el resultado es obvio. Supongamos $n > 2$. Como $f_n \leq a < f_{n+1}$, el resto r de la división de b por a es menor que f_{n+1}. Pueden darse dos casos.

i) $r < f_n$, en cuyo caso el algoritmo de Euclides entre a y r involucra a lo sumo $n-1$ divisiones (por hipótesis inductiva) y por lo tanto, entre a y b involucra a lo sumo n divisiones como queríamos demostrar.

ii) $f_n \leq r < a < f_{n+1}$. En este caso, el siguiente paso será dividir a a por r. Si llamamos q al cociente y r' al resto, tenemos que:

$$r' = a - r.q \leq a - r < f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$$

Luego, el algoritmo de Euclides entre r y r' involucra a lo sumo $n-2$ divisiones (por hipótesis inductiva) y por lo tanto, entre a y b involucra a los sumo n divisiones como queríamos demostrar. □

Proposición: Sean $a \leq b$ números naturales. El número de divisiones necesarias para calcular el máximo común divisor entre a y b por medio del Algoritmo de Euclides está acotado por $5(D+1)$, donde D es la cantidad de cifras del desarrollo decimal de a.

Demostración: Usando el Lema anterior, si queremos estimar el número de divisiones necesarias, deberíamos encontrar todos los n tales que $f_n \leq a$. Usando la fórmula general de los números de Fibonacci tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \leq a$$

y esto implica

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 < a$$

con lo cual

$$n \log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < \log_{10}(\sqrt{5}.(a+1)) < \log_{10}(a) + 1$$

y por lo tanto

$$n < 5(\log_{10} a + 1).$$

Notar que $\log_{10} a$ es la cantidad de cifras del desarrollo decimal de a. □

3.2. El caso de las raíces múltiples

El razonamiento anterior evidentemente no funciona en el caso en que la sucesión satisface un polinomio con raíces múltiples ya que la matriz C_P no es diagonalizable pero igualmente se puede tratar de encontrar una expresión para los coeficientes de la matriz $(C_P)^{n-1}$. Para eso utilizaremos la forma normal de Jordan de dicha matriz. Como la matriz C_P es la compañera del polinomio P, tanto el polinomio característico como el minimal de C_P es P y por lo tanto, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son las raíces distintas de P, la forma normal de Jordan de C_P tendrá un solo bloque de Jordan asociado a cada autovalor de P. Es decir, existe una matriz $D \in \mathbb{C}^{k \times k}$ inversible tal que

$$D.C_P.D^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & J_{\lambda_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

donde cada J_{λ_i} es bloque de Jordan, es decir, una matriz del tipo

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Elevando la matriz de Jordan de C_P a la $n-1$ multiplicando por bloques se tiene que

$$(C_P)^{n-1} = D^{-1}. \begin{pmatrix} (J_{\lambda_1})^{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (J_{\lambda_2})^{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & (J_{\lambda_3})^{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (J_{\lambda_r})^{n-1} \end{pmatrix}.D.$$

Por lo tanto bastará saber elevar un bloque de Jordan para obtener información sobre los coeficientes de $(C_P)^{n-1}$. Supongamos que $J_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{j \times j}$ y observemos algunas propiedades:

-) El bloque de Jordan J_{λ_i} se puede escribir como suma de dos matrices que conmutan:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como las dos matrices conmutan, para elevar la suma a la $n-1$, podemos usar la fórmula del binomio de Newton.

- •) Si llamamos N a la matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{j \times j}$$

y notamos con I_r a la matriz identidad en $\mathbb{C}^{r \times r}$, tenemos que

$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{j-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ I_{j-2} & & & \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, para $1 \leq i \leq j-1$,

$$N^i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & 0 & \ldots & 0 \\ & I_{j-i} & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, a medida que se eleva la matriz N, los unos van "bajando" una fila por vez.

Si $i \geq j$, $N^i = 0$. Así que, aplicando la fórmula del binomio de Newton obtenemos $(J_{\lambda_i})^{n-1} = (\lambda_i I_j + N)^{n-1} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} J_{\lambda_i}^{n-1-\ell} N^\ell$. Con la convención que $\binom{n-1}{i} = 0$ si $i > n-1$, se tiene que $(J_{\lambda_i})^{n-1}$ es igual a

