Tres Civilizaciones. Tres Numeraciones

V. Y. González – S. R. Simondi

Introducción

En este trabajo estudiaremos los sistemas de numeración de diferentes civilizaciones del mundo antiguo y conoceremos cómo, a través de ellos, resolvían algunos de los problemas que se les presentaban a diario. Comenzaremos nuestro recorrido en la prehistoria, veremos cómo surgen naturalmente los primeros sistemas numéricos y como los problemas cotidianos, a los que se enfrentaban los hombres de aquella época, los vuelven cada vez más complejos. Luego, analizaremos tres civilizaciones que desarrollaron sistemas numéricos totalmente diferentes: los egipcios con sus jeroglíficos, los babilónicos con su sistema sexagesimal y los mayas con su sistema vigesimal. Trataremos de entender su manera de representar los números y como operaban aritméticamente con ellos. El objetivo principal es invitarlos por unos momentos a viajar en el tiempo y razonar como lo hacían los sabios de estas diferentes culturas para resolver problemas de su época, equipados tan sólo con las herramientas con las que ellos contaban. Creemos que esta es una buena manera de experimentar sus avances y logros; como así también, descubrir sus limitaciones.

La prehistoria y el surgimiento de la escritura

La necesidad de contar y medir ha acompañado al hombre desde la prehistoria. La causa para que el ser humano emprendiera sus pasos en el “contar” surgió fundamentalmente de la necesidad de adaptarse al medio ambiente, proteger sus bienes y distinguir los ciclos de la naturaleza, pues desde tiempos inmemorables los seres humanos percibían y observaban con cuidado los ritmos que ésta posee, su fina relación con las oportunidades de alimentación y, en general, con la conservación de la vida. Como es natural, en un principio se utilizaron los dedos para contar. A medida que se necesitaba recordar cifras más grandes se comenzó a utilizar piedras y marcas en una madera. Por ejemplo un pastor en la antigüedad metía una piedra en una alforja por cada animal que salía a pastar al campo; al terminar la jornada y encerrar su majada, iría sacando las piedras una a una a medida que cada animal entraba al corral, si coincidían la cantidad de piedra con la cantidad de ovejas, todo estaba bien, sin embargo si sobraba alguna piedra quería decir que faltaba alguna oveja. Así, el pastor se aseguraba de mantener su rebaño. De esta manera, comparando cantidades, es como el hombre comenzó a construir el concepto de número, y su forma de representación fue cambiando a expresiones mas sencillas a medida que las cantidades se iban incrementando.

Las principales civilizaciones de la humanidad, tales como egipcia, sumeria, babilonia entre otras, adoptaron la costumbre de anotar los primeros nueve números naturales mediante la repetición de trazos verticales, círculos u otros símbolos análogos con lo que representaban la unidad en línea recta tantas veces como era necesario, así

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pronto abandonaron este principio de numeración, dado que como podemos observar, para números mayores que cuatro, el uso de series de signos idénticos se presta rápidamente a confusión. Para superar esta dificultad, los egipcios y los cretenses, por ejemplo, comenzaron a agrupar sus cifras unidades según el siguiente principio de desdoblamiento,

I	II	III	IIII	III II	III III	IIII III	IIII IIII	IIIII IIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

En cambio los babilonios y los fenicios recurrieron a un desdoblamiento ternario

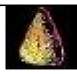
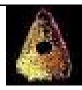
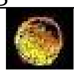
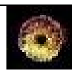
I	II	III	III I	III II	III III	III III I	III III II	III III III
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Otros pueblos, como los antiguos romanos, utilizaron un signo especial para el número cinco, seguramente motivado por la cantidad de dedos de una mano, para crear un nuevo sistema de desdoblamiento quinario,

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Con el paso del tiempo, el hombre dejó de vivir en pequeñas comunidades y de extraer de la naturaleza lo que necesitaban. El desarrollo de la artesanía y la cultura, sumado a la desigualdad de la distribución de los recursos naturales originó el nacimiento de la economía. El primer tipo de intercambio transacción comercial fue el trueque, mediante el cual los productos se intercambiaban directamente. Con la intensificación de estas transacciones así como de las comunicaciones, ésta práctica se volvió infructuosa, debido a que las mercancías no se podían intercambiar según la usanza de cada población o individuo y fue necesaria la creación de un sistema de unidades o patrones básicos. En un principio se eligieron objetos o materiales tan disímiles como barras de sal, té en polvo, bolas de tabaco o dientes de elefantes para realizar los intercambios. Sin embargo, el intercambio a través de patrones trajo consigo nuevos problemas; si en un intercambio se utilizaban dos grupos de patrones monetarios distintos sobre diferentes mercancías, el paso de un valor a otro pronto se hizo muy complejo y engorroso. Por lo que surgió nuevamente la necesidad de encontrar patrones con los que todo el mundo pudiera operar de una manera sencilla. Con el descubrimiento de los metales, poco a poco se fue tomando conciencia que los cuerpos metálicos eran ideales para cumplir con la función de patrón monetario para el

intercambio. Comenzaron transformando el metal en utensilios, armas o adornos y bajo este aspecto sirvieron como patrones de valor. Gradualmente la mayoría de las transacciones comerciales se realizaron a través de esta “moneda de cambio metálica” y las diferentes mercancías fueron evaluadas cuantitativamente por el peso según una especie de patrón de algún tipo de metal. Esto trajo aparejado una cantidad cada vez más creciente de operaciones matemáticas asociadas al comercio y la necesidad inminente de hallar un sistema numérico capaz de representar la mayor cantidad de números con la menor cantidad posible de símbolos con los cuales sea sencillo operar. Como lo afirma George Ifrah en su libro “Las cifras. Historia de una gran invención”, todo empezó hace más de cinco mil años, con la invención de la base. La base diez ha sido la más difundida a lo largo de la historia y su adopción es hoy en día universal, pero como veremos no ha sido la única utilizada por las distintas civilizaciones.
Palos y piedras siguieron siendo útiles luego que el hombre adquiriera el uso de bases, por ejemplo, se utilizaba palitos para representar las unidades, pequeñas piedras para la decena y piedras medianas para la centena y así sucesivamente. Para representar los números intermedios sólo utilizaban tantas piedras y palos como fueran necesarios, por ejemplo para el número 231 necesitaban dos piedras medianas, tres pequeñas y un palo. Éste era un método práctico pero engorroso dado que no es sencillo encontrar piedras de tamaño y formas regulares de manera tal que no se presten a confusión. El sistema se fue perfeccionando utilizando piezas de diferentes tamaños y formas modeladas en arcilla, por ejemplo pequeños conos o bastoncillos para representar las unidades de primer orden, bolas para las de segundo orden, discos o conos grandes para las de tercer orden. Estas fichas de arcillas llamadas *calculis* fueron halladas en diversos yacimientos arqueológicos a lo largo de todo el mundo. En la región de la actual Irak, aproximadamente en el año 3500 a. C. se desarrolló la prospera civilización Sumeria que utilizaba éste método. Ellos contaban en base sexagesimal, con la decena como unidad auxiliar y representaban los números de la siguiente manera

