Problemas discretos con valores iniciales

Gustavo Adolfo Juarez – Silvia Inés Navarro

El presente trabajo pretende difundir problemas discretos con valores iniciales (en adelante PVID), a partir de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes y problemas de valores iniciales. Tales problemas tienen como soluciones sucesiones recurrentes, entre ellas, dos tomaron mayor difusión identificadas con los nombres de quienes las estudiaron: Sucesión de Fibonacci y de Lucas. Ambas sucesiones son soluciones de un PVID de segundo orden homogéneo para la misma ecuación, diferenciadas solamente por los dos valores iniciales dados.

Sucesiones Recurrentes

Sea $\{x_n\}$ una ***sucesión de números***, reales o complejos, en donde los términos de tal sucesión los denotamos por $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Si en una sucesión los términos se generan a partir de operaciones algebraicas de los anteriores términos, la sucesión se dice *sucesión recurrente*. Así por ejemplo tenemos las siguientes sucesiones recurrentes.

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{l} 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots \\ 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots \\ 2, 3, 4, 9, 16, 29, 54, \ldots \\ 1, 0, 0, 2, -4, -4, 36, \ldots \end{array} \qquad (1)$$

Que se obtienen respectivamente de las siguientes asignaciones de generación

$$x_{n+1} = x_n + 3$$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad (2)$$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$x_{n+1} = -x_n^2 + 3x_{n-1}^2 + 2x_{n-2}$$

$\blacksquare$

Las sucesiones dadas en (1) se obtienen de la aplicación de la expresión (2) que genera los siguientes términos a partir de los anteriores dados. Por lo que necesitamos también conocer términos iniciales. Obsérvese que las expresiones (2) requieren de uno, dos y tres términos anteriores para generar el siguiente término de cada sucesión.

El proceso de determinar sucesivamente los términos particulares de estas sucesiones se denomina *proceso recurrente*, para ello la forma simbólica de expresar, por ejemplo (2) se llama *forma recurrente.*

Una sucesión recurrente se dice que es de *orden k* si para calcular el siguiente término se requiere de *k* términos anteriores.

En ejemplo 1 las formas recurrentes (2) son de orden uno, dos, tres y tres respectivamente.

Ecuaciones en diferencias

Las formas recurrentes también son generalmente soluciones de *ecuaciones en diferencias finitas*, o *ecuaciones en diferencias*, a secas, y en adelante las indicaremos como EED. Estas ecuaciones tienen como objeto expresar relación entre términos de una sucesión. Resolver una EED significa hallar las sucesiones cuyos términos están relacionados según la ecuación dada.

En general diremos que una EED en una sucesión $\{x_n\}$ es lineal de orden *k* si tiene la forma $a_k(n)x_{n+k} + a_{k-1}(n)x_{n+k-1} + \ldots + a_1(n)x_{n+1} + a_0(n)x_n = R(n)$, donde $a_i(n)$ son los coeficientes de la ecuación, y son funciones de *n*. *L*os coeficientes $a_k(n)$ y $a_0(n)$ son no nulos, esto asegura el orden. Cuando para cada *i*, $a_i(n)$ no depende *n* se dice que la EED es de *coeficientes constantes*.

El segundo miembro de los términos de la sucesión es independiente y en caso de ser nulo la EED se dice *homogénea*, sino *no homogénea*.

Una solución de una EED es una sucesión, pero cabe mencionar que tal sucesión no es única, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Verifique que la sucesión $x_n = 3 \times 5^n$ es una solución de la EED $x_{n+1} - 5x_n = 0$

En efecto reemplazando por la solución sugerida queda

$$x_{n+1} - 5x_n = 3 \cdot 5^{n+1} - 5 \cdot 3 \cdot 5^n = 0$$

Además si tomamos otra sucesión, por ejemplo $x_n = 7 \times 5^n$, también verifica que es solución. Es más, toda sucesión de la forma $x_n = C \times 5^n$, con *C* constante es solución.

■

Resolver una EED lineal de primer orden de coeficientes constantes, es obtener sucesiones, entre las cuales ocurren progresiones aritméticas ó progresiones geométricas. En el siguiente cuadro damos la forma de las soluciones según la EED dada:

EED		Progresión
$x_{n+1} - x_n = b$	$x_n = C + bn$	Aritmética
$x_{n+1} - ax_n = 0$	$x_n = Ca^n$	Geométricas
$x_{n+1} - ax_n = b\,,\quad a \neq 1$	$x_n = Ca^n + \dfrac{b}{1-a}$	Geométrica Modificada

Aquí, C es número real arbitrario.

Para resolver las EED de primer orden no homogéneas puede utilizarse el Método de Coeficientes Indeterminados, que por la brevedad de este trabajo las dejamos de lado, pero que puede consultarse en detalle en [5] y [6].

