Caras, aristas y vértices

Juan Sabia

1 Introducción

La idea motivadora de este trabajo fue escribir un texto de matemática que, por un lado, pudiera ser leído directamente por estudiantes de la escuela media bajo la supervisión de sus docentes y, al mismo tiempo, fuese lo más riguroso posible. El tema elegido es un teorema conocido de Euler sobre poliedros convexos que, creemos, puede ser presentado sin conocimientos previos de geometría espacial. Cada docente que decida abordar este texto le imprimirá su propia experiencia de trabajo y avanzará en la forma que le parezca más conveniente, adecuándolo al ritmo de sus alumnos.

Hemos intentado que el trabajo fuese lo más autocontenido posible. En algunas ocasiones nos hemos basado en la intuición para poder avanzar sin tener que usar herramientas demasiado complejas: por ejemplo, hemos asumido que una poligonal cerrada en el plano que no se cruza consigo misma define un "adentro" y un "afuera" o que hay una proyección "suficientemente buena" de un poliedro convexo a un plano sin demostración formal.

A partir de este trabajo, los alumnos podrán buscar información sobre diversos temas relacionados: por ejemplo, sólo para nombrar algunas posibilidades, se podría ahondar en la historia del problema o de los matemáticos involucrados, averiguar distintas clasificaciones de figuras y cuerpos geométricos o buscar generalizaciones o aplicaciones del resultado.

Para comenzar, damos una definición posible de polígonos planos motivando por qué son necesarias las definiciones cuando tratamos con objetos matemáticos. A continuación, definimos polígonos convexos de diversas formas. El tratamiento de los polígonos se hace en forma exhaustiva para ir introduciendo el lenguaje y los métodos que sirven para definir luego poliedros convexos. Finalmente, se enuncia y se da una prueba en tres pasos del teorema de Euler sobre la relación entre los números de caras, aristas y vértices de un poliedro convexo, basada en una demostración de Cauchy.

2 Polígonos

Una definición posible

Todos alguna vez estudiamos, vimos o hablamos de un triángulo, un cuadrilátero o de un pentágono. Todos son polígonos pero, ¿sabemos qué es un polígono? Para escribir esta nota, buscamos definiciones con la intención de ser precisos y encontramos varias que no siempre coincidían. Sólo para comparar, escribimos algunas:

1) Un polígono es una forma plana con lados rectos.

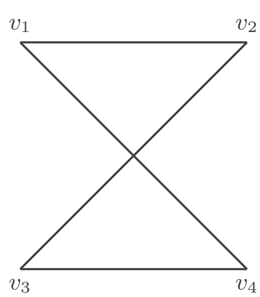
2) Un polígono es una figura plana limitada por tres o más lados que se cortan en pares en el mismo número de vértices y que no se intersecan entre sí en ningún otro punto.

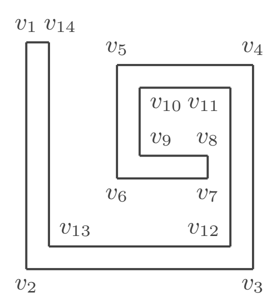
3) Un polígono es una figura, especialmente una figura plana cerrada, que tiene tres o más lados, en general rectos.

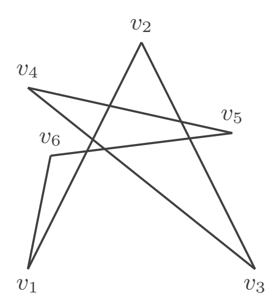
4) Un polígono es tradicionalmente una figura plana que está limitada por una cadena finita de segmentos de recta que se cierran para formar un circuito.

Por ejemplo, en la definición 1) no se pide en ninguna parte que la forma sea acotada, con lo que un ángulo sería un polígono. En la definición 2) pide que los lados sólo se corten en los vértices, condición que otras definiciones no piden. La definición 3) ni siquiera pide que sus lados sean rectos, y la palabra "tradicionalmente" en la definición 4) sugiere que hay otros polígonos posibles además de los que se están definiendo.

Cuando vemos un rectángulo o un triángulo, todos sabemos que eso sí es un polígono, pero el problema surge cuando aparecen figuras más rebuscadas:







Dependiendo de la definición que tomemos entre las anteriores estas figuras son o no polígonos.

