Stoa
Vol. 14, no. 27, 2023, pp. 17-33
ISSN 2007-1868

¿DESCUBRIR LA ESTRUCTURA LÓGICA DE UNA TEORÍA IMPLICA MATEMATIZARLA?

Discovering the logical structure of a theory implies its mathematization?

ALFONSO ÁVILA DEL PALACIO
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Juárez del Estado de Durango
acavila@dgo.megared.net.mx

RESUMEN: Adolfo García de la Sienra ha reconstruido varias teorías económicas descubriendo su estructura lógica. Con ese trabajo, ¿ha matematizado esas teorías, o sólo ha develado su estructura lógica? Para sugerir una posible respuesta, en este trabajo, examinaremos aquí la estructura lógica del primer tratado lógico: la silogística. Examinando lógicamente este tratado de Aristóteles, encontramos que en realidad los *Primeros analíticos* son ya, desde su origen, una teoría matemática. Este resultado no da una respuesta a la pregunta planteada, pero sugiere que en ocasiones las teorías no necesitan ser matematizadas, porque ya son matemáticas, al menos en parte.

PALABRAS CLAVE: *Primeros analíticos* · Aristóteles · estructura lógica · formalización

ABSTRACT: Adolfo García de la Sienra has reconstructed several economic theories discovering their logical structure. With this work, has he mathematized those theories, or has he only revealed their logical structure? To suggest a possible answer, we will examine here the logical structure of the first logical treatise: the syllogistics. Examining logically this treatise of Aristotle's, we find that in reality the *First Analytics* is already, from its origin, a mathematical theory. This result does not provide an answer to the question posed, but suggest that sometimes theories do not need to be mathematized, because they are already mathematical, at least in part.

Recibido el 12 de enero de 2022
Aceptado el 5 de junio de 2022

KEYWORDS: First Analytics · Aristotle · logical structure · formalization

1. Introducción

El amor a la sabiduría de Adolfo García de la Sienra, lector insaciable desde niño, lo llevó a la filosofía por eliminación, como él mismo dijo en una entrevista (Almanza y Hernández 2019); y de su curiosidad por la obra de Marx, aunque no se hizo marxista, devino en un economista, como le sucedió al mismo Marx. Con todo ello, Adolfo García de la Sienra ha llegado a ser un referente cuando se trata de la estructura lógica de la Teoría Matemática de Juegos y de muy diversas teorías económicas, incluso rivales, como son la Teoría del Valor de Marx y la propuesta subjetivista de los neoclásicos. Lo cual puede verse con detalle en García de la Sienra (2019). Acerca de la teoría de Marx y la de los neoclásicos, que para muchos eran diametralmente diferentes, Adolfo encontró que su estructura lógica, como también la de otras teorías económicas, descansa en la Teoría de Juegos. Dicho de otra manera, esas teorías pueden verse sólo como juegos diferentes, como lo son el ajedrez y el póker.

A Adolfo le gustó la Lógica desde que empezó a estudiar filosofía por la claridad y precisión de esta disciplina (véase Almanza y Hernández 2019); y desde ahí, analizó diferentes teorías matemáticas y económicas. Lo cual se refleja en su estilo claro y preciso con el que aborda todas las cuestiones que analiza, no sólo en la ciencia, sino incluso en cuestiones religiosas. Para homenajear a Adolfo García de la Sienra, colega, amigo y maestro al que admiro por sus aportaciones a la filosofía de la ciencia, por su erudición, su rigor y por su honestidad intelectual, quiero en esta ocasión centrarme en la Lógica misma como herramienta del pensamiento filosófico; y al respecto, quiero formular la siguiente pregunta: cuando encontramos la estructura lógica de una teoría, ¿estamos haciendo sólo eso? ¿O estamos matematizando esa teoría? Esta pregunta, si nos situamos en la Concepción Estructuralista de Balzer, Moulines y Sneed (2012), en donde Adolfo ha realizado muchos de sus trabajos, tendría que ser contestada para cada caso en particular. La Concepción Estructuralista, aunque en ocasiones generaliza, como lo hace un poco en Balzer, Moulines y Sneed (2019), lo hace con mucha prudencia y anclada siempre en casos concretos. Por ello, intentaremos proponer una respuesta a la pregunta planteada sólo para un caso muy simple: la Silogística Aristotélica vista como una teoría de ciertas argumentaciones. La respuesta que demos en ese caso, puede, al menos, guiarnos para casos más complejos, como los que ha trabajado Adolfo. Por ello, examinaremos justo el inicio de esa disciplina que ha cultivado Adolfo con pasión y que ha admirado desde el inicio de su carrera filosófica.