1	Cono pequeño 
10	Bola 
60	Cono grande 
$600 = 60 \times 10$	Cono grande perforado 
$3600 = 60 \times 60$	Esfera 
$36000 = 3600 \times 10$	Esfera perforada 

Si observamos con detenimiento la tabla anterior, notaremos que tenían una forma abstracta de la multiplicación por 10, realizando una perforación circular en la pieza de arcilla o calculis. Por ejemplo realizar la perforación en el cono grande transforma su valor de 60 a 600. A partir de estos calculis, representaban todos los números enteros, por ejemplo para el 673 tomaban tres conos pequeños, una bola, un cono grande y un cono grande perforado. Es decir

Cuando los ganaderos de la región de Elam de aquellos tiempos, mandaban a sus rebaños a pastar a campos cercanos durante períodos de varios meses, antes de salir el pastor y el propietario del rebaño se presentaban ante un funcionario de la ciudad, para contabilizar el número total de ovejas. Una vez realizado el conteo, el funcionario procedía a fabricar una bola de arcilla hueca dentro de la cual colocaba los calculis que representaba el número total de animales del rebaño. Por ejemplo si el rebaño contaba con 132 animales, el funcionario colocaba un cono pequeño, una bola y dos conos grandes dentro de la bola de arcilla hueca, cerraba la abertura de la bola e imprimía en ella el sello de propietario, del pastor y el suyo para autenticarlo. El funcionario guardaba este "documento" hasta el regreso del pastor, momento en el cual, rompía la bola de arcilla y comprobaba que la cantidad de animales que le devolvía el pastor a su dueño coincidiera con la cifra que representaba los calculis de su interior. Aunque este sistema de contabilidad evitaba fraude por alguna de las partes, resultaba muy incómodo debido que hay que romper la bola de arcilla cada vez que se necesitaba conocer su contenido, por ejemplo para realizar un balance. Los contables concientes de esta dificultad se les ocurrió simbolizar las fichas encerradas en las bolas mediante una serie de incisiones de diferentes formas en la parte externa de cada bola. Alrededor del año 3300 A.C., los sumerios crearon los siguientes símbolos para representar los calculis

1	Cono pequeño	Muesca fina
10	Bola	Pequeña marca circular
60	Cono grande	Muesca gruesa
600	Cono grande perforado	Pequeña marca circular
3600	Esfera	Gran marca circular
36000	Esfera perforada	Gran marca circular provista de otra pequeña

Con la introducción de este nuevo método, ya no era necesario romper la bola para llevar a cabo la comprobación, bastaba con leer la información que figuraba en la superficie del documento. Estas incisiones constituyen el sistema de numeración más

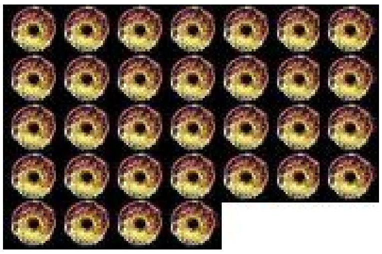
antiguo de la historia del que se tenga conocimiento. Durante cincuentas años se utilizó este doble sistema para representar los números, las fichas dentro de la bola y las incisiones en la arcilla, hasta que tomaron conciencia de que ambos sistemas eran redundantes. Alrededor del año 3250 A.C. comenzaron a suprimir el uso de los calculis y las bolas huecas fueron paulatinamente sustituidas por tabillas de arcilla, dando así el nacimiento de la contabilidad escrita y preparando el terreno para el desarrollo de la escritura propiamente dicha.
Con el paso del tiempo las transacciones económicas y la distribución de bienes de consumo se multiplicaron y diversificaron considerablemente, con lo que se hizo necesario hacer numerosos inventarios y recuentos que se llevaron a cabo a través de incisiones en bolas o en tablillas de arcillas, muchas de las cuales han sido encontradas en diversos yacimientos arqueológicos. Estos primitivos sistemas de numeración sólo fueron utilizados para memorizar cantidades, pues las operaciones aritméticas de aquella época se realizaban de manera concreta, utilizando los calculis. Para ejemplificar como realizaban los cálculos resolvamos el siguiente problema que se les planteaba a los aspirantes a contable en la ciudad sumeria de Shuruppak alrededor del año 2650 A. C.

*“**Varios** hombres se han repartido **un granero** de cebada habiendo recibido cada uno **7 síla** de cebada. ¿Cuántos hombres hay en ese grupo y cuánta cebada ha quedado después de dicha distribución?*

Aquí la síla y el granero son unidades de capacidad, una síla equivale a 0,842 litros y un granero equivale a 1.152.000 síla. El problema es básicamente dividir el granero en cierto número de personas de manera tal que cada una reciba exactamente 7 síla de cebada y determinar el resto de dicha división. Es decir determinar el número de personas n y el resto r de cebada tal que

$$1.152.000 = n.7 + r\,,$$

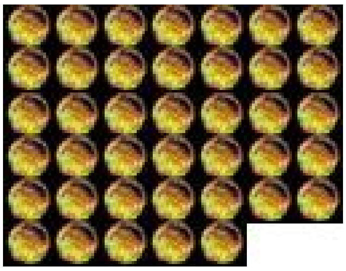
esto es simplemente dividir 1.152.000 por 7, el cociente es el número de hombres y el resto la cebada excedente.
Para realizar esta división los sumerios procedían de la siguiente manera, como $1.152.000 = 32 \times 36.000$, tomaban 32 esferas perforadas, recordemos que cada una de ellas representaba 36.000 unidades, y las distribuían en grupos de siete elementos cada uno



