Los números imaginarios en el *Course d'Analyse* de Cauchy. Una interpretación semiótica

Héctor Horacio Gerván

Resumen: En este trabajo nos proponemos presentar la concepción que el matemático francés Augustin-Louis Cauchy tenía de los números complejos y las funciones de variable compleja, a la luz de los postulados teóricos de la semiótica matemática. Para ello, tomaremos como principal texto documental de referencia el *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* de Cauchy.

1 Introducción

Cualquier historiador de la matemática que desee rastrear el desarrollo histórico del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, no debe olvidar que el mismo se halla inserto en un "tiempo largo", en el sentido braudeliano del tiempo histórico[1], en tanto que:

> "[l]os números complejos tienen una historia de antigua presencia tolerada, no sin recelos, vinculada inicialmente al estudio de ecuaciones algebraicas. Su incomprensión fue una constante, lo que no era óbice para su manipulación cuando resultaba imprescindible, siempre sobre la base de la extensión de las operaciones con los reales." (Pérez-Fernández & Aizpuru, 1999: 20)[2]

En este presupuesto histórico, la obra del matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)[3] cobra especial importancia, en tanto que, tal como han sostenido muchos historiadores de la matemática, posee un doble valor: el objetivo de rigorización de los conceptos matemáticos (como por ejemplo la noción de límite y continuidad de una función) y, particularmente, la estructuración de la teoría de las funciones de variable compleja. Es este segundo

[1]Es la llamada *Longue Durée*; Cfr. Braudel, 1958. El "tiempo largo" es un *tiempo estructural*, en tanto que 'estructura', en historia, es "una arquitectura pero, más aún, una realidad que el tiempo tarda enormemente en desgastar y en transportar" (Braudel, 1970: 70).

[2]Para una historización del desarrollo de la noción de número complejo, Cfr. Flament (2013) y Nahin, (2006 [1998]).

[3]Para una completa biografía de este matemático, Cfr. Belhoste (1991).

aspecto el que nos proponemos analizar en este trabajo, aunque sin pretensiones de exhaustividad. El marco teórico que utilizaremos para realizar esto es la semiótica matemática, mientras que nuestro principal texto documental de referencia, en tanto fuente primaria para esta investigación histórica, será el *Course d'Analyse de l'École Royale Politechnique* (1821).

1.1 Aproximación semiótica a la práctica matemática

Los pilares sobre los cuales descansará nuestra investigación son, por un lado, la naturaleza sígnica de la matemática y, por otro, el carácter socio-cultural de los signos. En efecto, en tanto sostenemos que esta naturaleza sígnica es socio-cultural, podemos, entonces, caracterizar a la matemática como una actividad humana, colectiva y, por lo tanto, delimitada por los marcos de sentido de toda sociedad en un determinado momento histórico. La práctica matemática adquiere, así, relevancia y especificidad dentro de dichos marcos, produciéndose diferentes *objetivaciones culturales* que constituyen su producto. Por lo tanto, las producciones matemáticas están inmersas en una temporalidad y en una tipicidad ligada a ella, lo que implica que cada una se exteriorice a través de diferentes representaciones.[4]

Ahora bien, ¿en qué consiste la práctica matemática? Gregorio Klimovsky, un representante de la filosofía de la matemática del siglo XX en la Argentina, ha escrito al respecto lo siguiente:

> "Tal como se la concibe hoy, la matemática pone su atención en lo que llamamos estructuras, o sea, conjuntos de elementos relacionados de determinada manera y el estudio del matemático remite al de las propiedades que tienen tales conjuntos; (...) [E]l matemático (...) estudia, como también lo hace el lógico, estructuras posibles, es decir, aquellas que no son contradictorias. Por lo cual podríamos, quizás temerariamente, caracterizar a la matemática como el estudio de todas las estructuras posibles y de sus propiedades: el matemático construye algo así como un gigantesco anaquel o armario en el que están almacenadas todas las estructuras que podamos concebir, una curiosa forma, si se quiere, de crear ficción." (Klimovsky & Boido, 2005: 22)

De este modo, el matemático, en su afán de obtener conjuntos de regularidades y esquemas de comprensión, trata de encontrar leyes y enunciados

[4] Para más detalles, Cfr. Alonso & Gerván (2014).

generales a través de diversos procesos que algunos autores llaman “traducción de signos” (Ariza, 2007: 12). Por ello es que, si consideramos a la semiótica desde la perspectiva teórica del filósofo pragmático Charles S. Peirce (1839-1914), podemos sostener que la matemática es esencialmente un *pensamiento diagramable* (Peirce, *apud* Otte, 2006: 14) y los diagramas y figuras diagramaticales están destinados a aplicarse a la mejor comprensión del estado de cosas; es este carácter diagramático lo que articula la dinámica interna del pensamiento matemático.[5] La matemática es, así, un ‘pensamiento singular’ en el cual *no* es suficiente pensar en términos generales, sino que es necesario *hacer* algo; es, por ende, un pensamiento mediado por signos en permanente labor constructiva.[6] Este proceso se lleva a cabo por medio de un *sistema de representación* dado y cualquier experimentación que se realice en él está determinada por las reglas que le son propias (Hoffman, 2005: 47).

Si, de manera complementaria a la tesis de Peirce, adscribimos también a la de Paul Ernest, estos sistemas de representación son *sistemas semióticos* compuestos por un sistema de signos, un sistema de reglas para el uso y producción de estos signos y una estructura de sentido subyacente (Ernest, 2008b: 39 *ss.*). El uso de un sistema semiótico, tiene lugar dentro de *un* contexto socio-histórico concreto que le aporta sentido y relevancia.