Siguiendo, pues, esa línea de pensamiento, como creo que lo haría el propio Adolfo García de la Sienra, hagamos un análisis lógico de *Los Primeros Analíticos* de Aristóteles con la intención de develar su estructura lógica.

2. Síntesis de la argumentación

Primera Premisa: De acuerdo a la concepción estructuralista de Resnik (1997), Shapiro (1997) y otros, las matemáticas consisten en crear estructuras, las cuales son entes abstractos que cumplen unos axiomas concretos para deducir propiedades sobre ellas por medio de la lógica formal. En palabras de Vélez (2013):

> El punto de vista de estos estructuralistas generaliza la visión de las teorías matemáticas como ciencias de estructuras, entendiendo por 'estructura' un cierto tipo de 'patrón'. Así, toda teoría matemática es una teoría sobre alguna estructura dada, y cada estructura construiría un patrón en el que los objetos matemáticos no son otra cosa que posiciones. (ibídem, p. 7)

Resnik (1997) lo expresa como sigue:

> Los objetos matemáticos son posiciones abstractas sin rasgos distintivos en estructuras (o, más sugestivamente, en patrones); mis objetos matemáticos paradigmáticos son los puntos geométricos, cuyas identidades están fijadas solamente a través de sus relaciones con cada uno de los otros. (ibídem, pp. 72-73)

Por su parte Shapiro (1997) define una estructura como "la forma abstracta de un sistema, destacando las interrelaciones entre los objetos, e ignorando cualquier rasgo de ellos que no afecte el modo como se relacionan con otros objetos en el sistema" (ibídem, p. 74).

Tomando en cuenta lo anterior, podemos simbolizar esa concepción sobre las matemáticas en términos de conjuntos de la siguiente forma: $M \subseteq EAF$; es decir, la matemática consiste en estructuras abstractas formalizadas. Esta concepción es discutible porque algunos matemáticos, como Polya (1957), Hersh (1981) y Byers (2007), entre otros, dicen que la matemática es más que eso. Lo que tal vez podríamos decir es que toda Estructura Abstracta Formalizada es matemática ($EAF \subseteq M$); lo cual habría que probarse, claro. No obstante, sin probar esta última afirmación, la tomaremos como una premisa en este trabajo. En todo caso, nuestra argumentación tendrá la forma de un condicional cuyo antecedente sería $\mathrm{EAF} \subseteq \mathrm{M}$.

Segunda Premisa: Los *Primeros analíticos* de Aristóteles parten del lenguaje natural y arriban al mundo abstracto de los silogismos. Formaliza con palabras y unos cuantos símbolos los términos para sujetos y predicados y las proposiciones que se arman con ellos, destacando entre ellas las afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas. Con esos elementos, mediante un razonamiento abstracto, encuentra leyes del comportamiento de las afirmaciones cuando se desprenden unas de otras. De esa forma, crea una estructura abstracta que puede aplicarse en diversos argumentos correctos:

$$((\text{Afirmación } X)\ \&\ (\text{Afirmación } Y)) \Rightarrow (\text{Afirmación } Z);$$

cuyos elementos son X, Y, Z y sus relaciones básicas son & y $\Rightarrow$. Con lo cual estamos diciendo que los *Primeros analíticos* son una estructura abstracta formalizada; es decir que $s \in \mathrm{EAF}$, donde 's' simboliza a los *Primeros analíticos*.

Conclusión: Haciendo un silogismo de la Primera Figura[1] con las premisas anteriores, nos quedaría como sigue:[2]

$$((\mathrm{EAF} \subseteq \mathrm{M}) \& (s \in \mathrm{EAF})) \Rightarrow (s \in \mathrm{M})$$

Es decir que los *Primeros analíticos* es una teoría matemática semejante a la Aritmética o la Geometría. Pero desarrollemos esta argumentación con mayor detalle.

3. Preámbulo

Frege en los *Fundamentos de la aritmética* (1972b) intentó probar que la Aritmética, como parte fundamental de la Matemática, era una parte de

[1] Agradezco enormemente a mi colega y amigo Gerardo Aguirre Calderón el haberme sugerido que usara la Primera Figura y no la Segunda como había tratado de hacerlo en mi argumentación; lo cual, como él me hizo ver, no me permitía concluir lo que quiero concluir, es decir que los *Primeros analíticos* son una teoría matemática.