$$\begin{pmatrix} {\lambda_i}^{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \binom{n-1}{1}{\lambda_i}^{n-2} & {\lambda_i}^{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \binom{n-1}{2}{\lambda_i}^{n-3} & \binom{n-1}{1}{\lambda_i}^{n-2} & \lambda_i^{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{n-1}{j-1}\lambda_i^{n-j} & \binom{n-1}{j-2}\lambda_i^{n-j+1} & \binom{n-1}{j-3}\lambda_i^{n-j+2} & \ldots & \binom{n-1}{1}{\lambda_i}^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Luego, tenemos una fórmula para $(C_P)^{n-1}$. Notar que $\binom{n-1}{j-1}$ es un polinomio de grado $j-1$ en n y, si $\lambda_i \neq 0$, $\lambda_i^{n-j} = \lambda_i^{n-1}.\lambda_i^{1-j}$. Por lo tanto, $\binom{n-1}{j-1}.\lambda_i^{n-j} = \binom{n-1}{j-1}.\lambda_i^{1-j}.\lambda_i^{n-1}$ es un polinomio de grado $j-1$ en n multiplicado por λ_i^{n-1}. Para el caso $\lambda_i = 0$ usamos la convención $0^0 = 1$ y $0^j = 0$ si $j \in \mathbb{Z} - \{0\}$ para resumir la escritura. Queda demostrado entonces el siguiente

Teorema. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal que satisface un polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ cuyas raíces complejas no nulas son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ con multiplicidades $s_1, s_2, \ldots, s_r$ respectivamente y 0 es raíz de P con multiplicidad s (eventualmente $s = 0$). Entonces existen polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_r$ en $\mathbb{C}[X]$ con $\mathrm{gr}(f_i) \leq s_i - 1$ o $f_i = 0$ y $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{C}$ tales que

$$x_n = f_1(n).\lambda_1^{n-1} + f_2(n).\lambda_2^{n-1} + \ldots + f_r(n).\lambda_r^{n-1} + \sum_{i=1}^{s} c_i.0^{n-i} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Encontremos ahora una fórmula general para la sucesión, definida en el Ejemplo 6, cuyo término n-ésimo cuenta la cantidad máxima de operaciones necesarias para triangular una matriz de $n \times n$ por el método de Gauss. Recordemos que

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 13 \\ x_4 = 34 \\ x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - 1x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

El polinomio P asociado a esta recursión es

$$P = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 = (X-1)^4.$$

Utilizando el teorema anterior para la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, obtenemos que su término general debe ser de la forma

$$x_n = a.n^3 + b.n^2 + c.n + d \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

para a, b, c y d complejos. Igualando los primeros cuatro términos de la sucesión a su correspondiente fórmula, o sea

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=13 \\ 64a+16b+4c+d=34 \end{cases}$$

obtenemos que

$$x_n = \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicios

Ejercicio 6. Calcular las fórmulas generales de las siguientes sucesiones:

i) $$\begin{cases} a_1 = 1\,,\; a_2 = 0\,,\; a_3 = 1\,,\; a_4 = 0 \\ a_{n+4} = 10a_{n+3} - 35a_{n+2} + 50a_{n+1} - 24a_n \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

ii) $$\begin{cases} a_1 = 1\,,\; a_2 = 1\,,\; a_3 = 1\,,\; a_4 = 1 \\ a_{n+4} = -6a_{n+3} - 13a_{n+2} - 12a_{n+1} - 4a_n \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

iii) $a_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$ si $n \geq 1$

iv) $a_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$ si $n \geq 1$

v) $a_n = \sum_{i=1}^{n} i^4$ si $n \geq 1$

Ejercicio 7. Sea $n \in \mathbb{N}$, sean a , $b \in \mathbb{C}$ y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

Calcular $\det(A)$ en función de los valores de a, b y n.

Ejercicio 8. Dados $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se considera la integral

$$S_k = \int_0^\pi \frac{\cos kx - \cos k\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx.$$

i) Probar que $S_{k+1} = 2\cos\alpha\; S_k - S_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

ii) Calcular $S_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 9.

i) Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la fórmula

$$a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n.$$

Encontrar una definición recursiva lineal para $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Deducir que $\left[(1+\sqrt{2})^n\right] \equiv n+1 \pmod 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (donde $[x]$ significa parte entera de x).

ii) Encontrar p y q números naturales tales que

$$\left[(\frac{p+\sqrt{q}}{2})^n\right] \equiv n \pmod 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 10. Sean A y E vértices opuestos de un octógono regular. Una rana está en el vértice A y comienza a saltar de vértice en vértice, con las siguientes dos reglas:

I) Desde un vértice cualquiera del octógono distinto de E, puede saltar a cualquiera de los dos vértices adyacentes.

II) Cuando llega al vértice E, la rana deja de saltar y se queda allí. Para cada número natural n, sea a_n el número de caminos distintos que puede seguir la rana con **exactamente** n saltos, terminando en E.