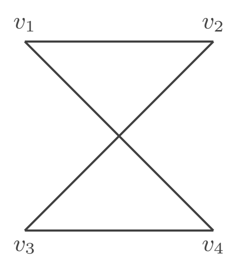
Para que quede claro de ahora en más, vamos a dar la definición que nosotros usamos cuando hablamos de polígonos. Éste es el sentido que tienen las definiciones en matemática, poder hablar de algo y que todos sepamos exactamente qué es:

Definición: *Dado en un plano tres o más puntos distintos entre sí y ordenados que llamamos* $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}, v_n$*, trazamos los segmentos que unen* v_1 *con* v_2*,* v_2 *con* v_3*,* v_3 *con* v_4*, así seguimos hasta el segmento que une* v_{n-1} *con* v_n *y completamos el circuito trazando el segmento que une* v_n *con* v_1*. Se define como* ***polígono*** *a cualquier configuración obtenida de esta forma. Los puntos* $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}, v_n$ *se llaman los* ***vértices*** *del polígono y los segmentos trazados se llaman los* ***lados*** *o* ***aristas*** *del polígono.*

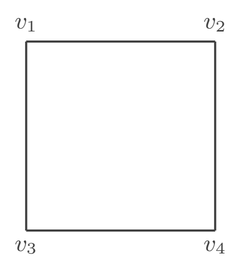
Se puede verificar que, según nuestra definición, cualquiera de las figuras dibujadas anteriormente es un polígono. Además, es claro que en un polígono **el número de vértices y el número de aristas coincide.**

Antes de seguir, dos aclaraciones. En la definición se pide que los puntos *a*) estén *ordenados* y *b*) sean *distintos.*

a) Si nos dan, por ejemplo, cuatro puntos v_1, v_2, v_3 y v_4, dependiendo el orden que elijamos tendremos polígonos distintos:

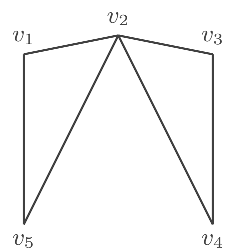


Con el orden v_1, v_2, v_3, v_4



Con el orden v_1, v_2, v_4, v_3

b) Si en la lista de puntos, aparece uno o más puntos repetidos, no vamos a considerar a la configuración obtenida un polígono:



Con el orden $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5$
no es polígono pues v_2 se repite.

Hay distintas clasificaciones de los polígonos dependiendo de sus propiedades. La más conocida es la que los clasifica por el número de lados o ángulos que tiene (triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, etc.). En esta nota nos van a interesar los polígonos convexos, que definimos en la próxima sección. Otras clasificaciones (que no vamos a utilizar pero que el lector interesado puede buscar) dividen a los polígonos en simples o complejos, equiláteros, equiángulos, regulares, estrellados, cóncavos, etc.

Polígonos convexos

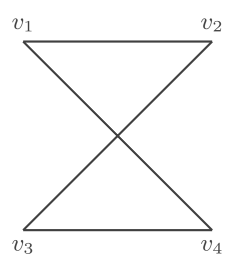
A continuación, vamos a dar una definición de polígonos convexos y luego mostraremos una forma de construirlos.

Definición: *Los* ***polígonos convexos*** *son los polígonos que cumplen simultáneamente las siguientes dos condiciones:*

1) *Sus aristas no se cortan entre sí salvo en los vértices.*

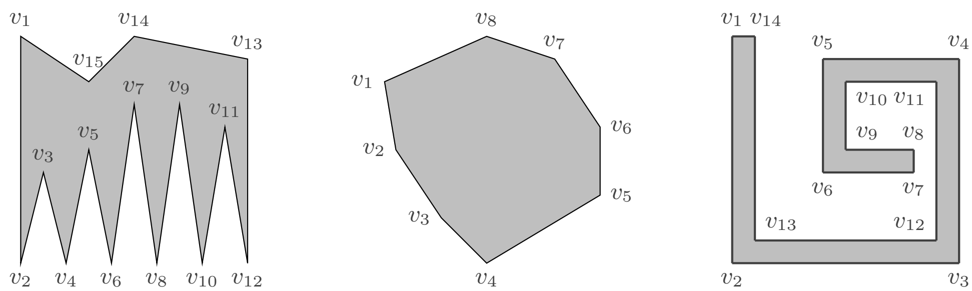
2) *Si dos puntos están en el interior del polígono, todo el segmento que los une queda incluido en el interior del polígono.*

Por ejemplo, el polígono



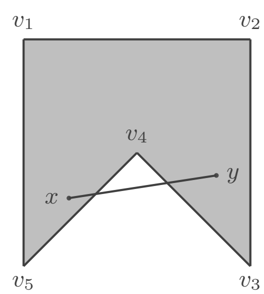
no es convexo, pues dos aristas (la $\overline{v_2v_3}$ y la $\overline{v_1v_4}$) se cortan en un punto que no es uno de los cuatro vértices y, por lo tanto, no se cumple la condición 1) de la definición.