[2] Ahora bien ¿por qué $\mathrm{EAF} \subseteq \mathrm{M}$ y $s \in \mathrm{EAF}$ si decimos que tanto la matemática, al menos en parte, al igual que la silogística, consiste en estructuras abstractas formalizadas? La idea de distinguir entre un subconjunto y un elemento es que la matemática está compuesta de varias estructuras, es un conjunto de estructuras y de algo más, seguramente; mientras que la silogística es una estructura específica: el silogismo.

la Lógica ($M \subseteq L$); para lo cual, estableció primero en su *Conceptografía* (1972a) la Lógica que le iba a servir para ese propósito. Aquí trataré de sugerir lo contrario, que la Lógica es parte de la Matemática ($L \subseteq M$). Para lo cual me basaré en la caracterización de la matemática que hemos esbozado arriba; es decir, que la matemática consiste en estructuras abstractas formalizadas, según los estructuralistas; y algo más, según otros teóricos. Pero toda estructura abstracta formalizada es matemática, según lo estamos suponiendo aquí.

La idea de que la Lógica es una teoría matemática se la oí primero a Luis Estrada y luego la leí en uno de sus trabajos que cito a continuación:

> En la lógica, a diferencia del resto de la filosofía, hay consenso y progreso a partir de Frege, porque la lógica moderna es una teoría matemática.... La lógica pura es una teoría matemática que estudia ciertas estructuras matemáticas; [mientras que] la lógica aplicada es una teoría de la evaluación de argumentos en el lenguaje ordinario y en la ciencia... Por otra parte, la lógica es parte de la filosofía, pero donde no hay debate a diferencia del resto de la filosofía. (Cohnitz y Estrada 2019, pp. 1 y 3)

Inspirado por esas ideas, aunque no coincidiendo del todo con ellas, en este trabajo no hablaré de toda la Lógica, o de todas las lógicas porque hoy día hay muchas; sólo analizaré la Lógica de Aristóteles y ni siquiera toda ella, sólo la Silogística que expone en los *Primeros analíticos*. Trataré de probar que ésta es una teoría matemática; es decir, que podemos verla como formando parte de la matemática, al igual que la Aritmética, la Geometría, la Teoría de Conjuntos, etcétera.

4. La Silogística de Aristóteles

La lógica silogística de Aristóteles trabaja con entidades abstractas que define y manipula basándose solamente en las definiciones dadas. Entidades, expresiones y conectivas que recoge del lenguaje natural y que, como dijimos arriba, formaliza con palabras y unos pocos símbolos, despojándolas de sus referentes para centrarse sólo en ellas mismas; a semejanza de como los números abstractos fueron despojados de sus referentes más allá de ellos mismos. En vez de hablar de tres manzanas o tres peras, la matemática habla solamente del 3: el 3 es sólo 3. O, en todo caso, el 3 remite a su definición: 3 = III; donde I es algo también abstracto, algo puramente matemático sin referente alguno. Como dijo Cavailles (1938, p. 172), la matemática habla sólo de la matemática: “No hay definición, ni justificación de los objetos matemáticos, excepto la matemática misma”.

Como es sabido el llamado *Organón*, o tratado de Lógica de Aristóteles está compuesto de seis libros o tratados: *Categorías, Peri Hermeneias, Primeros analíticos, Segundos analíticos, Tópicos y Refutaciones sofistas*. En este trabajo nos centraremos sólo en los tres primeros.

4.1. Las Categorías

En el libro *Categorías*, Aristóteles enumera las diez categorías que expresan las palabras o, más bien, específicamente los conceptos, tomados aisladamente: Sustancia (hombre, caballo), Cantidad (dos codos, tres codos), Cualidad (blanco, gramatical), Relación (doble, mitad), Lugar (en la plaza), Tiempo (ayer, el año pasado), Situación (estar acostado), Estado (estar armado), Acción (cortar, quemar), Pasión (ser cortado). (Cap. 4, §3)

"Mediante la combinación de estas palabras, o conceptos, se forman las afirmaciones. Éstas deben ser, necesariamente, verdaderas o falsas" (Cap. 4, §3). Las afirmaciones expresan la idea de que una de esas categorías puede atribuirse a otra categoría. Por ejemplo, a la Sustancia "caballo" se le puede atribuir la cualidad de "blanco"; o a la Situación "estar acostado" se le puede aplicar el Tiempo "ayer", etcétera. Lo que quiere decir que una puede actuar de sujeto y otra de predicado; siendo, en realidad, todas las categorías conceptos o grupos de cosas. Cuando digo "caballo" me estoy refiriendo a todos los caballos. En ese sentido, Aristóteles no habla aquí de individuos; sólo de grupos de cosas. Más adelante, en los *Primeros analíticos*, los simboliza con letras mayúsculas: A, B, C, ... (con letras griegas, claro), siguiendo la práctica de los matemáticos de simbolizar para simplificar las expresiones. Dentro de esta simbología, en estos libros de Aristóteles no hay símbolos que representen individuos como si los hay, por ejemplo, en la teoría de conjuntos, donde se distingue entre $\alpha \in A$ y $A \subseteq B$. En estas expresiones A y B son conjuntos y α es un individuo.