En cuanto a las EED de *segundo orden lineales con coeficientes constantes homogéneas* tienen la forma $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ con a y b constantes y $b \neq 0$, la búsqueda de la solución es a través de la Ecuación Característica $r^2 + ar + b = 0$. Esta es una ecuación algebraica de segundo grado, cuyas soluciones están dadas por:

$r = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Sean éstas r_1 y r_2. r_1, r_2 pueden ser reales y distintas, reales e iguales o complejas conjugadas, y se denominan las *raíces características de la ecuación*.

La solución general de la EED de segundo orden lineal, es la sucesión que resulta de combinaciones lineales de las potencias *n*-ésimas de las raíces características.

En fórmulas $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$.

Puesto que $r_i^{n+2} + ar_i^{n+1} + br_i^n = r_i^n(r_i^2 + ar_i + b) = 0$. De modo que

$x_n = C_1\, r_1^{\,n} + C_2\, r_2^{\,n}$ es solución de la ecuación $x_{n+1} +$ a $x_{n+1} +$ b$x_n = 0$ para valores arbitrarios de C_1, C_2.

Por otra parte, si $r_1 \neq r_2$ y C_1, C_2 la solución del sistema

$$x_1 = C_1\, r_1 + C_2\, r_2$$

$$x_2 = C_1\, r_1^{\,2} + C_2\, r_2^{\,2}$$

se tiene que

$x_n = C_1\, r_1^{\,n} + C_2\, r_2^{\,n}$ para n = 1, 2, 3, 4, ... En efecto, hacemos inducción en n, $x_1 = C_1\, r_1 + C_2\, r_2$

$x_2 = C_1\, r_1^{\,2} + C_2\, r_2^{\,2}$ por construcción x_{n+2} - a x_{n+1} - bx_n =

= - a ($C_1\, r_1^{\,n+1} + C_2\, r_2^{\,n+1}$) – b ($C_1\, r_1^{\,n} + C_2\, r_2^{\,n}$)

= $C_1\, r_1^{\,n}$ (- a r_1 - b) + $C_2\, r_2^{\,n}$ (- a r_2 - b)

= $C_1\, r_1^{\,n}\; r_1^{\,2} + C_2\, r_2^{\,n}\; r_2^{\,2} = C_1\; r_1^{\,n+2} + C_2\; r_2^{\,n+2}$.

Sean coeficientes arbitrarios C_1, C_2.

Solución general de EED de segundo orden	Raíces características
$x_n = C_1 r_1^{\,n} + C_2 r_2^{\,n}$	Si $r_1 \neq r_2$
$x_n = (C_1 + C_2 n) r^n$	Si $r = r_1 = r_2$
$x_n = r^n \{C_1 \cos(nq) + C_2 sen(nq)\}$	Si $r_1 = \overline{r}_2$ donde r módulo y q argumento de r_1, $r_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Una generalización inmediata permite expresar las soluciones de EED por medio de las raíces características de la ecuación característica asociada.

Problemas con valores iniciales discretos

Para determinar en forma única la sucesión solución de una EED debemos adicionar, tantas condiciones iniciales como indica el orden de la EED. Tal condición junto a la EED forma un problema con valor inicial, que a fin de distinguir la analogía que tienen el desarrollo del tema de las EED con las Ecuaciones Diferenciales, como el lector ya habrá observado, nos permitimos llamar a estos *problemas con valor inicial discretos*, o en forma breve PVID.

Ejemplo 3: Consideremos el siguiente PVID de primer orden $\begin{cases} x_{n+1} - 3x_n = 5 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

La solución general está dada por la sucesión $x_n = C3^n + \dfrac{5}{1-3} = C3^n - \dfrac{5}{2}$

Aplicando ahora la condición inicial dada: $x_0 = C3^0 - \dfrac{5}{2} = C - \dfrac{5}{2} = 2$

Así $C = \dfrac{9}{2}$. Con este valor de C se obtiene la solución particular $x_n = \dfrac{9}{2}3^n - \dfrac{5}{2}$ ■

Ejemplo 4: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID de segundo orden, sea éste

$$\begin{cases} x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

La ecuación característica asociada a la EED dada es $r^2 + 2r - 3 = 0$, y sus raíces características son 1 y -3. Así la solución general de la EED es

$$x_n = C_1 + C_2(-3)^n.$$

Para obtener la solución particular usamos los valores iniciales dados quedando el sistema de dos ecuaciones $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 3C_2 = 3 \end{cases}$

Que se satisface para $C_1 = \frac{3}{2}$ y $C_2 = -\frac{1}{2}$

Con lo cuál la solución del problema de valores iniciales planteadas es la sucesión

$$x_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-3)^n \quad \blacksquare$$

Para determinar una solución particular de una EED lineal de orden k es necesario conocer k valores iniciales de manera que las constantes que contienen la solución general quedan identificadas. Para confirmar este enunciado basta con extender la idea de lo que ocurre para una EED de orden dos.