Una de las características más sobresalientes de la matemática es el considerable rango de signos que se utilizan en su representación escrita. Entre ellos, podemos distinguir signos alfanuméricos provenientes de cualquier lenguaje (incluyendo, obviamente, los griegos, de gran difusión) y, muy especialmente, símbolos (en el sentido peirceano del término[7]) para relaciones y funciones u otros ‘objetos’ matemáticos como, por ejemplo, los pictogramas tales como $\rightarrow, \neq, \emptyset, \infty, \ldots$ y otros que son empleados junto a subíndices y supraíndices como $\int_\alpha^\beta, \oint_\Phi, \bigotimes_{i,j=1}^{m}, \ldots$ Un tercer grupo es, por último, el de los gráficos y/o figuras (Ernest, 2008c: 46), el cual está totalmente ausente en el *Course d’Analyse* de Cauchy. En concordancia con esto, podemos decir que “[t]anto en la enseñanza

[5]En palabras de Peirce: “... todo razonamiento deductivo, incluso un simple silogismo, implica un elemento de observación, es decir, la deducción consiste en la construcción de un ícono o un diagrama de las relaciones cuyas partes presentará una completa analogía con los de las partes del objeto de razonamiento, de experimentación de esta imagen en la imaginación y de observación del resultado a fin de descubrir las relaciones inadvertidas y escondidas entre las partes” (*CP*, 3.363). La traducción del original en inglés es nuestra.

[6]Cfr. “The Essence of Mathematics”; *CP*, 4.228-243.

[7]*CP*, 2.249.

como en sus prácticas más avanzadas, la matemática es el dominio donde todas las formas de representación semiótica pueden ser utilizadas" (Duval, 2006: 45).[8]

Consideremos un ejemplo de sistema de signos del sistema semiótico empleado por Cauchy. El matemático repara en el hecho de que una operación realizada sobre una cantidad determinada puede arrojar varios resultados, por lo que se vuelve necesario incluir alguna notación especial que refleje esto, la cual consiste en escribir a tal cantidad entre paréntesis dobles, dejando la notación usual, es decir, los paréntesis simples, para, según su expresión, el resultado "que parece más digno de hacerse notar". Así, si a es un número positivo, la raíz cuadrada de a da por resultado dos valores "numéricamente iguales", i.e., con igual valor absoluto pero con signos opuestos, cualquiera de los cuales quedarán expresados por la notación $((a))^{\frac{1}{2}}$ o $\sqrt{\sqrt{a}}$, mientras que el resultado positivo sólo estará representado por $a^{\frac{1}{2}}$ o $\sqrt{a}$, de modo que $\sqrt{\sqrt{a}} = \pm\sqrt{a}$ o, equivalentemente, $((a))^{\frac{1}{2}} = \pm a^{\frac{1}{2}}$ (Cauchy, 1821: 7).

Continuando con la postura de Ernest, es debido a esta fundamental utilización de sistemas semióticos socialmente contextualizados y a la consiguiente importancia de los registros escritos para la creación, adquisición, transmisión y re-creación del conocimiento matemático, que gran parte –si no toda– la práctica matemática puede ser entendida en términos de la producción de *secuencias de textos* a través de la aplicación de *transformaciones textuales* (Ernest, 2008a: 6). Esto es, una actividad matemática 'exitosa' es una transformación secuencial de, digamos, n signos o textos (a los que denotaremos como S_i), con cada signo/texto derivado de $n-1$ transformaciones ($\Rightarrow_i$), de modo que tenemos la secuencia $(S_0 \Rightarrow_0) \, S_1 \Rightarrow_1 S_2 \Rightarrow_2 \cdots \Rightarrow_{n-1} S_n$, siendo S_1 la representación inicial del agente ejecutor de la tarea[9] y S_0 la representación por medio de la cual se presentó o planteó la tarea, como por ejemplo una figura. En esta secuencia, los requerimientos teóricos y otras normas de juego presentes en el contexto socio-cultural en el cual la tarea se inserta, determinan qué representaciones y qué pasos ($S_k \Rightarrow_k S_{k+1}, k < n$), o más apropiadamente transformaciones sobre ellas, son aceptables.[10] Es en este sentido que el autor se refiere a la matemática

[8]La cita es una traducción nuestra de la versión original en francés.

[9]Ernest habla de "learner" (alumno o, más apropiadamente, aprendiz), pero aquí preferimos usar la expresión "agente ejecutor" porque el término original posee una connotación fuertemente áulica, lo cual se vuelve demasiado restrictivo para caracterizar a la práctica matemática en términos generales, ya sea dentro tanto del ámbito de la investigación o del de la educación.

[10]Consideramos oportuno traer a colación las siguientes palabras de Peirce: "Todo nuestro

como un *espacio semiótico*:

> "[L]a matemática se refiere a un espacio semiótico, un ámbito socialmente construido de signos y significados. Los seres humanos son criaturas utilizadoras y creadoras de signos, y la mayoría de los seres humanos pueden participar en el espcio semiótico de la matemática, aunque sea de forma limitada. Sin embargo, esta participación implica el despliegue de recursos semióticos y sus herramientas y la asunción de ciertas identidades. La entrada al espacio semiótico es a través de los textos de matemática (...) Lo que esto significa es que el acceso a los textos matemáticos siempre tiene un carácter secuencial."[11] (Ernest, 2008b: 43)

Estas palabras ponen de manifiesto el hincapié que le otorga a los singos, tanto en la construcción del conocimiento como en su ulterior comunicación a través de un cíclico proceso consistente en cuatro etapas: apropiación, transformación, publicación (en un sentido amplio, de comunicación a través de los signos) y convencionalización.[12] Esto es, siguiendo la clasificación de Steinbring (2006: 134), más allá de la función estrictamente semiótica del signo, podemos distinguir, además, una no menos importante función epistemológica del mismo. Para ahondar un poco más en esta función, utilizaremos las notaciones ideadas por Yves Chevallard. En efecto, denotaremos: r^m : registro semiótico $(m = 1, 2, 3 \ldots)$ y $R_i^m(\mathcal{A})$: representación i-ésima (con $i = 1, 2, 3, \ldots$) de un objeto matemático[13] $\mathcal{A}$ en el registro semiótico r^m; o sea que, la construcción del conocimiento de determinado/s objeto/s matemático/s está en íntima relación con los mediadores simbólicos empleados. Por lo tanto, la adquisición de un objeto matemático determinado, al que simbolizaremos como $\mathcal{O}$, es, en efecto, la adquisición de 'una' representación semiótica $R_i^m(\mathcal{O})$ en 'un' registro semiótico r^m. Más aún, puesto que en un registro dado podemos encontrar diversas representaciones, la representación $R_i^m(\mathcal{O})$ no da 'todas' las referencias (semióticas) de $\mathcal{O}$ en r^m; eso es, seguramente existirán otras representaciones semióticas

pensamiento se lleva a cabo sobre algún u otro tipo de signos, ya sean imaginados o realmente percibidos. El mejor pensamiento, sobre todo en temas matemáticos, se realiza mediante la experimentación en la imaginación sobre un diagrama u otro *esquema* (...) [Por lo tanto, para cualquier concepto u 'objeto' matemático,] los signos externos responden a cada propósito, y no hay necesidad alguna de tener en cuenta lo que pasa en la mente de cada uno." (*NEM*, I: 122)

[11] La cita es una traducción nuestra de la versión original en inglés.