Como el cociente y el resto de esta división es 4, concluían que 4 grupos de 36.000 personas cada uno había recibido sus 7 síla y le quedaban 4×36.000 síla por distribuir pues

$$1.152.000 silas = 36.000\times 32 = 36.000\times(4\times 7+4) = 36.000\times 4\times 7+36.000\times 4$$

Para continuar con la operación, transformaban cada una de las cuatro esferas perforadas sobrantes en diez esferas simples. Procediendo de manera análoga al paso anterior, repartían las 40 esferas simples en grupo de 7 elementos cada uno obteniendo



es decir 5 grupos de 3600 hombres cada uno recibieron sus 7 síla y quedan 5×3600 síla por repartir. Proseguían transformando cada una de las cinco esferas simples del resto en seis conos perforados y repartían nuevamente los 30 conos perforados en grupos de 7 elementos cada uno. Obteniendo 4 grupos de siete conos perforados y dos fichas de esta categoría de resto, lo que significaba que 4 grupos más de 600 personas cada uno habían recibido su parte de cebada. De la misma manera, convertían los dos conos perforados en 10 conos simples cada uno y repartían el total en dos grupos de siete elementos, obteniendo seis conos simples de resto, los cuales a su vez eran transformados en 36 bolas y repartidos nuevamente en cinco grupos de siete y sobrándole una sola bola de resto. Para finalizar, convertían esa bola en diez conos pequeños con valor de la unidad y una vez más los dividían en un grupo de siete elementos sobrando tres conos pequeños o unidades, de esta manera han quedado 3 síla de cebada que ya no es posible distribuir. Haciendo un recuento de la cantidad de personas que obtuvieron las 7 síla de cebada en cada etapa obtenemos que

- 4×36.000 en la primera etapa;
- 5×3.600 en la segunda etapa;
- 4×600 en la tercer etapa;
- 2×60 en la cuarta etapa;
- 5×10 en la quinta etapa
- 1 en la última etapa.

Es decir un total de 164.571 hombres en total recibieron 7 síla cada uno, quedando 3 síla después de realizar dicha distribución. Los datos de éste problema y los resultados de esta división de más de 4600 años ha quedado inmortalizada en una tabilla de arcilla conservada en el Museo Arqueológico de Estambul, escrita en el sistema de marcas y muescas descrito anteriormente.

Los egipcios

Los egipcios nos legaron, a través de sus papiros muchos problemas resueltos, tales como cuestiones de agrimensura, de cálculo de impuestos y de determinación de volumen. En 1858, Henry Rhind, un joven anticuario escocés,

obtuvo en Luxor, un papiro, que decían haber hallado en las ruinas de Tebas. El documento en un principio había sido un rollo de unos 5,5 metros de largo por 33 centímetros de alto, pero estaba roto en dos pedazos y le faltaban algunos fragmentos. Algunos de estos fragmentos aparecieron, medio siglo más tarde, en los archivos de la Historic Society, de Nueva York. Habían sido obtenidos por el coleccionista Edwin Smith. El papiro de Rhind fue adquirido, a la muerte de éste, por el British Museum, donde se conserva en la actualidad. El rollo consiste en un manual práctico de matemáticas egipcias, escrito hacia el 1700 a. C. y sigue siendo en la actualidad una de las principales fuentes de conocimientos acerca de cómo contaban, calculaban y medían los egipcios.
Está escrito en hiératico (forma cursiva del jeroglífico) y contiene unos 85 problemas concretos de los que se da la solución completa, aunque no siempre es fácil deducir

como se llegó a ella. La mayoría de ellos son problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita, incluyendo casos de proporcionalidad y regla de tres simple, por ejemplo

- Calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19.
- Dividir 700 hogazas de pan entre cuatro personas de tal manera que las cantidades que reciba cada uno sean proporcionales a 2/3, 1/2, 1/3, 1/4.

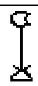
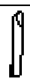
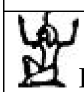
Observemos que el primer problema se trata de un problema algebraico, dado que a la incógnita se la denomina “montón” y no hace referencia a ningún objeto concreto lo que demuestra un gran avance en la abstracción en el planteo.

Contiene además problemas más complejos tales como

- *Si tomamos una cierta cantidad tres veces y le añadimos 1/3 y 1/5 de dicha cantidad, obtenemos su cuadrado, ¿qué cantidad es?*

- *Hay 7 casas, en cada casa 7 gatos, cada gato come 7 ratones, cada ratón se habría comido 7 espigas, cada espiga habría producido 7 medidas de grano. ¿Cuántas medidas de grano se han salvado comido?*

Los egipcios utilizaban dos sistemas distintos de numeración, uno jeroglífico y uno hierático. Los jeroglíficos que representaban los números son

|	1
I	10
 Espiral o serpentina	100
 Flor de loto	1.000
 Dedo señalando	10.000
 Renacuajo	100.000
 Hombre asombrado	1.000.000 o infinito

Combinando estos símbolos de izquierda a derecha, representaban los números intermedios, por ejemplo el número 32 se escribe $||\,\mathbf{I}\;\mathbf{I}\;\mathbf{I}$.

Realizaban la suma como lo hacemos en la actualidad, unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas y así sucesivamente, teniendo en cuenta que diez unidades forman una decena, diez decenas una centena, etc. Por ejemplo

$$21+13=|\,\mathbf{I}\;\mathbf{I}+|||\,\mathbf{I}=||||\,\mathbf{I}\;\mathbf{I}\;\mathbf{I}=34$$

La resta era análoga a la suma,

$$32-11=||\,\mathbf{I}\;\mathbf{I}\;\mathbf{I}-|\,\mathbf{I}=|\,\mathbf{I}\,\mathbf{I}=21$$

En cuanto a la notación, en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas  andando en dirección de la escritura para representar la suma y en dirección invertida  para representar la resta.