Ahora bien, si dos aristas no se pueden cortar salvo en los vértices, quiere decir que, no importa lo complicado que sea el polígono, sus aristas forman un borde, determinando qué queda "adentro" del polígono y qué queda "afuera" como ocurre en los siguientes dibujos (consideramos "interior" a la zona sombreada incluyendo al borde):

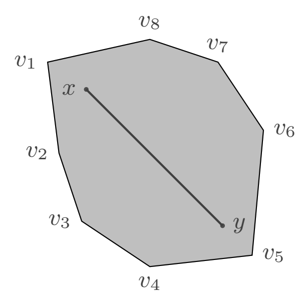


Entonces, la primera afirmación de la definición (que las aristas no se corten salvo en los vértices) da sentido a la segunda que habla del interior de un polígono.

Consideremos los siguientes polígonos



Polígono 1



Polígono 2

En el polígono 1 hay puntos en el interior (por ejemplo, el x y el y en el dibujo) tales que el segmento que los une **no** queda todo en el interior del polígono (se sale de la zona sombreada) y, por lo tanto, no es un polígono convexo.

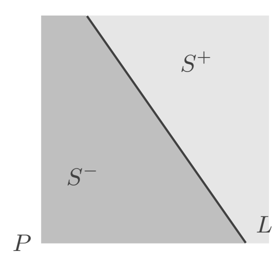
En el polígono 2, sin embargo, **todo par de puntos en el interior del polígono** cumple que el segmento que los une queda dentro del interior (en la zona sombreada) y por lo tanto, el polígono 2 es un polígono convexo.

Observación: *Si pedimos que las aristas de un polígono no se corten salvo en los vértices, una posible definición alternativa de polígono convexo es que sus ángulos interiores midan menos que* $180°$*. Notar que en el polígono 1 anterior, el ángulo interior en* v_4 *mide más que* $180°$*, mientras que en el polígono 2, todos sus ángulos interiores miden menos que* $180°$*. Esta definición alternativa se basa en que si tomamos cualquier par de puntos en un ángulo de menos de* $180°$*, el segmento que determinan está incluido en el ángulo, mientras que, en los ángulos de más de* $180°$*, esto no pasa.*

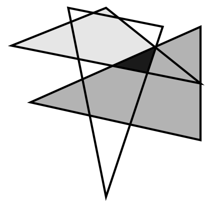
Ahora vamos a dar otra definición alternativa de polígono convexo que nos será útil para definir más adelante poliedro convexo en el espacio. Para esto, necesitamos tres nociones:

- Recordemos que, dado un plano y una recta en él, ésta lo divide en dos *semiplanos*. Siempre consideraremos que la recta es parte de ambos semiplanos al mismo tiempo—.

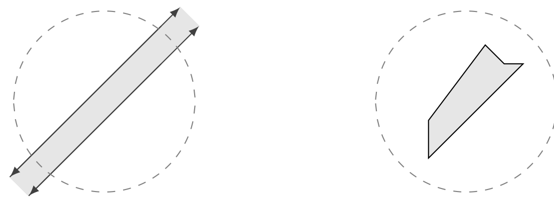
  En la figura que sigue, vemos como la recta L divide al plano P de la hoja en dos semiplanos, S^+ y S^- (los planos y las rectas continúan infinitamente pero nuestro dibujo sólo muestra una parte del plano y de la recta):

- La *intersección* de dos o más conjuntos de puntos son los puntos que están en **todos** los conjuntos al mismo tiempo. Por ejemplo, en el siguiente gráfico, calculamos la intersección de los tres triángulos y el resultado es la zona pintada de negro:



- Decimos que una región de un plano es *acotada* si se la puede encerrar dentro de una circunferencia. Por ejemplo, una recta no es acotada, porque sigue infinitamente; un semiplano tampoco es acotado. En cambio, un triángulo, un cuadrado, un polígono cualquiera siempre es acotado.

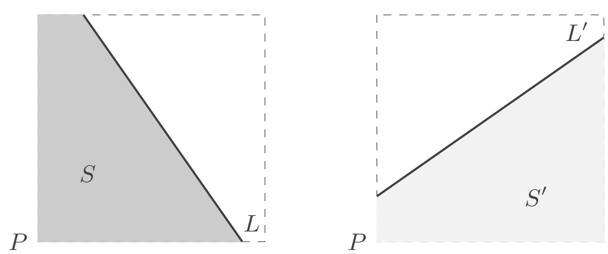


Región no acotada   Región acotada

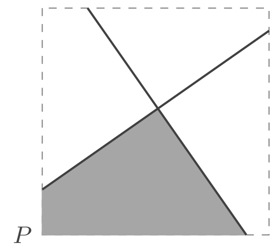
Ahora estamos en condiciones de dar la definición alternativa de polígono convexo:

Definición: *Un **polígono convexo** en un plano es un conjunto de puntos no vacío **acotado** que es **intersección de semiplanos** pero **no está incluido en una recta**.*

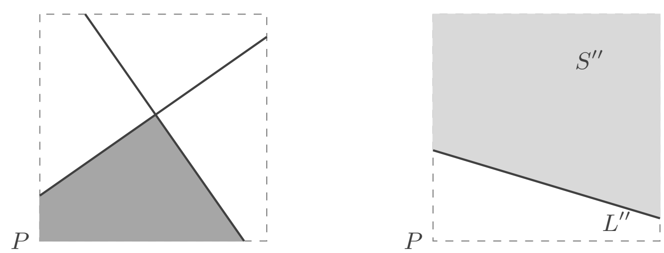
Construyamos un polígono convexo siguiendo esta definición. Consideremos un mismo plano P (que dibujaremos varias veces por separado para que quede más clara la construcción) y en él dos rectas L y L' que definen dos semiplanos S y S' respectivamente:



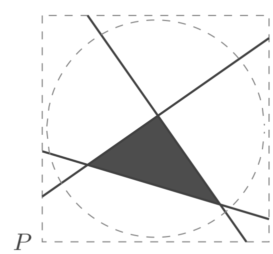
La intersección (los puntos en común) de S y S' son entonces los sombreados en la siguiente figura:



Esta región es intersección de (dos) semiplanos y no está incluida en una recta. El problema es que no está acotada (aunque en el dibujo parezca lo contrario, como los planos, los semiplanos y las rectas siguen indefinidamentes, el ángulo determinado también sigue indefinidamente, así que no se lo puede encerrar en ninguna circunferencia). Por lo tanto, todavía no tenemos un polígono convexo. Veamos qué pasa si agregamos otra recta L'' que determine otro semiplano S''.



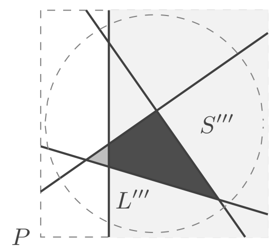
Si consideramos los puntos en común de los semiplanos S, S' y S'', tenemos:



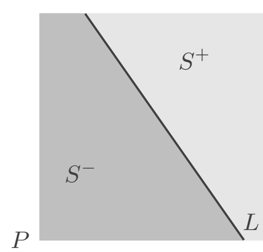
La figura sombreada resulta ser no vacía, intersección de semiplanos, no está incluida en una recta y está acotada (en la figura mostramos una circunferencia que la encierra) así que cumple todas las condiciones de la definición y, por lo tanto, resulta ser un polígono convexo.

Algunas observaciones:

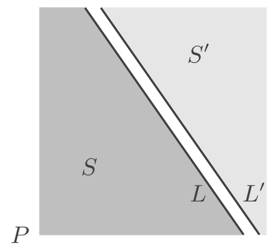
- El proceso puede no terminar con el triángulo. Si tomamos otra recta L''' y otro semiplano S''', podemos definir otro polígono convexo (el cuadrilátero sombreado en negro):



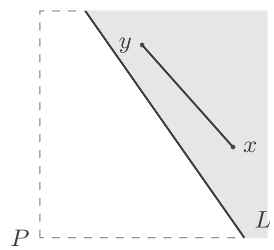
- Si en el siguiente dibujo, tomamos la intersección (los puntos en común) de S^+ y S^-, el resultado es la recta L. Por más que sigamos agregando semiplanos, la intersección siempre estará contenida dentro de L, por lo que nunca dará un polígono convexo (en la definición se pide que la intersección no esté contenida en una recta).



- Hay semiplanos que no tienen puntos en común como los de la figura siguiente, en cuyo caso la intersección se considera vacía. Por eso se aclara en la definición que el conjunto de puntos debe ser no vacío para considerarlo un polígono convexo.

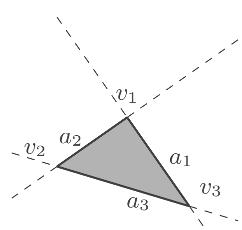


Por último, notemos que dado un semiplano y cualquier par de puntos en él, el segmento que los une sigue estando incluido en el semiplano:



Por lo tanto, si definimos un polígono convexo como intersección de semiplanos y dos puntos x e y están en su interior, esos dos puntos están en todos los semiplanos que definen al polígono. Por la propiedad que acabamos de ver de los semiplanos, el segmento que los une está contenido en todos los semiplanos que definen al polígono así que este segmento resulta estar en la intersección de los semiplanos y por lo tanto está en el interior del polígono. Esto comprueba que los polígonos convexos definidos como intersección de semiplanos satisfacen nuestra definición anterior de polígonos convexos.