Probar que

$$\begin{cases} a_{2n-1} = 0 \\ \\ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Una generalización: Sucesiones mutuamente recursivas lineales

Consideremos ahora las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \qquad a_2 = 0 \qquad b_1 = 0 \qquad b_2 = 1 \\ a_{n+2} = 2b_{n+1} + a_n \qquad b_{n+2} = a_{n+1} + b_n. \end{cases}$$

Tratemos de traducir las ideas precedentes a esta situación. Transformando la definición anterior a una operación entre matrices tenemos, como antes, que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es

$$\mathcal{X} = X^4 - 4X^2 + 1$$

y todas sus raíces son simples, por lo tanto la matriz es diagonalizable. Luego existen complejos α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1 y δ_2 tales que

$$a_n = \alpha_1.(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1} + \beta_1.(-\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1} +$$
$$+\gamma_1.(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{n-1} + \delta_1.(-\sqrt{2-\sqrt{3}})^{n-1}$$

y

$$b_n = \alpha_2.(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1} + \beta_2.(-\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1} +$$
$$+\gamma_2.(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{n-1} + \delta_2.(-\sqrt{2-\sqrt{3}})^{n-1}.$$

Resolviendo los sistemas lineales asociados a los primeros cuatro términos de las sucesiones tenemos que,

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{12}\right).(1+(-1)^{n-1}).\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} +$$
$$+\left(\frac{3-\sqrt{3}}{12}\right).(1+(-1)^{n-1}).\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$b_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right).(1+(-1)^{n}).\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{n} +$$
$$+\left(\frac{-\sqrt{3}}{12}\right).(1+(-1)^{n}).\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Este método se puede adaptar a varias sucesiones mutuamente recursivas lineales. Como la demostración es esencialmente la misma que en el caso de una sola sucesión, nos limitaremos a dar una definición y a establecer el resultado.

Definición: Sean $\{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \le i \le r)$ r sucesiones en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Se dice que son **mutuamente recursivas lineales** si existe $k \in \mathbb{N}$ y complejos $\alpha_j^{(i)}$ $(1 \le i \le r\ ,\ 0 \le j \le k-1)$ tales que

$$a_{n+k}^{(i)} = \sum_{1\le s\le r}\left(\sum_{0\le j\le k-1} \alpha_j^{(s)}.a_{n+j}^{(s)}\right) \qquad (1 \le i \le r) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, cada término de cada sucesión depende linealmente de los k términos anteriores de todas las sucesiones. En este caso podemos obtener una matriz A en $\mathbb{C}^{rk\times rk}$ tal que

$$A^{n-1}.\begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_k^{(1)} \\ \vdots \\ a_1^{(r)} \\ \vdots \\ a_k^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n+k-1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(r)} \\ \vdots \\ a_{n+k-1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Usando la forma normal de Jordan de A para obtener A^{n-1} como antes, podemos dar una fórmula del término general de cada sucesión $\{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. (La única diferencia es que, como la matriz A no es una matriz compañera, su forma de Jordan puede tener más de un bloque de Jordan para cada autovalor, pero los cálculos son esencialmente los mismos).

Para terminar, podemos enunciar el siguiente resultado cuya demostración se deduce de lo hecho anteriormente.

Proposición: Sean $\{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq r)$ r sucesiones mutuamente recursivas lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces, cada $\{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq r)$ satisface una fórmula como la dada en el Teorema de la sección 3.2. □

Ejercicios

Ejercicio 11. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci. Calcular el término general de la sucesión $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 = 1 \qquad \mathcal{F}_2 = 1 \\ \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n + f_{n+2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ejercicio 12. Calcular una fórmula general para las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \qquad a_2 = 0 \qquad b_1 = 0 \qquad b_2 = 1 \\ a_{n+2} = 2b_{n+1} + a_n \qquad b_{n+2} = a_{n+1} + b_n. \end{cases}$$

Referencias

[1] R. Graham, D. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics - A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.

[2] K. Hoffman and R. Kunze, *Algebra Lineal*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1973.

[3] Lipschutz, Seymour, *Algebra Lineal*, Mc. Graw-Hill, 1992.

[4] A. Markushévich, *Sucesiones Recurrentes*, Editorial MIR, 1974.

[5] M. Spiegel, *Finite Differences and Difference Equations*, McGraw-Hill Publishing Company, 1989.

El enunciado del ejemplo de sucesiones mutuamente recursivas resuelto en la sección 4 fue extraído de [1], donde también se encuentran fórmulas generales para sucesiones recursivas usando funciones generatrices (series formales de potencias). También se extrajeron de allí los ejercicios 9 y 11.
Los ejercicios 7 y 8 fueron extraídos de [5] donde además se pueden encontrar muchas otras aplicaciones de este tema (a la física, a la probabilidad, etc.).

En [3] se trata el tema de las sucesiones recursivas lineales con un nivel elemental pero casi sin demostraciones.
Las nociones básicas de Algebra Lineal, forma normal de Jordan y matrices compañeras se pueden encontrar en [2]. (una aproximación más elemental a estos temas puede leerse en [3]).
El ejercicio 10 fue extraído de la Competencia E. Paenza del año 1990.

Universidad de Buenos Aires.
Fac. de Ciencias Exactas y Naturales. Dep. de Matemática.
Ciudad Universitaria - Pabellón I
(1428) - Buenos Aires
jsabia@dm.uba.ar
stesauri@dm.uba.ar