En efecto, sea un PVID de orden dos, que por simplicidad la tomaremos homogénea:

$$\begin{cases} x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \\ x_0 = A \\ x_1 = B \end{cases}$$

La solución general de la EED del PVID es $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, suponiendo raíces características reales y distintas. Veamos de que manera los valores iniciales determinan de forma única la sucesión, solución.

Haciendo n en la solución general 0 y luego 1, nos queda:

$$x_0 = C_1 r_1^0 + C_2 r_2^0 = C_1 + C_2 = A$$

$$x_1 = C_1 r_1^1 + C_2 r_2^1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 = B$$

O sea dos ecuaciones simultaneas con dos incógnitas C_1, C_2. Estas se expresan en términos de *A* y *B* dados, por lo tanto la solución es:

$$x_n = \frac{-Ar_2 + B}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{Ar_1 - B}{r_1 - r_2} r_2^n$$

Sucesiones de Fibonacci y de Lucas

De las sucesiones recurrentes, dos de ellas son muy reconocidas, además ambas recibieron nombres de quienes las desarrollaron y estudiaron. ¿Pero que tienen estas sucesiones que no tengan las demás? Curiosamente las dos, muy ricas en propiedades y aplicaciones en la matemática pura y aplicada, son soluciones de un PVID de segundo orden. Más aún de la misma EED, solo variando sus valores iniciales, por lo que no debe sorprendernos que al tener la misma expresión generadora, exista mucho en común entre ellas, [4].

Nos referimos a las Sucesiones de Fibonacci y la de Lucas. Ambas se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\ L_0 &= 1 \\ L_1 &= 3 \end{aligned}$$

Podemos generalizar el análisis de estas sucesiones tomando el PVID de la forma:

$$\begin{cases} x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \\ x_0 = A \\ x_1 = B \end{cases}$$

Las raíces características se obtienen de la ecuación característica asociada $r^2 - r + 1 = 0$. Estas son $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La riqueza de estas sucesiones no es solo porque en estas raíces se computan a partir del ***número de oro***, sino por la presencia en innumerables expresiones e identidades dentro de las matemáticas [1], [2] y [3].

Con las raíces características conocidas podemos escribir las sucesiones anteriores en su forma general, esto es usando los valores iniciales correspondientes.

Para la sucesión de Fibonacci resulta $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, expresión que se inmortalizó con el nombre de fórmula de Binet [1]; mientras que para la sucesión de Lucas es $L_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\sqrt{5}-2\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Generalizando, la solución del PVID de segundo orden con valores iniciales A y B es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(B-A)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left[A\sqrt{5} - (B-A)\right]\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Familia de sucesiones como progresiones geométricas de oro.

De las tantas propiedades que podamos citar y que se enumeran en gran cantidad en las referencias citadas, tal vez la vinculación de los Números de Fibonacci, así llamados a los números que forman tal sucesión, con los elementos del Triángulo de Pascal sea la mas conocida. Pero aquí solo enunciaremos la siguiente propiedad que a medida que n crece los elementos de la sucesión crecen con una tasa o razón que tiende al número de oro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ citado arriba como la primera raíz característica.

Para ello basta colocar la sucesión x_n, y aplicar en ella el criterio del cociente, de esta manera queda:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}}{C_1 r_1^n + C_2 r_2^n}$$

Como $r_1 \neq 0$, y $C_1 \neq 0$ dividimos por $C_1 r_1^n$, obteniéndose

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{r_1 + \frac{C_2}{C_1} r_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}{1 + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}$$

Siendo $\left| \frac{r_2}{r_1} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n = 0$. Así el cociente tiende al número de oro.

Esto puede verse como que el comportamiento límite de la sucesión es el de una *progresión geométrica con razón* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Más generalmente, con la misma prueba se obtiene si $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ es la solución de $x_{n+2} + \mathrm{a}\, x_{n+1} + \mathrm{b}\, x_n = 0$ de manera que $C_1 r_1 \neq 0$ y suponiendo se satisface módulo de r_1 mejor que módulo r_2 entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to r_1$.

Si $C_1 = 0$, y $C_2 \ r_2 \neq 0$, se obtiene $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to C_2 \ r_2$.

Referencias

[1] N. N. Vorobyov: Los números de Fibonacci. Editorial Limusa. México.1988.

[2] A. I. Markushévich: Sucesiones Recurrentes. Editorial MIR. Moscú. 1974.

[3] I. S. Sominski: Método de Inducción Matemática. Editorial MIR. Moscú. 1975.

[4] M.I. Viggiani Rocha: La sucesión de Lucas. Revista de Educación Matemática. Volumen 25 N° 3. Año 2010. pps 3-18.

[5] G. A. Juarez, S.I. Navarro: Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones a modelos en Sistemas Dinámicos. Editorial Sarquís. Argentina. 2005.

[6] G. A. Juarez, S.I. Navarro: Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones a modelos en Sistemas Dinámicos. Material Curso para Estudiantes de Matemáticas. Reunión anual UMA 2005.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca.

juarezgustavoadolfo@yahoo.com.ar

silvinafacen@yahoo.com.ar