Problemas y Soluciones

Coordinador: Leandro R. Cagliero

Invitamos a los lectores a proponer nuevos problemas para compartir y a enviar soluciones. Los problemas propuestos deben ser acompañados de una solución y de cualquier comentario que crean apropiado.

Los problemas y soluciones pueden ser enviados por correo a la dirección de la REM o preferentemente por correo electrónico a revm@mate.uncor.edu en un archivo de algún procesador de textos.

Problemas propuestos

Sistemas de numeración.

Problema 1. En este problema p es un número natural mayor que 1 que usamos para escribir los números en base p. La pregunta es la siguiente: ¿para qué números p existe un número de dos cifras x, con cifras a y b (escrito en base p), tal que $2x$ también es de dos cifras pero con cifras b y a? Para esos p determinar el x.

Soluciones Enviadas

Cuadrados en un paralelogramo.

Solución enviada al Problema 1 del Vol 23.2 por la Lic. María I. Viggiani Rocha. Universidad Nacional de Tucumán.
Sea P un paralelogramo. Sean E_1, E_2, E_3 y E_4 los cuatro cuadrados externos trazados sobre cada uno de los lados de P; y sean I_1, I_2, I_3 y I_4 los cuatro cuadrados internos trazados sobre cada uno de los lados de P.

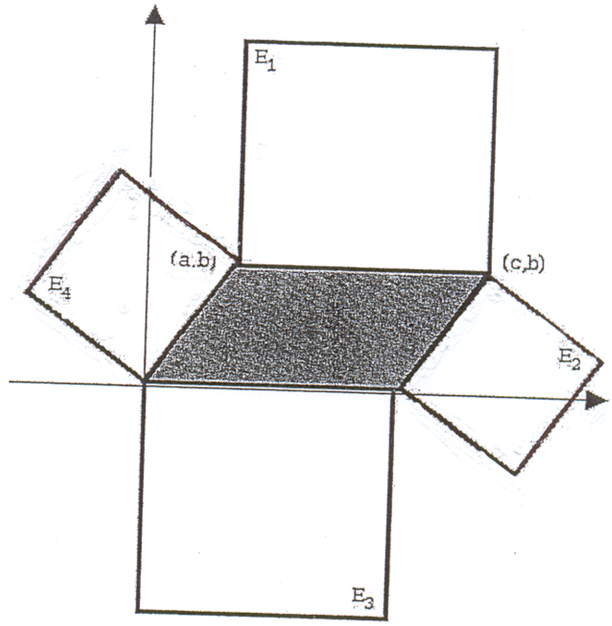
1. Demostrar que los centros de E_1, E_2, E_3 y E_4 forman un cuadrado, que llamamos C_E.

2. Demostrar que los centros de I_1, I_2, I_3 y I_4 también forman un cuadrado, que llamamos C_I.

3. Demostrar que
$$\text{área}(C_E) - \text{área}(C_I) = 2\,\text{área}(P).$$

Solución

1) Sin perder generalidad, ubicamos nuestro paralelogramo como muestra la siguiente figura:



Dado un cuadrado A, llamaremos C_A al centro del cuadrado A. Calculamos ahora las coordenadas de los centros de los cuadrados E_1, E_2, E_3 y E_4. Obtenemos:

$$C_{E_1} = \left(\tfrac{a+c}{2}, b + \tfrac{c-a}{2}\right),\ C_{E_2} = \left(c + \tfrac{b-a}{2}, \tfrac{b-a}{2}\right),$$

$$C_{E_3} = \left(\tfrac{c-a}{2}, \tfrac{a-c}{2}\right) \text{ y } C_{E_4} = \left(\tfrac{a-b}{2}, \tfrac{a+b}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$\overline{C_{E_1}\,C_{E_2}} = \overline{C_{E_2}\,C_{E_3}} = \overline{C_{E_3}\,C_{E_4}} = \overline{C_{E_4}\,C_{E_1}} = \sqrt{(\tfrac{b+c}{2})^2 + (a - \tfrac{b+c}{2})^2},$$

es decir que los 4 lados son iguales. Pero esto no basta, debemos probar además que los 4 ángulos son rectos.

Recordemos que la pendiente de una recta que pasa por 2 puntos es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, por lo tanto las pendientes de las rectas que forman los lados serán

$$m_{\overline{C_{E_1}C_{E_2}}} = m_{\overline{C_{E_3}C_{E_4}}} = \frac{b+c}{2a-b-c}$$

y

$$m_{\overline{C_{E_2}C_{E_3}}} = m_{\overline{C_{E_4}C_{E_1}}} = \frac{2a-b-c}{c-b}.$$

Así se obtiene que

$$m_{\overline{C_{E_1}C_{E_2}}} m_{\overline{C_{E_2}C_{E_3}}} = m_{\overline{C_{E_2}C_{E_3}}} m_{\overline{C_{E_3}C_{E_4}}} = -1$$

lo cual nos dice que los 4 ángulos son ángulos rectos pues las rectas que contienen a los lados se cortan perpendicularmente. Con esto queda probado que C_E es un cuadrado.

2) Se puede demostrar en forma análoga.
3) El área del paralelogramos es P

$$\text{área}\,(P) = (c-a)b = cb - ab.$$

Las áreas de los cuadrados C_E y C_I son respectivamente

$$\text{área}\,(C_E) = \left(\tfrac{b+c}{2}\right)^2 + \left(a - \tfrac{b+c}{2}\right)^2 = \tfrac{b^2+c^2}{2} + a^2 + b\,c - a\,b - a\,c$$

y

$$\text{área}\,(C_I) = \left(a - \tfrac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{b-c}{2}\right)^2 = \tfrac{b^2+c^2}{2} + a^2 - b\,c + a\,b - a\,c.$$

Por lo tanto

$$\text{área}\,(C_E) - \text{área}\,(C_I) = 2\,b\,c - 2\,a\,b = 2\ \text{área}\,(P),$$

que es lo que queríamos probar.