Los segmentos de las rectas que usamos para definir el polígono convexo que quedan en el polígono resultan ser sus lados o aristas y los puntos de intersección de estos lados, sus vértices.



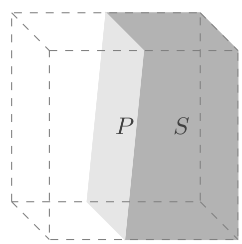
Vale la pena aclarar que, en la primera definición que dimos de polígono, sólo se habla de una configuración de puntos y segmentos que forman un borde. En la definición última, se considera que el polígono es todo su interior.

3 Poliedros convexos

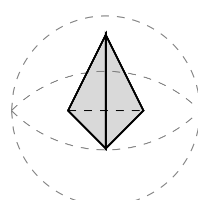
Definir poliedros en general puede ser difícil. El resultado que queremos contar sólo se aplica a poliedros convexos, por eso nos limitaremos a definir este tipo de poliedros. A continuación daremos una definición que es similar a la de polígonos convexos que usa semiplanos. Como los poliedros son cuerpos en el espacio de tres dimensiones (y no están en un plano como los polígonos) tenemos que definir algunos conceptos que usaremos para definirlos.

- Un plano P divide al espacio en dos regiones, llamadas *semiespacios* (si imaginamos al plano como una pared infinita, el espacio se divide en lo que queda de un lado de la pared y lo que queda del otro). Cada semiespacio contiene al plano P.

  En el siguiente dibujo, mostramos a un plano P y sombreamos a S, uno de los semiespacios que determina. Recordar que, si bien el dibujo está acotado, tanto el plano como el semiespacio continuan indefinidamente.



- Una región del espacio se dice *acotada* si se la puede encerrar dentro de una esfera.

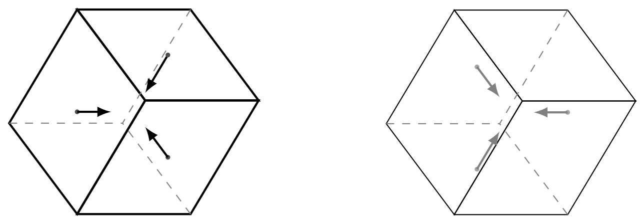


La región sombreada está acotada

Ahora estamos en condiciones de definir un poliedro convexo en el espacio:

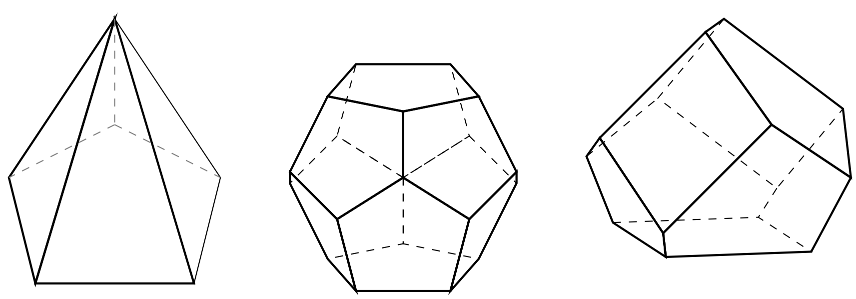
Definición: *Un* ***poliedro convexo*** *en el espacio es un conjunto no vacío* ***acotado*** *que es* ***intersección de semiespacios*** *pero* ***no está incluido en un plano****.*

Por ejemplo, veamos que un cubo satisface la definición anterior. Un cubo tiene seis caras (si pensamos en un dado, sabemos que al tirarlo hay seis resultados posibles, uno por cada cara que queda hacia arriba). Cada cara corresponde a un plano que determina un semiespacio. En la figuras siguientes, el semiespacio elegido para cada plano se indica con una flecha que apunta al centro (a la izquierda se indican los semiespacios correspondientes a las caras a la vista y a la derecha los que corresponden a las caras ocultas).



Si consideramos la intersección de los seis semiespacios indicados (el cubo), nos da un conjunto no vacío, no incluido en un plano y acotado (es claro que el cubo puede encerrarse en una esfera). Por lo tanto, el cubo es un poliedro convexo.

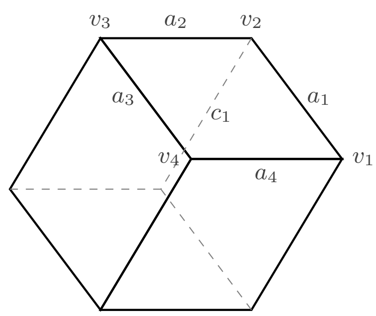
Otros ejemplos de poliedros convexos son los siguientes:



Poliedro 1 Poliedro 2 Poliedro 3

Como lo hicimos para polígonos convexos, se puede ver que si dos puntos están en el poliedro convexo, el segmento que los une también queda dentro del poliedro, pues todos los semiespacios que lo definen cumplen esta propiedad.