[12] Cfr. además: Ernest (2006: 68-69).

[13] Empleamos el término "objeto" matemático en el sentido discutido en: D'Amore (2012).

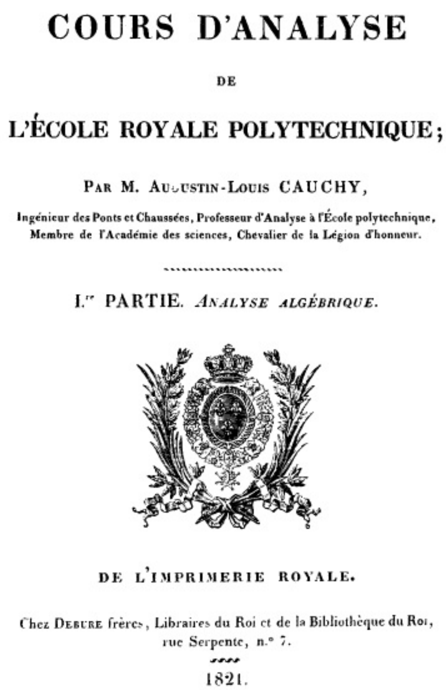
$R_j^m(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ en r^m tal que $j \neq i$. La operación de pasar de $R_i^m(\mathcal{O})$ a $R_j^m(\mathcal{O})$ (en un mismo registro semiótico) se llama *tratamiento* (Duval, *apud* D'Amore, 2004: 12-13). Pero, además, el registro semiótico no es único, por lo que se puede decir que $\mathcal{O}^m$ es el objeto matemático $\mathcal{O}$ representado o 'limitado' a r^m, por lo que $\mathcal{O}^m$ es una "construcción" parcial de $\mathcal{O}$. Puesto que la comprensión de $\mathcal{O}$ depende de la capacidad de recurrir a varias representaciones semióticas, es necesario realizar una *conversión* (Duval, *apud* D'Amore, 2004: 13) que realice la transformación $R_i^m(\mathcal{O}^m) \to R_j^n(\mathcal{O}^n)$, con $r^m \neq r^n$ $\forall m, n$ con $m \neq n$. Sólo esto hace posible la elección de un registro en lugar de otro frente a cualquier situación relativa al objeto matemático $\mathcal{O}$.

Más adelante en el trabajo, volveremos sobre estas concenpualizaciones aplicadas al caso particular del texto de Cauchy que hemos tomado como fuente principal para el desarrollo de nuestra investigación.

1.2 El ***Course d'Analyse*** como fuente histórica

El *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821), cuyo primer y único volumen publicado se llama *Analyse algébrique*, consta de unos preliminares, doce capítulos y nueve apéndices titulados como notas, sumando un total de 576 páginas.[14]

[14] Para una desripción general de la obra, Cfr. Pérez-Fernández & Aizpuru (1999: 9-10).


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1821.

Fig. 1: *Frontispicio de la edición original del* Cours d'Analyse *de Cauchy*[15]

La introducción comienza con las siguientes palabras:

> "Algunas personas, que han querido guiar bien mis primeros pasos en la carrera de ciencias, entre los que citaré con reconocimiento a los señores *Laplace* y *Poisson*, habiéndome expresado su deseo de verme publicar el Curso de análisis de la Escuela politécnica real, me he decidido a escribir este Curso para mayor utilidad de los alumnos. De él ofrezco aquí la primera parte, conocida bajo el nombre de *Análisis algebraico*, y en la que trato sucesivamente diversos aspectos de funciones reales o imaginarias, de series convergentes y divergentes, y de la descomposición de fracciones racionales."[16] (Cauchy, 1821: i-ij)

Por lo tanto, la obra nació como un texto para la enseñanza, hecho que confirma así el gran valor de los textos matemáticos como mediadores semióticos

[15] La imagen de la obra nos pertenece.

[16] En todas las citas de Cauchy, originalmente en francés, la traducción es nuestra.

en la adquisición/generación del conocimiento matemático expuesto por Ernest y mencionado *ut supra*. Éste y otros escritos de Cauchy impusieron su propio estilo de análisis matemático, continuando con la tradición que habían emprendido Joseph-Louis Langrange (1736-1813) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827), según la cual todos los prominentes matemáticos franceses presentaban sus cursos de París en volúmenes titulados *Cursos* o *Tratados*. Al parecer, la 'calidad' de los de Cauchy fue tal que durante décadas sus sucesores sólo hicieron meras variaciones y ampliaciones sobre el mismo tema. El valor histórico del *Cours d'Analyse* es, antes que nada, el hecho de que en él podemos ver cómo va llegando a su maduración el análisis matemático, en el sentido en que hoy entendemos el término; en efecto, utilizando la teoría de límites como punto de partida de las definiciones y propiedades matemáticas, y a la aritmética de desigualdades como mecanismo principal en las demostraciones, logró llevar al análisis matemático a una posicii'on autónoma respecto a la geometría y al álgebra. Podemos confirmar esto en las siguientes palabras de la introducción del *Cours d'Analyse*:

> "En cuanto a los métodos, he tratado de darles todo el rigor que exigimos en la geometría, de manera que no haya que recurrir nunca a razonamientos tomados del álgebra en su generalidad. Los argumentos de este tipo, aunque son admitidos generalmente, y en especial en el paso de series convergentes a series divergentes y de cantidades reales a expresiones imaginarias, *se les debe considerar, en mi opinión, solamente como inducciones adecuadas para buscar algunas veces la verdad, pero que están poco de acuerdo con la exactitud de que hacen tanta gala las ciencias matemáticas.*"[17] (Cauchy, 1821: ij-iij)

Respecto a esta crítica a los 'razonamientos generales del álgebra', continúa escribiendo que:

> "Incluso hay que señalar que ellos tienden a asignar fórmulas algebraicas para una extensión indefinida, mientras que, en realidad, la mayoría de estas fórmulas existen sólo bajo ciertas condiciones y para ciertos valores que las cantidades [i.e., de las variables] que contienen. En la determinación de estas condiciones y valores, y en el establecimiento, de manera precisa, del significado de las notaciones que utilizo, elimino toda la incertidumbre; y luego en las diferentes fórmulas que no muestran las

[17] La cursiva es nuestra.

> relaciones entre las cantidades reales, tales relaciones siempre son fáciles de comprobar mediante la sustitución de los números en las propias cantidades [variables]. Es cierto que, para permanecer constantemente fiel a estos principios, me vi obligado a reconocer que varias de estas recomendaciones pueden ser un poco difíciles al principio." (Cauchy, 1821: iij-iv)

Por lo tanto, es insoslayable destacar que la teoría de los números complejos por él presentada en esta obra tiene que ser interpretada dentro de un contexto más amplio de *aritmetización* del análisis matemático, proceso en el cual Cauchy ha desarrollado determinadas conceptualizaciones y mediadores simbólicos para conceder a este campo numérico, siguiendo las categorizaciones de Yves Chevallard (2000), las características de una *noción matemática* propiamente dicha, en detrimento de la concepción *paramatemática* que ha tenido en períodos históricos anteriores.

2 Exposición matemática de los números imaginarios en el *Course d'Analyse*

2.1 Las "expresiones imaginarias" en Cauchy

Es en el capítulo 7 del *Course d'Analyse*, titulado *"Des Expressions imaginaires et de leurs Modules"*, donde Cauchy comienza a tratar los números complejos, comenzando con una presentación sistemática de las operaciones definidas en ellos. Una definición sobre la cual descansa toda su interpretación de $\mathbb{C}$ es la de *expresión simbólica* (o *símbolo*), siendo ésta una combinación de signos algebraicos que no significan nada por sí mismos, sino que tal significado depende de una convención (Cauchy, 1821: 173). Por lo tanto, para él, los números complejos son únicamente *números imaginarios*, en el sentido de que no representan nada real, ni mucho menos un punto en el plano con determinadas coordenadas (x, y), sino que son, en definitiva, una extensión simbólica de carácter algebraico de los números reales, *carente de significado.* Su definición de los números imaginarios es la siguiente:

> "En general, llamamos *expresión imaginaria* a cualquier expresión simbólica de la forma
> $$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$
> α, β denotan dos cantidades reales; y se dice que dos expresiones imaginarias
> $$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

son *iguales* entre sí, cuando haya una igualdad a ambos lados, 1° entre las partes reales, 2° entre los coeficientes de $\sqrt{-1}$, a saber, β y δ. La igualdad de dos expresiones imaginarias se indica, como en el caso de dos cantidades reales, por el signo =; y el resultado se llama una *ecuación imaginaria*. Dicho esto, cualquier ecuación imaginaria es la representación simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales. Por ejemplo, la ecuación simbólica

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

es equivalente a sólo dos ecuaciones reales

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.\text{”}$$

(Cauchy, 1821: 175-176)

Esta extensión simbólico-algebraica de los números reales es fácilmente comprobable en las definiciones de las operaciones entre expresiones imaginarias, equivalentes a las que usamos actualmente:

- $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) + \left(\gamma + \delta\sqrt{-1}\right) = \alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}$;
- $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) - \left(\gamma + \delta\sqrt{-1}\right) = \alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1}$;
- $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) \times \left(\gamma + \delta\sqrt{-1}\right) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}$.

Asimismo, define la *división* entre dos expresiones imaginarias $\dfrac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}}$ de manera análoga a la división entre dos números reales, y la *potencia* m de una expresión imaginaria mediante la notación $\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)^m$, siendo $m \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, cuando analiza el caso de la extracción de la raíz n-ésima de una expresión imaginaria, repara en el hecho de que hay más de una solución, razón por la cual denota esta operación mediante sus ya usuales dobles paréntesis: $\left(\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

En tanto que las expresiones imaginarias no son más que extensiones de los números reales, éstos son un caso particular de las expresiones imaginarias. En palabras de Cauchy:

“Cuando, en la expresión imaginaria

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

el coeficiente β de $\sqrt{-1}$ se desvanece, el término $\beta\sqrt{-1}$ se reduce a cero, y la propia expresión [se reduce] a la cantidad real α.” (Cauchy, 1821: 176)

O sea que, si tuviésemos que expresar en nuestro actual sistema semiótico lo escrito por Cauchy en su característico estilo coloquial, diríamos que dada la expresión imaginaria $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que si $\lim\limits_{\beta \to 0} \beta\sqrt{-1} = 0$, entonces $\lim\limits_{\beta \to 0} \left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right) = \alpha$. Por lo tanto, el conjunto de lo que hoy denominamos un "número real puro" es un subconjunto propio del conjunto formado por las expresiones imaginarias, en notación actual: $\mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$.

El concepto más importante de todo el capítulo 7, y que le permite demostrar varios resultados a lo largo de sus páginas, es, sin lugar a dudas, el de *módulo* de una expresión imaginaria. Para poder definirlo, comienza estableciendo la correspondencia

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \longleftrightarrow \rho\left(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta\right),$$

con $\rho > 0$ y θ un arco [ángulo] real; de este modo, vale que $\alpha = \rho\cos.\theta$ y $\beta = \rho\sin.\theta$, con lo cual:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2\left(\cos.^2\theta + \sin.^2\theta\right) = \rho^2 \Longleftrightarrow \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

y el número $\rho \in \mathbb{R}$ así definido es el *módulo* de la expresión imaginaria $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ (Cauchy, 1821: 183).

