Continuidad de las operaciones: máximo δ para un ϵ dado

Norberto A. Fava

Es sabido que la operación de calcular el inverso de un número complejo así como la de efectuar el producto de dos números son continuas en sus respectivos dominios, aunque no de manera uniforme.

Para comprender cabalmente el sentido de esas afirmaciones conviene considerar las funciones

$$z \to 1/z \quad (z \neq 0) \quad y \quad (z, w) \to zw.$$

El dominio de la primera es el plano complejo C con excepción del origen, el de la segunda es $C^2 = C \times C$. La continuidad de estas funciones en sus respectivos dominios se expresa formalmente por medio de los siguientes enunciados:

1. Si $a \neq 0$, para cada número positivo ϵ existe un número δ también positivo, tal que la relación $|z - a| \leq \delta$ implica

$$\Big|\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\Big| \leq \epsilon.$$

2. Para cada $\epsilon > 0$ existe un número δ también positivo tal que las relaciones $|z - a| \leq \delta$ y $|w - b| \leq \delta$ implican $|zw - ab| \leq \epsilon$.

En ambos casos el número δ depende no sólo de ϵ sino también del punto que se considere. En esta dependencia del punto, precisamente, es en lo que consiste la no uniformidad de las dos operaciones que estamos analizando; y la mejor forma de comprenderlo es calcular el máximo valor de δ compatible con cada uno de aquellos enunciados.

Comenzamos por el primero: a fin de garantizar que la condición $|z-a| \leq \delta$ implique $z \neq 0$, es indispensable que se cumpla $\delta < |a|$. Bajo esta hipótesis, se tendrá:

$$|z| = |a - (a - z)| \geq |a| - |z - a| \geq |a| - \delta > 0$$

y por consiguiente, si $|z - a| \leq \delta$ tendremos

$$\Big|\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\Big| = \frac{|z - a|}{|a||z|} \leq \frac{\delta}{|a|(|a| - \delta)}.$$

Observando las últimos relaciones, notemos que el máximo del primer miembro en el disco $|z-a| \leq \delta$ se alcanza en el punto de intersección de su circunferencia con el segmento que une el punto a con el origen y es exactamente igual al tercer miembro de modo que para garantizar que éste sea $\leq \epsilon$ debe cumplirse $\delta \leq (|a|^2 - |a|\delta)\epsilon$, es decir,

$$\delta \leq \frac{|a|^2\epsilon}{1 + |a|\epsilon} = \frac{|a|\epsilon}{1 + |a|\epsilon}|a|.$$

Basta observar que el último número es menor que $|a|$ para concluir que el máximo valor de δ compatible con el primer enunciado es precisamente el que acabamos de hallar, a saber:

$$\delta = \delta(a, \epsilon) = \frac{|a|^2\epsilon}{1 + |a|\epsilon}.$$

Notemos que cuando a es cercano al origen, $\delta \approx |a|^2\epsilon$, lo que muestra cómo disminuye δ cuando a se acerca al origen.

Pasando al segundo enunciado, supongamos que z y w satisfacen las condiciones

$$|z - a| \leq \delta \text{ y } |w - b| \leq \delta\,.$$

Entonces tendremos:

$$|zw - ab| = |(z - a)(w - b) + a(w - b) + b(z - a)|$$

$$\leq \delta^2 + |a|\delta + |b|\delta = \delta^2 + 2\varrho\delta,$$

donde, por conveniencia, hemos escrito $\varrho = \frac{1}{2}(|a| + |b|)$.

Probemos ahora que el máximo de $|zw - ab|$ en las condiciones establecidas es, precisamente, $\delta^2+2\varrho\delta$. Para demostrarlo basta escribir los números complejos a y b en forma polar:

$$a = |a|e^{i\alpha}, \qquad b = |b|e^{i\beta},$$

y elegir z y w de modo que se cumplan las relaciones:

$$z - a = \delta e^{i\alpha}, \qquad w - b = \delta e^{i\beta}.$$

Para los alumnos no familiarizados con la relación de Euler: $e^{it} = cos\,t + i\,sen\,t$, bastaría substituir $e^{i\alpha}$ y $e^{i\beta}$ por las respectivas expresiones binómicas.

Vemos así que el máximo valor de δ compatible con el segundo enunciado es el que verifica $\delta^2 + 2\varrho\delta = \epsilon$, de donde:

$$\delta = \delta(a, b, \epsilon) = \sqrt{\varrho^2 + \epsilon} - \varrho = \frac{\epsilon}{\varrho + \sqrt{\varrho^2 + \epsilon}}.$$

Notemos que cuando (a, b) es un punto alejado del origen, es decir, cuando el valor de ϱ es grande, se cumple:

$$\varrho \approx \frac{\epsilon}{2\varrho} = \frac{\epsilon}{|a| + |b|}.$$

Por motivos históricos nos parece útil cerrar esta nota con el enunciado usado por Dedekind para definir la continuidad de las operaciones aritméticas:

"Si el número λ es el resultado de una operación realizada con los números $\alpha, \beta, \gamma, ...$, y γ yace en el intervalo L, entonces existen intervalos $A, B, C, ...$ en los que yacen los números $\alpha, \beta, \gamma, ...$, tales que el resultado de la misma operación en la que los números $\alpha, \beta, \gamma, ...$ son reemplazados por números arbitrarios de los intervalos $A, B, C, ...$, es siempre un número del intervalo L".