Las porciones de los planos que se usan para definir el poliedro convexo que quedan en el poliedro se llaman sus *caras*. Estas caras resultan ser polígonos convexos. Las *aristas* y los *vértices* de un poliedro convexo son las aristas y los vértices de todas sus caras. En el siguiente cubo, indicamos la cara superior c_1, los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y las aristas a_1, a_2, a_3, a_4 que le corresponden:



Por ejemplo, un cubo es un poliedro convexo con 6 caras (cada cara es un cuadrado), 12 aristas y 8 vértices. El poliedro 1 de la figura anterior tiene 6 caras, 10 aristas y 6 vértices; el poliedro 2 tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices, y el poliedro 3 tiene 9 caras, 21 aristas y 14 vértices.

En los polígonos, como ya dijimos antes, es claro que la cantidad de vértices es igual a la cantidad de aristas. La pregunta que vamos a contestar en la sección que sigue es qué relación cumplen en un poliedro convexo la cantidad de caras, de aristas y de vértices.

4 Teorema de Euler

Teorema: *En cualquier poliedro convexo, si C es el número de sus caras, A el número de aristas y V el número de vértices, se cumple que $C + V = A + 2$.*

Lo que vamos a hacer ahora es una demostración de este hecho, es decir una forma de probar y convencernos (a nosotros y a cualquiera que pueda seguir nuestro razonamiento) de que esta afirmación es verdadera para cualquier poliedro convexo.

Demostración: La demostración consta de tres pasos:

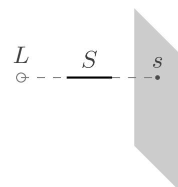
a) Primero vamos a explicar cómo podemos ubicar una luz para conseguir una sombra del poliedro convexo con ciertas propiedades.

b) Luego subdividimos la sombra de forma apropiada.

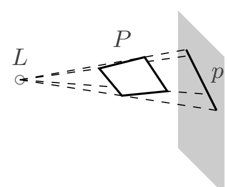
c) Finalmente "desarmando" la sombra y contando ciertos elementos vamos a tener la igualdad buscada.

a) Sombras:

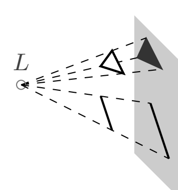
En algunos casos muy particulares, si tenemos una fuente de luz L y un segmento S, la sombra que da sobre un plano puede ser un punto s:



De la misma forma, si tenemos una fuente de luz L y un polígono P, la sombra que da sobre un plano puede ser un segmento p:

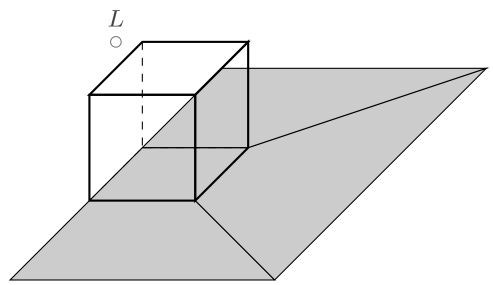


Sin embargo, si la fuente de luz no está en la misma recta que el segmento o en el mismo plano que el polígono, esto no pasa:

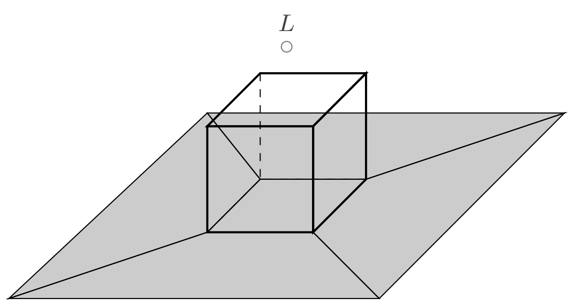


Dado un poliedro convexo cualquiera, lo ubicamos sobre un plano horizontal de forma tal que la cara más alejada del plano también quede horizontal. Retiramos esa cara y ubicamos una fuente de luz cerca del lugar donde estaba, con cuidado de que no quede en ningún plano que defina una cara, para lograr que la sombra de cada cara restante sea un polígono y la de cada arista sea un segmento.