A continuación transcribiremos, a modo de ejemplo, un resultado demostrado a partir de esta forma polar de una expresión imaginaria:

> "1er PROBLEMA. *Encontrar los distintos valores* [i.e., soluciones] *de la expresión*
>
> $$\left(\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$
>
> SOLUCIÓN. Si
>
> $$x = r\left(\cos.t + \sqrt{-1}\sin.t\right)$$
>
> es uno de estos valores, r denota una cantidad positiva y t un arco [ángulo] real, [entonces] [s]erá, según la definición misma de la expresión $\left(\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$,
>
> $$x^n = \alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho\left(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta\right),$$
>
> o equivalentemente,
>
> $$r^n\left(\cos.nt + \sqrt{-1}\sin.nt\right) = \rho\left(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta\right).$$
>
> Obtenemos de esta última ecuación
>
> $$r^n = \rho,$$

$$\cos .nt + \sqrt{-1} \sin .nt = \cos .\theta + \sqrt{-1} \sin .\theta,$$

y en consecuencia

$$r = \rho^{\frac{1}{n}},$$

$$\cos .nt = \cos .\theta, \quad \sin .nt = \sin .\theta, \quad nt = \theta \pm 2k\pi,$$

$$t = \frac{\theta \pm 2k\pi}{n},$$

donde k representa un número entero cualquiera. [Con] [l]as cantidades r y t así determinadas, los diversos valores de x que satisfacen la ecuación $\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho\left(\cos .\theta + \sqrt{-1} \sin .\theta\right)$ están, evidentemente, incluidos en la fórmula

$$\begin{aligned} x &= \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos .\frac{\theta \pm 2k\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin .\frac{\theta \pm 2k\pi}{n}\right] \\ &= \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos .\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1} \sin .\frac{\theta}{n}\right] \left[\cos .\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin .\frac{2k\pi}{n}\right] \end{aligned}$$

o, de manera equivalente, en la siguiente,

$$x = \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos .\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1} \sin .\frac{\theta}{n}\right] ((1))^{\frac{1}{n}}.$$

En otros términos, la expresión $\left((\alpha + \beta\sqrt{-1})\right)^{\frac{1}{n}}$, así como $((1))^{\frac{1}{n}}$, admite n valores diferentes determinados por la ecuación

$$\left((\alpha + \beta\sqrt{-1})\right)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos .\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1} \sin .\frac{\theta}{n}\right] ((1))^{\frac{1}{n}}.\text{”}$$

(Cauchy, 1821: 218-220)

2.2 Funciones imaginarias e infinitésimos imaginarios

En el capítulo 8 del *Course d'Analyse*, Cauchy comienza su exposición de la teoría de funciones de variable compleja[18], y para ello, define una variable imaginaria como la compuesta por dos variables reales de la forma $u + v\sqrt{-1}$, con $u, v \in \mathbb{R}$; si u, v convergen, respectivamente, hacia U, V, entonces $u + v\sqrt{-1}$

[18] Para un detallado análisis del desarrollo histórico de las funciones de variables complejas, y que excede a los resultados plasmados en el *Course d'Analyse*, Cfr. Bell (2003 [1940]: 499-512).

convergerá a la expresión imaginaria $U + V\sqrt{-1}$ (Cauchy, 1821: 240). De este modo, denomina *función imaginaria* a la que puede expresarse de la forma

$$\varpi(x) = \phi(x) + \chi(x)\sqrt{-1},$$

con $\phi(x), \chi(x)$ funciones reales de variable real. Una definición análoga da para el caso de varias variables:

> "Del mismo modo, si designamos por $\phi(x, y, z \ldots), \chi(x, y, z \ldots)$ dos funciones reales de variables [reales] $x, y, z \ldots$,
>
> $$\varpi(x, y, z \ldots) = \phi(x, y, z \ldots) + \chi(x, y, z \ldots)\sqrt{-1}$$
>
> es una función imaginaria de varias variables." (Cauchy, 1821: 247)

Por lo tanto, podemos concluir que la estructura de las funciones imaginarias consideradas por Cauchy en el *Course d'Analyse* es la siguiente: si $\phi, \chi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, entonces la función $\varpi(x, y, z, \ldots)$ es de la forma $\varpi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathcal{I}_{\mathbb{C}}$, siendo $\mathcal{I}_{\mathbb{C}} = \left\{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

En este capítulo, Cauchy realiza un análisis análogo al que ya hizo sobre las funciones reales de varias variables, es decir, tomando como punto de partida y piedra angular a la noción de límite, en concordancia con lo escrito en la introducción de la obra: "Al hablar de la continuidad de funciones *no podremos pasarnos sin explicar* las principales propiedades de las *cantidades infinitamente pequeñas*, propiedades que *servirán como base del cálculo infinitesimal*"[19] (Cauchy, 1821: i-ij).

Antes de continuar, cabe destacar, retomando la crítica de nuestro matemático a los 'razonamientos generales del álgebra' mencionada en la subsección 1.2, que Cauchy elimina de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos matemáticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, apoyados, hasta entonces, en una intuición geométrica que quedará eliminada.

Ahora bien, en los preliminares, Cauchy nos da la siguiente definición de 'variable': "Se llama cantidad *variable* a aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes unos de otros" (Cauchy, 1821: 4), con lo cual llegamos a la siguiente definición de límite:

> "Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una variable dada se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban por

[19]La cursiva es nuestra.