Como los egipcios manejaban un sistema de base 10, multiplicar por 10 es muy sencillo dado que basta con cambiar el símbolo correspondiente, así

$$10.3=10(|||)=\mathbf{I}\;\mathbf{I}\;\mathbf{I}\,.$$

El método que utilizaban para multiplicar dos números arbitrarios se reducía a sumar y multiplicar por 2. Por ejemplo para multiplicar 7 por 12 procedían de la siguiente manera, enfrentaban dos columnas una que comenzara con 1 y la otra con 12 y comenzaban a duplicar los valores en cada columna hasta obtener en la primera columna los números cuya suma sea 7

1	12
2	24
4	48

y luego sumaban los números correspondientes a esta descomposición que se encuentran en la segunda columna,

$7=1+2+4$	$48+24+12=84$

Si describimos este proceso con la notación actual obtenemos que

$$7.12=(1+2+3).12=1.12+2.12+3.12=12+24+48=84$$

Notoriamente los egipcios conocían el hecho de que cualquier número natural puede ser descompuesto como suma de potencias de dos y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

El método que utilizaban para dividir es exactamente el inverso al que utilizaban para multiplicar. Por ejemplo para dividir 78 por 6 procedían de la misma manera que para multiplicar, enfrentaban dos columnas una que comenzara con 1 y la otra con 6 y duplicaban los valores de cada columna hasta obtener en la segunda columna los números cuya suma es 78

1	6
2	12
4	24
8	48

y luego sumaban los números correspondientes a esta descomposición que se encuentran en la primera columna,

1+4+8=13	$78 = 6 + 24 + 48$

Entonces el resultado es 13. Si describimos este proceso en la notación actual obtenemos que

$$78 = 48 + 24 + 6 = 6.1 + 6.4 + 6.8 = 6(1 + 4 + 8) = 6.13$$

El método empleado por los escribas para operar con fracciones es de lo más llamativo. Toda fracción se escribía como suma de fracciones unitarias distintas, es decir, en suma de fracciones cuyo numerado es 1. Por ejemplo al $\frac{5}{6}$ lo escribían como $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ y al $\frac{2}{5}$ como $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ y no como $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$. Para representar las fracciones utilizaban el símbolo , que en hierática se convirtió en un punto, y que significaba "parte". Cuando se quería escribir un valor fraccionario, se representaba el símbolo anterior seguido por el valor numérico del denominador. Por ejemplo, ||| $\overset{\text{O}}{\mathbf{I}}$ **I** representa el $\frac{1}{23}$ y se traduce literalmente *"parte 23"*. Las únicas excepciones que se expresaban diferentes eran $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ que se representaban por , ,  y , respectivamente.

El símbolo de la suma tal como lo acabamos de escribir no se empleaba y las fracciones aparecían en forma sucesiva. Así el $\frac{5}{6}$ se representaba por $\overset{\circ}{||}\ \overset{\circ}{|||}$, es decir $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ en vez de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

Para resolver el problema

"Calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19."

Que escrito en notación actual es sencillamente es resolver la ecuación de primer grado

$$x+\frac{x}{7}=19$$

el escriba Ahames emplea el método de "regula falsi" o regla de la falsa posición, que consiste en calcular el valor de la incógnita a partir de un valor estimado. En éste caso en particular el autor comienza con un valor estimado de 7 y calcula $7+7.\frac{1}{7}=8$. Entonces para averiguar el valor de la incógnita debe encontrar un número m, tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 19, es decir hay que calcular $\frac{19}{8}$. El valor de la incógnita será $7m$. Busquemos el valor de m

$\frac{1}{8}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	4
1	8
2	16

Como $19=16+2+1$ entonces $m=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{19}{8}$. Este es el valor que hay multiplicar por 7 para obtener el valor de la incógnita

1	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
2	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
4	$9+\frac{1}{2}$

Como $7=4+2+1$ entonces el valor buscado es

$$\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(9+\frac{1}{2}\right)=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

Para resolver el problema

"Dividir 700 hogazas de pan entre cuatro personas de tal manera que las cantidades que reciba cada una sean proporcionales a 2/3, 1/2, 1/3, 1/4."

Amhes primero sumaba las cuatro proporciones, cuyo resultado en fracciones unitarias es $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Calculaba su recíproco, a través de un método que requería una gran cantidad de operaciones de multiplicaciones y de restas de fracciones, mucho más complejo de los que utilizamos actualmente, en fracciones unitarias es $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$. De ahí el cociente de 700 por la suma de los números proporcionales, que en este caso es 400. Para finalizar el problema multiplica las proporciones por 400 y obtenía el resultado buscado

$$400\frac{2}{3}=266+\frac{2}{3}$$

$$400\frac{1}{2}=200$$

$$400\frac{1}{3}=133+\frac{1}{3}$$

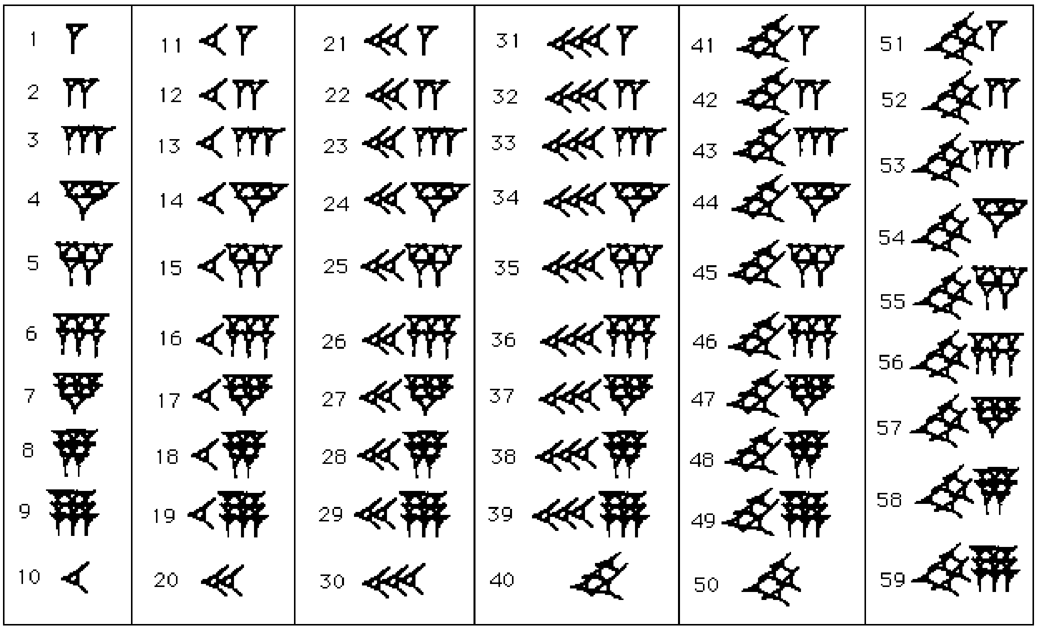
$$400\frac{1}{4}=100$$

Así, las cantidades de hogazas recibidas por las personas son $266+\frac{2}{3}$, 200, $133+\frac{1}{3}$ y 100, respectivamente.