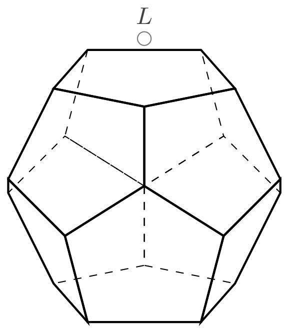
En la siguiente figura mostramos una ubicación de la fuente de luz L incorrecta para un cubo. Notar que hay toda una cara (la vertical que está exactamente debajo de L) que da como sombra únicamente un segmento:

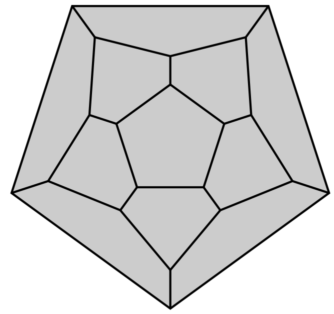


En la siguiente figura, en cambio, la ubicación de la fuente de luz L es correcta: salvo la cara del cubo que quitamos (la que está inmediatamente debajo de L) todas las caras tienen por sombras a polígonos y todas las aristas tienen por sombras a segmentos.



Acá mostramos otro ejemplo de luz bien ubicada y, al lado, cómo se ve aproximadamente la sombra que hace:





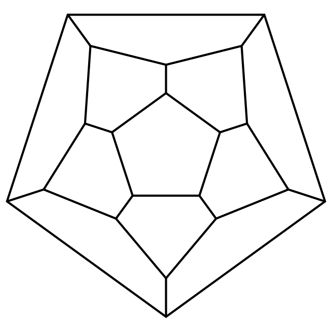
La sombra que obtenemos cada vez que ubicamos bien la luz se corresponde a varios polígonos convexos pegados por algunas aristas. En estas sombras, cada cara del poliedro (salvo la que sacamos) tiene por sombra un polígono, cada arista tiene por sombra una arista y cada vértice tiene por sombra un vértice. Por lo tanto, si llamamos C_s a la cantidad de polígonos de la sombra que son sombras de caras, A_s la cantidad de sombras de aristas y V_s la cantidad de sombras de vértices, tenemos que

$$C_s = C - 1 \qquad A_s = A \qquad V_s = V.$$

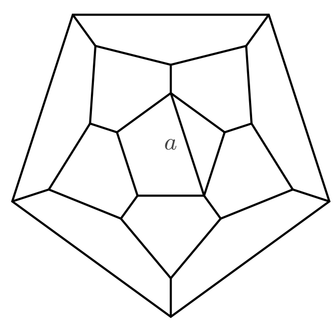
Lo que vamos a hacer a continuación es, dada una sombra de un poliedro convexo con una fuente de luz bien ubicada, calcular el número $C_s + V_s - A_s$.

b) Subdivisiones:

Calculemos ahora, por ejemplo, el número $C_s + V_s - A_s$ (caras más vértices menos aristas) para cada una las siguientes dos sombras:



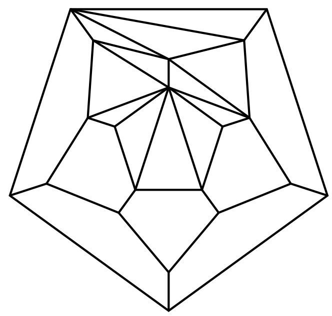
$C_s + V_s - A_s = 11 + 20 - 30 = 1$



$C_s + V_s - A_s = 12 + 20 - 31 = 1$

A pesar de ser distintas sombras, el número $C_s + V_s - A_s$ se mantiene constante. El motivo es que, al agregar la arista a, también aumentamos en uno el número de caras, ya que subdividimos a una cara en dos. Como el número de vértices no cambia, resulta que agregar esa arista hace que agreguemos una cara sumando y una arista restando, y por lo tanto, el número total no varía.

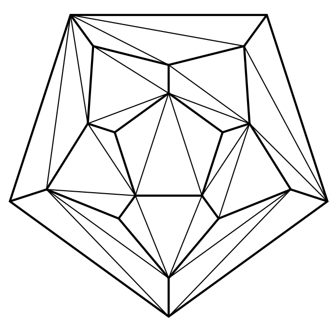
Con esta nueva sombra sucede lo mismo:



$C_s + V_s - A_s = 19 + 20 - 38 = 1$

Podemos concluir que, si a una cara de la sombra le trazamos una arista que una dos vértices que no están unidos, agregamos una arista y, al mismo tiempo, a la cara la dividimos en dos caras, así que agregamos uno al número de caras. Por lo tanto, cualquiera sea la sombra de nuestro poliedro convexo, podemos subdividirla por medio de aristas nuevas en una sombra donde *todas* sus caras sean triángulos y el número $C_s + V_s - A_s$ se conserve.