> diferir de él tan poco como se quiera, entonces este último valor recibe el nombre de *límite* de todos los otros." (Cauchy, 1821: 4)

Uno de los usos que Cauchy hace de esta definición es para dar la siguiente conceptualización de infinitésimo: "Decimos que una cantidad variable se hace *infinitamente pequeña*, cuando su valor numérico [i.e., su valor absoluto] decrece indefinidamente de manera que converge al límite cero" (Cauchy, 1821: 26).[20] Podemos interpretar, entonces, que los diferentes valores de la "cantidad variable" corresponden a una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y que esta sucesión tiene límite cero, es decir que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Las definiciones de límite e infinitésimo plantean algunas cuestiones importantes a tener en cuenta para una caracterización del análisis matemático de Cauchy. En la tradición matemática contemporánea a nuestros días, la palabra *variable* designa un símbolo; así por ejemplo, la variable x no es más que un símbolo que representa, indistintamente, un valor arbitrario de entre una cierta colección de valores, pero *no* representa una cantidad variable, porque tal cantidad no existe (Grattan-Guinness, 2000 [1980]: 110). Pero esta acepción se introdujo como consecuencia del estudio de los fundamentos de la matemática, de modo que los textos matemáticos anteriores eran, con frecuencia, muy poco claros al respecto, siendo la definición de infinitésimo de Cauchy un buen ejemplo.

Una vez aclarado esto, podemos interpretar la definición de variable imaginaria de la siguiente manera: sean $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales, entonces la variable imaginaria $u_n + v_n\sqrt{-1}$ converge a $U + V\sqrt{-1}$, o equivalentemente $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n + v_n\sqrt{-1}\right) = U + V\sqrt{-1}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U$ y $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = V$.

Procedamos, ahora, a analizar la definición de *infinitésimo imaginario*:

> "Una expresión imaginaria variable se llama *infinitamente pequeña*, cuando converge al límite cero; lo que implica que la expresión dada en la parte real y en el coeficiente de $\sqrt{-1}$ convergen juntos [lit. al mismo tiempo] hacia ese límite. Dicho esto, si representamos por
>
> $$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho\left(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta\right)$$
>
> una expresión imaginaria variable, [entonces] α, β designan dos cantidades reales, que pueden ser sustituidas por el módulo ρ y el arco [ángulo] real

[20]En realidad, la primera vez que la noción de infinitésimo aparece en la obra es en la página 4 de los preliminares.

> θ. Para que esta expresión sea infinitamente pequeña, evidentemente es condición necesaria y suficiente que el módulo mismo
>
> $$\rho = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$$
>
> sea infinitamente pequeño." (Cauchy, 1821: 250)

Por lo tanto, la definicii'on de infinitésimo imaginario es una extensión de la definición de infinitésimo real. Lo mismo sucede con su definición de continuidad de la función imaginaria $\varpi(x)$, establecida a partir de la continuidad de $\phi(x)$ y $\chi(x)$:

> "Un función imaginaria de la variable real x, se denomina *continua* entre dos límites dados de esta variable [i.e., para los valores de x comprendidos en un intervalo determinado], cuando, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño en la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño en la función misma. De ello se deduce que la función imaginaria
>
> $$\phi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$$
>
> es continua entre dos límites dados de la variable x, si las funciones reales $\phi(x)$ y $\chi(x)$ siguen siendo continuas entre estos límites." (Cauchy, 1821: 250-251)

Para comprender mejor esta definición, debemos remitirnos a la noción de continuidad de funciones reales de una variable real presente en el capítulo 2 del *Cours d'Analyse*:

> "Sea $f(x)$ una función de la variable x y supongamos que, para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. **Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites,** se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función recibirá como crecimiento la diferencia $f(x+\alpha) - f(x)$, que **dependerá** al mismo tiempo de la nueva variable α y **del valor de** x. Dicho esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, función *continua* de esta variable, si, **para cada valor de x intermedio entre estos límites**, el valor numérico [absoluto] de la diferencia $f(x+\alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con el de α. En otros términos, *la función $f(x)$ permanecerá continua con respecto*

a x entre los límites dados, si, entre estos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma." (Cauchy, 1821: 34-35)[21]

Si hacemos hincapié en las partes resaltadas de esta cita, podemos comprobar que Cauchy considera un x fijo y que si, para ese x fijo, se verifica la condición enunciada de continuidad en un punto, entonces la función f es continua en todo el intervalo. Es decir que, usando la notación actual, la función $f(x)$ es continua en el intervalo real (a,b) si, para cada $x \in (a,b)$ fijo, $\alpha \to 0$ implica que $|f(x+\alpha)-f(x)| = |f(x+\alpha)-f(x)| \to 0$; más aún, dado $x \in (a,b)$, si fijamos $\varepsilon > 0$, para cada sucesión de números $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $a_n \to 0$ y, por tanto, $x + a_n \to x$, se sigue que $|f(x+a_n) - f(x)| = f(x+a_n) - f(x) < \varepsilon$, y si ello ocurre $\forall x \in (a,b)$, entonces se dice que f es continua en todo el intervalo (a,b). Tenemos así, de este modo, una definición análoga a nuestra actual definición sucesional de continuidad de una función. Ahora bien, si consideramos la función imaginaria $\varpi(x) = \phi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$, $\varpi(x)$ es continua en todo el intervalo real (a,b) si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) Si para cada $x \in (a,b)$ fijo, $\alpha \to 0$ implica que $|\phi(x+\alpha) - \phi(x)| = |\phi(x+\alpha) - \phi(x)| \to 0$; más aún, si fijamos $\varepsilon > 0$, si $x + a_n \to x$, con $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de números tal que $a_n \to 0$, entonces $|\phi(x+a_n)-\phi(x)| = |\phi(x+a_n) - \phi(x)| < \varepsilon$.

(b) Si para cada $x \in (a,b)$ fijo, $\alpha \to 0$ implica que $|\chi(x+\alpha) - \chi(x)| = |\chi(x+\alpha) - \chi(x)| \to 0$; más aún, si fijamos $\varepsilon > 0$, si $x + b_n \to x$, con $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de números tal que $b_n \to 0$, entonces $|\chi(x+a_n)-\chi(x)| = |\chi(x+a_n) - \chi(x)| < \varepsilon$.

Por lo tanto, vemos así que, en definitiva, la noción de continuidad del tipo de funciones imaginarias consideradas por Cauchy no es más que una extensión de la definición de continuidad de una función real aplicada a las componentes $\phi(x)$ y $\chi(x)$, con $x \in \mathbb{R}$.