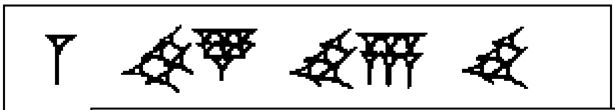
Los Babilonios

Los Babilonios invadieron la región Mesopotamia, delimitada por los ríos Éufrates y Tigris derrotando a los Sumerios y estableciendo su capital en Babilonia alrededor del año 1900 a.C. De los Sumerios, los babilónicos heredaron una forma abstracta de escritura basada en símbolos con formas de cuña o cuneiformes. Esta forma se debe a que estos símbolos se escribían con un punzón sobre tabletas de arcilla húmeda que se cocían al sol. Miles de ellas han sobrevivido hasta nuestros días. También heredaron un rudimentario sistema numérico sexagesimal, es decir de base 60, que perfeccionaron, transformándolo en un sistema posicional, análogo a nuestro sistema decimal.

Si bien para representar nuestro sistema decimal necesitamos 10 símbolos distintos los Babilónicos no necesitaban 60 símbolos para representar su sistema sexagesimal, necesitaban sólo dos. Esto es así porque cada uno de los 59 números que van en cada posición se construye con un símbolo de unidades y otro de decenas.
Estos son los 59 símbolos construidos con estos dos símbolos



El sistema posicional sexagesimal babilónico ordenaba los números de la misma forma que la convención actual, es decir, la posición del extremo de la derecha es para las unidades hasta 59, la siguiente hacia la izquierda representa $60 \times n$ con $1 \leq n \leq 59$ y así sucesivamente. Por ejemplo el número



$$1.60^3 + 57.60^2 + 46.60 + 40 = 424.000$$

Si observamos la tabla anterior notaremos que los Babilónicos no tenían ningún símbolo para representar al número cero, por lo que el símbolo  representaba al número 1 y al 60 al mismo tiempo, se supone que el contexto donde se escribía un número aclaraba de qué número se trataba.
Los Babilónicos utilizaban un sistema de fracciones sexagesimales, similar a nuestras fracciones decimales. Por ejemplo: la fracción sexagesimal $0,25$ representa a
$2.\dfrac{1}{60} + 5.\dfrac{1}{60^2}$ que en nuestra notación es $\dfrac{5}{144}$.
Una ventaja del sistema sexagesimal de los Babilonios con respecto al decimal es que, como 60 es divisible por los factores primos 2, 3 y 5, una fracción irreducible de la forma $\dfrac{a}{b}$, puede representarse con una cantidad finita de dígito, y solo si, b no tiene divisores primos distintos de 2, 3 y 5. Mientras que en el sistema decimal sólo pueden representarse con una cantidad finita de dígitos si, y sólo si b no tiene divisores primos distintos de 2 y 5. Por ejemplo la fracción $\dfrac{1}{30}$ en el sistema sexagesimal se representa por $0,2$ pues $\dfrac{1}{30} = \dfrac{2}{60} = 2.60^{-1}$, mientras que en nuestro sistema tiene una representación decimal periódica infinita, es decir $0,033\overset{\frown}{3}$. Como muestra éste ejemplo hay más fracciones que pueden representarse como fracciones sexagesimales finitas que como fracciones decimales finitas.

Para realizar operaciones con los números, los babilónicos construyeron tablas. Dos tabletas halladas en Senkerah en el Éufrates en 1854 datan de 2000 a. C. proporcionan los cuadrados de los números hasta el 59 y los cubos de los números hasta el 32. Para multiplicar, utilizaban las siguientes fórmulas

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \quad \text{y} \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

que muestran que todo lo necesario para multiplicar dos números es una tabla de cuadrados. Y para dividir se basaban en que

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

que muestra que sólo era necesaria tener una tabla de inversos para realizar cualquier división. Aún se conservan varias tablas de inversos que alcanzan números hasta varios miles de millones.

A través de estos métodos de multiplicación y división los babilonios podían resolver ecuaciones lineales $ax = b$. Por ejemplo

Supongamos, que tomamos $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de una cierta "cantidad" de cebada, se añaden 100 unidades de cebada y se restaura la "cantidad" original. El problema propuesto por el escriba consiste en hallar la "cantidad" de cebada.

Si transcribimos a caracteres modernos los números, donde el punto y coma representa la separación entre la parte entera y la fraccionaria y las comas se utilizan para separar las sucesivas posiciones sexagesimales, la solución dada por el escriba consiste en calcular 0;40 por 0;40 para obtener 0;26,40. Restar esto de 1;00 para obtener 0;33,20. Buscar el inverso de 0;33,20 en una tabla, lo que resulta en 1;48. Multiplicar 1;48 por 1,40 para obtener la respuesta 3,0.