En nuestro ejemplo anterior, una forma posible de hacerlo (pero no la única) sería:

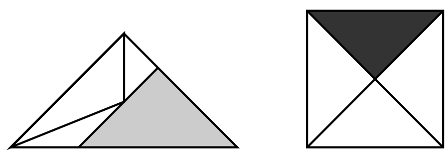


$C_s + V_s - A_s = 33 + 20 - 52 = 1$

En resumen, cualquiera sea la sombra del poliedro convexo que consideremos, podemos agregarle aristas a sus caras de forma tal que las subdividamos en triángulos manteniendo fijo el número $C_s + V_s - A_s$. Por lo tanto, nuestro problema se reduce a calcular este número en el caso de una sombra con todas sus caras triangulares.

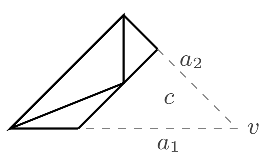
c) Desarmando la sombra:

Ahora vamos a ir "desarmando" la sombra triangulada para contar la cantidad $C_s + V_s - A_s$. La forma de desarmar la sombra va a ser quitando triángulos desde afuera hacia adentro en orden y teniendo en cuenta cuántas aristas, vértices y caras quitamos cada vez. Durante el proceso de desarme, los triángulos exteriores pueden estar ubicados de dos formas distintas: dos de sus aristas son exteriores o sólo una de sus aristas es exterior. En la siguientes figuras el triángulo gris tiene dos aristas exteriores mientras que el triángulo negro tiene una sola arista exterior:



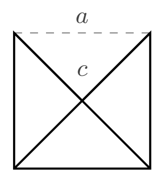
El método para quitar triángulos exteriores va a seguir el siguiente orden: primero se quitan los triángulos con dos aristas exteriores y, si no queda ninguno de éstos, se puede quitar uno con sólo una arista exterior.

Si quitamos un triángulo que tiene dos aristas exteriores, estamos quitando dos aristas, una cara y un vértice.



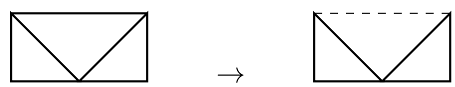
Luego, el número a calcular es $(C_s - 1) + (V_s - 1) - (A_s - 2) = C_s - 1 + V_s - 1 - A_s + 2 = C_s + V_s - A_s$. Es decir, *quitar un triángulo con dos aristas exteriores no modifica el número* $C_s + V_s - A_s$.

Si quitamos un triángulo que tiene una sola arista exterior, estamos quitando una arista y una cara, pero ningún vértice.



Luego, el número a calcular es $(C_s-1)+V_s-(A_s-1) = C_s-1+V_s-A_s+1 = C_s + V_s - A_s$. Es decir, *quitar un triángulo con una sola arista exterior no modifica el número* $C_s + V_s - A_s$.

Es importante seguir el orden establecido para quitar triángulos de la sombra. En la siguiente figura se muestra cómo, eligiendo el orden incorrecto, pueden quedar triángulos con sus tres lados exteriores:



Podemos concluir entonces que, dada la sombra triangulada, podemos quitar de a un triángulo exterior por vez siguiendo el orden establecido sin modificar el número $C_s+V_s-A_s$. Notar que, en cada paso, un triángulo que no era exterior puede pasar a serlo. Así podemos seguir quitándolos hasta que sólo quede un triángulo. En este caso, es fácil hacer la cuenta: un triángulo es una sola cara, tres aristas y tres vértices, así que

$$C_s + V_s - A_s = 1 + 3 - 3 = 1.$$

En resumen, si revisamos el proceso completo, tenemos que:

- A un poliedro convexo cualquiera lo ubicamos bajo una fuente de luz de forma que dé una sombra apropiada. Le quitamos la cara superior y nos fijamos qué pasa con el número $C_s + V_s - A_s$ de su sombra.
- Si triangulamos la sombra, el número $C_s + V_s - A_s$ no varía.
- Si desarmamos la sombra triangulada, sacándole triángulos exteriores siguiendo el orden establecido, el número $C_s + V_s - A_s$ no varía.
- Luego el número $C_s + V_s - A_s$ para cualquier sombra de un poliedro convexo coincide con el de un único triángulo y da 1.

Si ahora también contamos la cara que le sacamos al poliedro convexo original, resulta que hay que agregar uno a la suma (recordar que $C_s = C - 1$, $A_s = A$ y $V_s = V$) con lo que, en cualquier poliedro, convexo vale $C+V-A = 2$ o, lo que es lo mismo,

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

En un próximo trabajo, que planeamos tenga características similares a éste, daremos una versión más fina del teorema de Euler y mostraremos algunas de sus aplicaciones.

Ciclo Básico Común - Universidad de Buenos Aires e IMAS, CONICET-UBA.
jsabia@dm.uba.ar