[21] El resaltado es nuestro, mientras que la cursiva correspode al texto original. Notemos que Cauchy, al hablar de "incremento de la función", en vez de variación en su valor, muestra su hábito de centrarse en las funciones monótonas crecientes o, equivalentemente, de no tener en cuenta los valores negativos de los incrementos, y de identificar una función con su valor. Cauchy, además, menciona los valores absolutos (o 'numéricos', para él) y tiene también en claro que una función tiene que ser uniforme, algo que no sucedía con muchos de los matemáticos del siglo XVIII que le precedieron. Para más observaciones, Cfr. Grattan-Guinness (2000 [1980]: 110-111).

Refiriéndonos ahora al caso de las funciones reales de varias variables reales, Cauchy generaliza la noción de continuidad arguyendo que si la función $f(x, y, z, \ldots)$ es continua respecto de cada una de sus variables, separadamente, entonces la función es continua globalmente respecto de todas sus variables (Cauchy, 1821: 37-39); en otras palabras (utilizando notación actual), si

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} f(x+\alpha, y, z, \ldots) &= f(x, y, z, \ldots) \\
\lim_{\beta \to 0} f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots) &= f(x+\alpha, y, z, \ldots) \\
\lim_{\gamma \to 0} f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) &= f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots) \\
\vdots \quad &\quad \vdots
\end{aligned}
$$

entonces vale que:

$$\lim_{(\alpha,\beta,\gamma,\cdots) \to (0,0,0,\cdots)} f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) = f(x, y, z, \ldots).$$

Sin embargo, esta afirmación es *falsa*, pues la existencia de los límites reiterados *no* garantiza la existencia del límite de la función. Por lo tanto, aquí evidenciamos que aun no se había 'afinado' suficientemente el concepto de continuidad, lo que se producirá recién después de 1870 con Heine y el desarrollo del concepto de continuidad uniforme (Pérez-Fernández & Aizpuru, 1999: 14). Así como nuestro matemático comete este 'error' para el caso de funciones reales de varias variables reales, sucede lo mismo para las funciones imaginarias de varias variables reales por él estudiadas, lo cual aparece escrito en el *Course d'Analyse* de la siguiente manera:

> "1er TEOREMA. *Si las variables reales $x, y, z \ldots$ tienen por límites* [respectivos] *las cantidades fijas y determinadas $X, Y, Z \ldots$, y si la función imaginaria*
>
> $$\phi(x, y, z \ldots) + \chi(x, y, z \ldots)\sqrt{-1}$$
>
> *es continua con respecto a cada una de las variables $x, y, z \ldots$ en el entorno del sistema de valores particulares*
>
> $$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad \&c \ldots,$$
>
> [entonces]
>
> $$\phi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$$
>
> *tendrá por límite* [a]
>
> $$\phi(X, Y, Z, \ldots) + \chi(X, Y, Z, \ldots)\sqrt{-1},$$

o bien si, por razones de brevedad, [hacemos]

$$\phi(x, y, z \ldots) + \chi(x, y, z \ldots)\sqrt{-1} = \varpi(x, y, z \ldots),$$

[entonces] $\varpi(x, y, z, \ldots)$ *tendrá por límite* [a] $\varpi(X, Y, Z, \ldots)$." (Cauchy, 1821: 251-252)

Por último, en el capítulo 9, cuando se refiere a las *series imaginarias*, lleva a cabo el mismo proceso de generalización a partir de las series reales, tal como lo hizo para el caso de las funciones imaginarias (a partir de las funciones reales). Así, define[22] la serie compleja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right),$$

con $p_n, q_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, a partir de las dos series reales $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$, y la *convergencia* de tal serie imaginaria a partir del límite de la sucesión de sumas parciales $\sum\limits_{n=0}^{N} \left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right)$, enunciando, de este modo, que la serie imaginaria es convergente si y sólo si las dos series reales componentes sos convergentes (Cauchy, 1821: 274 *ss.*).

3 Consideraciones finales

A lo largo de las páginas anteriores hemos visto cómo, en el *Course d'Analyse*, Cauchy estructura su teoría de los números imaginarios a partir de los números reales, estableciendo la correspondencia $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathcal{I}_{\mathbb{C}}$, donde $\mathbb{R}^k = \{(x, y, z, \cdots) : x, y, z, \cdots \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{C}} = \left\{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$; notemos que, como conjuntos, $\mathcal{I}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$, pero preferimos usar la notación $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}$ (resaltando la $\mathcal{I}$ de "imaginarios"), en vez de la actual $\mathbb{C}$, para hacer hincapié en la interpretación de nuestro matemático de que un número imaginario arbitrario es, al no representar nada "real", sólo una expresión simbólica que involucra una combinación lineal de

[22] Puesto que no es nuestro objetivo analizar los resultados expuestos por Cauchy sobre las series imaginarias, sino que lo que hacemos es sólo una breve mención para notar la analogía con el caso de las funciones imaginarias ya analizadas, preferimos, directamente, emplear nuestra notación actual.

números reales. Es decir que, mientras que para Jean-Robert Argand (1768-1822) la expresión $a + b\sqrt{-1}$ representaba una semirrecta dirigida en el plano (Flament, 2013: 12) y, por lo tanto, $\sqrt{-1}$ tiene un 'sentido' geométrico, para Cauchy $\sqrt{-1}$ carece de significado. De este modo, si $\mathcal{O}$ es el 'objeto' matemático dado por los números imaginarios, a lo largo de su obra vemos que $\mathcal{O}$ está "restringido" a $\mathcal{O}^a$, es decir $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}^a$, siendo $\mathcal{O}^a$ la representación semiótica de los números imaginarios en un registro semiótico escrito-algebraico. Luego, una primera conclusión a la que arribamos es que Cauchy descarta la conversión semiótica $C^{\mathcal{O}} : r^a(\mathcal{O}^a) \to r^g(\mathcal{O}^g)$ dada de la representación algebraica de $\mathcal{O}$ a la representación geométrica de $\mathcal{O}$, y viceversa.