No es tan fácil entender el razonamiento del escriba a menos que los traduzcamos a la notación algebraica moderna. Si x representa la "cantidad" de cebada y planteamos el problema en notación actual tenemos que

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} x + 100 = x$$

si resolvemos la ecuación obtenemos

$$\frac{4}{9}x+100=x$$

$$100=x-\frac{4}{9}x$$

$$100=\frac{5}{9}x$$

$$100\cdot\frac{9}{5}=x$$

$$180=x$$

Analicemos ahora la solución que plantea el escriba, llevando a nuestro sistema decimal los cálculos realizado por el mismo, primero eleva $0;40=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$ al cuadrado obteniendo $0;26,40=\frac{26}{60}+\frac{40}{60^2}=\frac{4}{9}$. Resta esto a uno, obtiene $0;33,20=\frac{33}{60}+\frac{20}{60^2}=\frac{5}{9}=1-\frac{4}{9}$, invierte éste número $1;48=1+\frac{48}{60}=\frac{9}{5}$ y por último multiplica éste número por $1,40=1.60+40=100$ obteniendo la respuesta $3,0=3.60=180$. Sorprendentemente la solución planteada por el escriba babilonio y la nuestra son idénticas.

Por otra parte, los babilónicos resolvían problemas geométricos con ecuaciones de segundo grado, no sólo a través del método de falsa posición, sino también utilizando el método de la resolvente, tal cual como se utiliza hoy. Sólo consideraban ecuaciones de segundo grado del tipo

$x^2+bx=c$ y $x^2-bx=c$

donde b y c son números positivos no necesariamente enteros. Y sus soluciones eran

$x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$ y $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{b}{2}$ respectivamente. Notemos que en ambos casos conocían la sólo la raíz positiva de la ecuación cuadrática, pues es la que tenía sentido en la solución a problemas reales concretos.

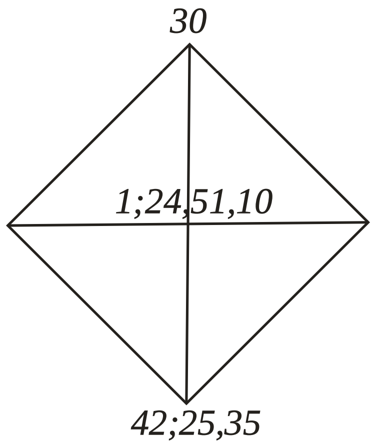
Veamos un ejemplo de un problema resuelto por el método de Regula Falsi.

“Multiplicado el largo por el ancho he obtenido un área de 600. He multiplicado por sí misma la diferencia entre el lago y el ancho, y ese resultado multiplicado por 9 da una superficie equivalente al cuadrado del largo. ¿Cuáles son el largo y el ancho?”
La solución babilónica es la siguiente: “La raíz de 9 es 3, toma 3 como el largo, entonces el ancho será 2. El producto de de 3 por 2 es 6. Divide 600 por 6, obtendrás 100. La raíz de 100 es 10; como se tomó 3 para el largo, éste será 10 por 3 es decir 30 y por lo tanto el ancho será 20.”

Mucho antes de que en Grecia se enunciara el célebre Teorema de Pitágoras, los babilonios ya estaban familiarizados con éste resultado. En el Museo Británico se conserva una tableta de arcilla que dice lo siguiente

4 es el largo y 5 la diagonal. ¿Cuál es el ancho?
Su tamaño es desconocido.
4 veces 4 es 16.
5 veces 5 es 25.
Restas 16 de 25 y quedan 9.
¿Cuántas veces cuánto debo tomar para obtener 9?
3 veces 3 es 9.

En la tablilla YBC 7289, conservada en la Universidad de Yale fechada hacia 1600 a.C.



hay dibujado un cuadrado y los triángulos rectángulos resultantes de trazar las diagonales. En la diagonal horizontal aparece un número que al transcribirlo en caracteres modernos se expresaría en la forma: 1;24,51,10, donde el punto y coma representa la separación entre la parte entera y la fraccionaria y las comas se utilizan para separar las sucesivas posiciones sexagesimales. Si escribimos éste número en nuestro sistema decimal, obtenemos

$$1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414212963\ldots \approx \sqrt{2}$$

una aproximación sorprendente de valor de $\sqrt{2}$ con 6 dígitos correcto.

En la parte superior de la tablilla aparece el número 30 y en la parte inferior $42;25,35$ que en sistema decimal es $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} \approx 42,4263889$, y es una excelente aproximación del valor de la diagonal del cuadrado de lado 30. Pues si d es el valor de la diagonal del cuadrado de lado 30, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $30^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2}$ es decir $d = \sqrt{2}.30 \approx 42,42640686$.

Esta tabilla es en efecto una aplicación del Teorema de Pitágoras.

Además, los babilonios construyeron tablas para $n^3 + n^2$, a través de las cuales resolvían algunas ecuaciones cúbicas, como por ejemplo

$$ax^3 + bx^2 = c.$$

Para ello multiplicaban la ecuación por a^2 y la dividían por b^3

$$\frac{a^2}{b^3}\left(ax^3 + bx^2\right) = \frac{a^2}{b^3}c$$

trasformando la ecuación en

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ac}{b}$$

tomando $n = \frac{ax}{b}$ y reemplazando obtenemos

$$n^3 + n^2 = \frac{ac}{b}$$

luego buscaban en la tabla el valor de n que satisface esta igualdad, y hallaban la solución de la ecuación inicial calculando

$$x = \frac{n.b}{a}$$

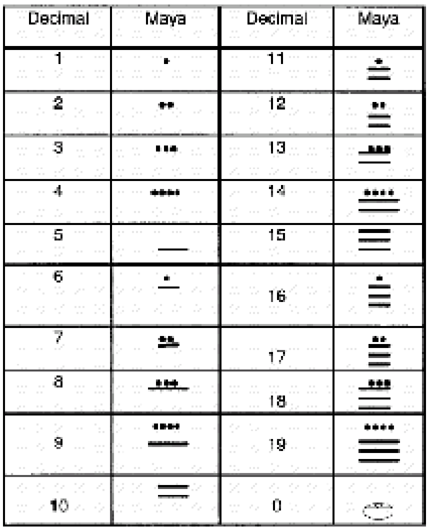
nuevamente utilizando tablas para realizar el producto y la división.

Este procedimiento para resolver la ecuación cúbica original parece bastante sencillo si lo escribimos con la notación actual, pero recordemos que en aquella época no existía nada ninguna representación simbólica, lo que complicaba enormemente este la resolución de la misma.