Ahora bien, dentro del conjunto $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}$, lleva a cabo una distinción entre dos representaciones semióticas, a las que convenimos en denotar de la siguiente manera:

- $r_1^a(\mathcal{O}^a)$: representación binómica de un número imaginario, esto es, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

- $r_2^a(\mathcal{O}^a)$: representación polar de un número imaginario, esto es, $\rho\left(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta\right)$.

A partir de estas dos representaciones, en la enunciación y demostración de los diferentes resultados matemáticos, apela a dos tipos de tratamientos semióticos entre tales representaciones, a saber, $T_1^{\mathcal{O}} : r_1^a(\mathcal{O}^a) \to r_2^a(\mathcal{O}^a)$ y $T_2^{\mathcal{O}} : r_2^a(\mathcal{O}^a) \to r_1^a(\mathcal{O}^a)$.[23]

Las operaciones semióticas llevadas a cabo por Cauchy se resumen, entonces, en el diagrama de abajo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "\mathcal{O}^a"] & \boxed{\mathcal{I}_{\mathbb{C}}} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& \boxed{r_1^a(\mathcal{O}^a)} \arrow[r, shift left, "T_1^{\mathcal{O}}"] & \boxed{r_2^a(\mathcal{O}^a)} \arrow[l, shift left, "T_2^{\mathcal{O}}"]
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, a través de estas operaciones, confirmamos el carácter secuencial del *Cours d'Analyse*, descrito por Paul Ernest para cualquier texto matemático en general. El objetivo de tal secuencia es, en última instancia, la

[23] Cfr. también, a modo de ejemplo, "Sur les racines imaginaires des équations", en: Cauchy (1905: 258-263).

generalización de resultados ya demostrados de los números reales a los números imaginarios, generalizaciones –debidamente demostradas– que son válidas de realizar en tanto que, como ya dijimos, una expresión imaginaria representa, solamente, y semióticamente hablando, una combinación lineal de un par de números reales α y β arbitrarios por un factor $\sqrt{-1}$ sin significado 'real' alguno.

4 Bibliografía

1. Alonso, F. & Gerván, H. (2014). Análisis de la práctica matemática desde la semiótica. Estudio de un caso. En Visokolskis, S. (comp.), *Fronteras de la matemática. Aspectos matemáticos abordados histórica, filosófica y didácticamente*. En prensa.
2. Ariza, M. (2007). Una interpretación semiótica de los signos matemáticos. *Mathesis III*, 2 (2), 1-25.
3. Belhoste, B. (1991). *Augustin-Louis Cauchy. A Biography.* New York: Springer-Verlag.
4. Bell. E. T. (2003) [1940]. *Historia de las matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.
5. Braudel, F. (1958). Histoire et Sciences sociales. Le longue durée. *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, 13 (4), 725-753.
6. Braudel, F. (1970). *La Historia y las Ciencias Sociales.* Madrid: Alianza.
7. Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique.* París: Libraires du Roi et de la Bibliothéque du Roi.
8. Cauchy, A.-L. (1905). *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique*, II^{e} série, tome I. París: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire de Bureau des Longitudes, de l'École Politechnique.
9. Chevallard, Y. (2000). *La transposición didı'actica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.
10. CP = Peirce, C. S. (1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Vol. I-VI ed. Ch. Hartshorne & P. Weiss, 1931-1935, Vol. VII-VIII ed. A. W. Burks). Cambridge, MA: Harvard University Press.
11. D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 35, 90-106.

12. D'Amore, B. (2012). El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". En AA.VV., *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas* (pp. 17-46). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

13. Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime*, número especial, 45-81.

14. Ernest, P. (2006). A Semiotic Perspective of Mathematical Activity: The Case of Number. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 67-101.

15. Ernest, P. (2008a). Towards a Semiotic of Mathematical Text (Part 1). *For the Learning of Mathematics*, 28 (1), 2-8.

16. Ernest, P. (2008b). Towards a Semiotic of Mathematical Text (Part 1). *For the Learning of Mathematics*, 28 (2), 39-47.

17. Ernest, P. (2008c). Towards a Semiotic of Mathematical Text (Part 1). *For the Learning of Mathematics*, 28 (3), 42-49.

18. Flament, D. (2013). *Constitution du nombre complexe. Résumé.* Manuscrito.

19. Grattan-Guinness, I. (2000) [1980]. The Emergence of Mathematical Analysis and Its Foundational Progress, 1780-1880. En Grattan-Guinness, I. (ed.), *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History* (pp. 94-148). Princeton: Princeton University Press.

20. Hoffman, M. H. G. (2005). Signs and Means for Discoveries: Peirce and His Concepts of "Diagrammatic Reasoning," "Theorematic Deduction," "Hypostatic Abstraction," and "Theoric Transformation". En Hoffman, M. H. G. Lenhard, J. & Seeger, F. (eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (pp. 45-56). New York: Springer-Verlag.

21. Klimovsky, G. & Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción.* Buenos Aires: a-Z editora.

22. Marietti, S. (2005). The Semiotic Approach to Mathematical Evidence and Generalization. En Hoffman, M. H. G., Lenhard, J. & Seeger, F. (eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (pp. 35-43). New York: Springer-Verlag.

23. Nahin, P. (2006) [1998]. *An Imaginary Tale. The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton & Oxford: Princeton University Press.

24. NEM = Peirce, C. S. (1976). *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce*, Vols. I-IV, ed. C. Eisele. The Hague-Paris/Atlantic Highlands: Mouton/Humanities Press.

25. Otte, M. (2006). Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 11-38.

26. Pérez-Fernández, F. J. & Aizpuru, A. (1999). El Cours d'Analyse de Cauchy. *Suma*, 30, 5-25.

27. Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sing? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 133-162.

Héctor Horacio Gerván
Profesor en Matemática (FaMAF-UNC).
Profesor adscripto en la cátedra *Filosofía de la Matemática* (Escuela de Filosofía, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba).
Profesor adscripto en la cátedra *Historia y Fundamentos de la Matemática* (Instituto Académico-Pedagógico de Ciencias Humanas, Universidad Nacional de Villa María).
Docente de nivel medio (Instituto Nuestra Señora del Huerto).

hectorg.horacio@gmail.com