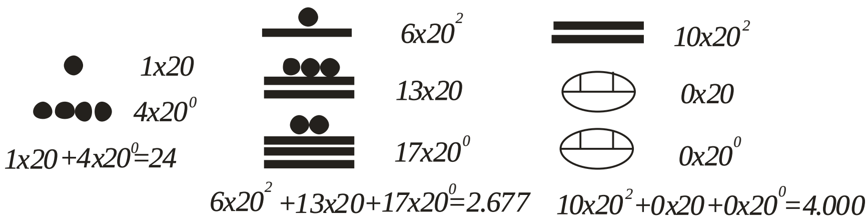
La tableta de arcilla BM 85200+, contiene 36 problemas relacionados con el cálculo del volumen excavaciones rectangulares y es el primer intento conocido de plantear y resolver ecuaciones cúbicas.

Los Mayas

En América Central, se desarrolló la civilización maya, durante siglos observaron el cielo y las estrellas, lo cual les llevó a tener una medición del tiempo muy exacta y a desarrollar un calendario más preciso que el calendario civil que utilizamos en la actualidad. Desarrollaron un sistema matemático mucho más avanzado que el de los europeos de la época, lo que les permitió realizar cálculos para predecir acontecimientos astronómicos que se siguen cumpliendo. Determinaron el período lunar con tan solo veinticuatro segundos de diferencia con respecto al medido con las tecnologías modernas y nos legaron un calendario con las apariciones de Venus válido para los próximos cuatrocientos años.
Desarrollaron un sistema de numeración posicional de base veinte y utilizaban tres símbolos para representar cualquier número natural, el punto • para la unidad, la raya — para el cinco y el caracol para el cero, que combinaban de la siguiente manera para representar los número del cero al diecinueve.

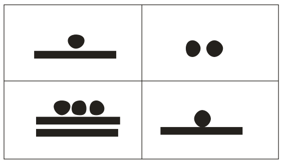


Para números mayores o iguales que veinte, escribían los números compuestos de abajo hacia arriba, esto es, el grado de la potencia de 20 iba creciendo hacia arriba. Por ejemplo



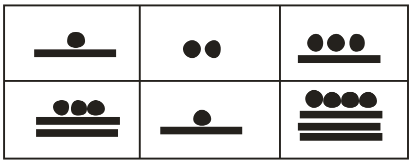
Estudiemos ahora como los mayas realizaban operaciones matemáticas fundamentales: la suma, la resta la multiplicación y la división. Éste método es aplicable a cualquier base, por ejemplo a la base 10 que empleamos en la actualidad.

Para sumar dos números los mayas procedían de la siguiente manera, primero colocaban los números en las columnas de una tabla, uno al lado del otro, haciendo coincidir las posiciones en las filas, por ejemplo para realizar 133+46



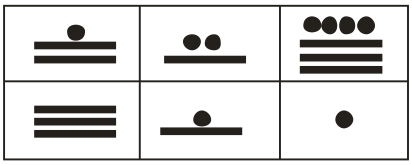
133 46

Luego trasladaban los puntos y las barras de ambos números a una tercera columna, convirtiendo los grupos de cinco puntos en barras y las veintenas completas en unidades del nivel superior inmediato,



133+46=179

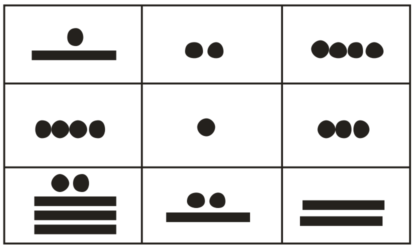
Veamos otro ejemplo



235+146=381

aquí al realizar la suma en la fila inferior completamos la veintena, por lo que transformamos las cinco barras en un punto que agregamos en la fila superior.

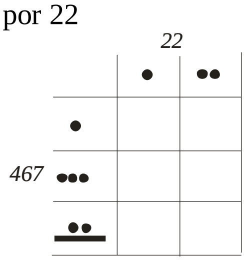
Para realizar la resta de dos números procedían de manera inversa a la suma, colocaban los números por columnas comenzando por el mayor y quitaban de la primera columna tantos elementos como hay en la segunda columna, fila por fila. Por ejemplo si queremos hacer la resta $2497 - 827$



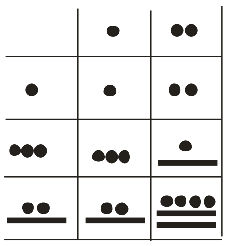
2497-827=1670

Si en una fila el segundo número es mayor que primero hay que sólo hay que convertir una unidad de la siguiente posición del primer número en 20, para poder restar y en la siguiente posición se restará 1 unidad más.

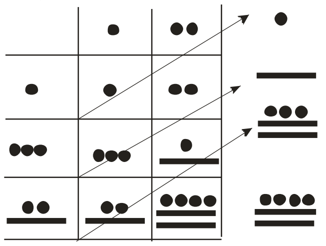
Para realizar el producto de dos números, procedían de la siguiente manera, colocaban los factores por fuera de la tabla, uno de manera vertical y otro de manera horizontal, por ejemplo para multiplicar 467 por 22



Luego reproducían en cada casilla de la tabla la figura que tenemos a la izquierda de la tabla, tantas veces como lo indique el número que figura en la parte superior de la misma,



La casilla inferior derecha corresponde a las unidades y la suma de cada diagonal corresponde a una potencia de 20,

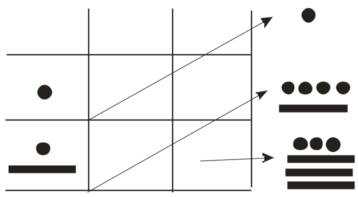


10.274

Recordemos que al realizar la suma debemos transformar cinco puntos en una raya y las veintenas en un punto del nivel inmediato superior.

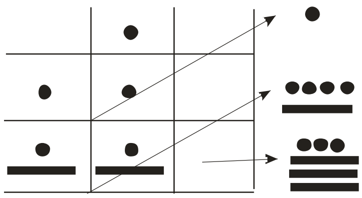
Para la división procedían de manera inversa a la multiplicación, el dividendo se piensa como el producto de dos números donde uno de ellos es el divisor y el otro el cociente. Colocaban el divisor de manera vertical fuera de la tabla y el dividendo en forma que as diagonales de la tabla coincidan con sus posiciones. Por ejemplo para dividir 598 por 26

26



546

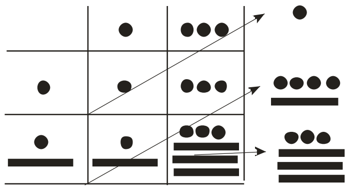
Comenzamos la división tratando de deducir que número deberá ponerse en la parte externa, por arriba de la casilla de la esquina izquierda, para que reproduciendo la primera figura externa de la izquierda tantas veces como el número que estamos buscando, en este caso es sencillo es el número uno, luego completamos toda la columna, (repitiendo las figura de la izquierda tantas veces como el número que encontramos),

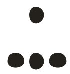


546

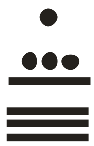
A continuación buscamos el número de veces que se tendrá que repetir la figura de la primer fila de manera tal que al sumar toda la diagonal nos de el número de la segunda posición del 546, en este caso es el número tres, y completamos la columna repitiendo la figura de la izquierda

23



Obteniendo así el resultado en la parte superior de la taba , es decir 23.

Los sacerdotes mayas eran los científicos encargados de las observaciones astronómicas y para expresar el número correspondiente a la fecha usaron un sistema numérico vigesimal modificado. Las cifras que ocupaban el tercer lugar, de abajo hacia arriba se multiplicaba por $360 = 20 \times 18$ y no por $400 = 20^2$ como describimos en el sistema anterior. Por ejemplo el número



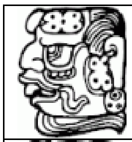
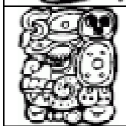
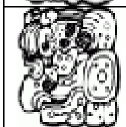
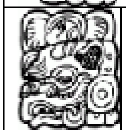
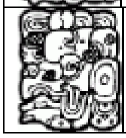
para los sacerdotes representaba el $15 \times 20^0 + 8 \times 20 + 1 \times 360 = 535$ mientras que para la gente común $15 \times 20^0 + 8 \times 20 + 1 \times 20^2 = 675$.

Esta modificación de la tercera posición del sistema maya fue introducida para satisfacer las necesidades del cálculo del tiempo y de las observaciones astronómicas y fue usada exclusivamente por los sacerdotes, mientras que el resto del pueblo utilizaba el sistema vigesimal tal como lo hemos descripto anteriormente. A partir de este sistema irregular los sacerdotes-científicos desarrollaron un calendario en el cual constaban de un año de exactamente 365 días, lo cual significaba un error de un día cada 5000 años, mientras que el calendario Juliano usado en Europa hasta el siglo XVI acumulaba un error de un día cada 128 años y el actual Gregoriano acumula un día de error cada 3257 años.

El *Calendario Maya* es un conjunto de almanaques que cuentan el tiempo de manera deferente pero simultáneamente, La Rueda Calendárica con un ciclo de cincuenta y dos años, el Calendario Sagrado o Tzolkin de 260 días, el Calendario Civil o Haab de 360 días y La Cuenta Larga de 144.000 días. La exactitud de este calendario, se debe a que se basa en una cuenta continua e ininterrumpida de los días - **Kin**, a partir de un día inicial cero, el 13 de agosto de 3114 a.C. y el cual detendrá su cómputo el 21 de diciembre de 2012 d.C., terminando así su ciclo de tiempo y comenzando inmediatamente uno nuevo. Esto ha generado en estos días una gran polémica, diversos documentales y hasta una película de Hollywood sobre el *"fin del mundo"*.

La Rueda Calendárica, como vemos en la imagen es un engranaje que compone el gran reloj Maya, y está compuesto por la combinación de los calendarios **Tzolkin** (260 días) y **Haab** (365 días), esta rueda forma un ciclo de 52 años cristianos, o genera un ciclo mayor de 18.980 días (el mínimo común múltiplo de 260 y 365). La importancia de la Rueda Calendárica consiste en dar seguimiento al tiempo, y establecer fechas.

La Cuenta Larga es el cálculo de la cantidad de días transcurridos a partir de la fecha de la cual los Mayas comenzaron a contar el tiempo. Posee los siguientes ciclos

	**Kin**	**Un día de 24,017 horas**
	**Uinal**	**20 días equivalentes a un mes Maya**
	**Tun**	**18 Uinales o 360=20x18**
	**Katún**	**20 Tunes o 7.200 días**
	**Baktún**	**20 Katunes o 144.000 días**

Estos ciclos son la razón de la modificación del sistema vigesimal por parte de los sacerdotes-astrónomos dado que un Tun equivale a 18 Uinales y no a 20.
El Katún lo utilizaban para registrar hechos históricos importantes y para profetizar sucesos futuros. Por ejemplo, la fecha 9.9.2.4.8, significa que desde comenzó el conteo de esta era han pasado 9: Baktunes, 9 Katunes, 2 Tunes, 4 Uinales y 8 Kines, es decir 1.945.893 días. De aquí es de donde proviene la profecía del fin del mundo que esta tan de moda en la actualidad, dado que el ciclo de esta Era terminará cuando se hayan completado los 13 Baktunes, es decir el 21 de diciembre de 2012. Por suerte ya hemos sobrevivido al final de un ciclo de dos mil años desde el comienzo de nuestra era, que comenzó con el natalicio de Cristo, esperemos que los dioses sigan siendo benévolos con nosotros y nos permitan, una vez más seguir existiendo luego del final de otro ciclo temporal creado por alguna de las civilizaciones que se desarrollaron a lo largo de nuestra historia.

Bibliografía

- Boyer C. *"A History of Mathematics"*. Ed. Wiley.
- Exarchakos, "*Babylonian mathematics and Pythagorean triads"*, Bull. Greek Math. Soc. 37
- Ifrah G. "*Las cifras. Historia de una gran invención*". Ed. Alianza.
- Kline. *"Mathematical thought*". Ed. Oxford.
- López Murrillo "*La Astronomía en América"*.
- Pitts "*Los Números Mayas y el Calendario Maya*".
- Rey Pastor – Babini. "*Historia de la matemática*". Ed. Gedisa.

Instituto de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de Cuyo.
E-mail: ssimondi@uncu.edu.ar, simondi@mate.uncor.edu.