3.2. Peri Hermeneias

En este libro de Aristóteles, dedicado a las proposiciones, se insiste en la idea de que un enunciado es la expresión de un juicio, a saber de una predicación, la cual, por necesidad, es verdadera o es falsa: no se trata de órdenes, preguntas u otros enunciados que no puedan ser verdaderos o falsos.

"La afirmación es la enunciación que atribuye una cosa a otra" (Cap. 6, §1); y éstas pueden ser universales e individuales. "Entiendo por universal [dice Aristóteles] lo que por su naturaleza puede atribuirse a muchos; y por individual lo que no puede atribuirse de ese modo” (Cap. 7, §1).

Habrá que hacer notar que Aristóteles, como ya se dijo arriba, no habla directamente de individuos. Una afirmación es universal o no es universal. “Todos los perros ladran” es universal” y “No todos los pájaros cantan” es individual según la clasificación dada por Aristóteles. Esta clasificación se parece a la que emplea Frege (1972b) en su *Conceptografía* cuando explica su simbología para un juicio universal:

$$\vdash \alpha - X(\alpha)$$

significa que todas las α tienen la propiedad X. Por otro lado,

$$\vdash \neg\alpha - X(\alpha)$$

significa que no toda α tiene la propiedad X, o bien, “que hay algunas cosas que no tienen la propiedad X” (Frege 1972b, §12). Estas expresiones son recogidas en la lógica matemática con los símbolos $\forall$ para las expresiones universales y $\exists$ para las individuales.

4.2. Los *Primeros analíticos*

Aristóteles empieza este tratado, como todo buen libro de matemáticas, con definiciones. Entre éstas en el capítulo 1 están las siguientes:

- “La proposición es una enunciación que afirma o niega una cosa de otra” (§4)
- “Llamo universal cuando el atributo pertenece a toda la cosa...
- “Particular cuando el atributo se afirma o se niega de una parte de la cosa, o bien, cuando no pertenece a toda la cosa” (§5)
- “Llamo término al elemento de la proposición, es decir, al atributo o al sujeto que aquel se atribuye” (§7)
- “El silogismo es una enunciación en la que una vez sentadas ciertas proposiciones se concluye necesariamente en otra proposición diferente, sólo por el hecho de haber sido aquellas sentadas” (§8)
- “Decir que una cosa se atribuye a otra toda y entera, es decir, que no se supone que haya parte alguna del sujeto de que no pueda decirse la otra cosa” (§11)

A partir del capítulo 2, Aristóteles empieza a simbolizar los términos o conceptos de las proposiciones mediante letras mayúsculas (A, B, C, ...), como ya lo mencionamos, relacionándolas mediante las expresiones: "se atribuye a toda" ($\supseteq$), "no se atribuye a ninguna" ($\not\supseteq$), "se atribuye a alguna" ($\supset$), y "no se atribuye a alguna" ($\not\supset$). Cuatro conectivas entre términos, que Aristóteles no simboliza, pero que podemos representar nosotros con los símbolos que anotamos después de cada expresión.

Si adoptamos, pues, estos símbolos y las letras que usa Aristóteles, las proposiciones quedarían expresadas así:

> $A \supseteq B$ significa A se atribuye a toda B: "animal se atribuye a todo perro".
>
> $A \not\supseteq B$ significa A no se atribuye a ninguna B: "racional no se atribuye a ningún perro".
>
> $A \supset B$ significa A se atribuye a alguna B: "blanco se atribuye a algún caballo".
>
> $A \not\supset B$ significa A no se atribuye a alguna B: "negro no se atribuye a algún caballo"

Ahora bien, después de simbolizar las conectivas entre términos, simbolicemos también las conectivas entre proposiciones usadas por Aristóteles:

> '&' significa la conjunción que une dos proposiciones.
>
> '$\sim$' significa la negación de una proposición.
>
> '$\Rightarrow$' significa "es necesario que" o "la consecuencia lógica es": $\vdash$.
>
> '$\not\Rightarrow$' significa "no es necesario que" o "no se sigue que"

Una vez asentada las definiciones, Aristóteles en el capítulo 2 habla de las diferentes proposiciones y en qué casos son equivalentes o se desprende una de otra. Por ejemplo, dice:

"Si ningún placer es un bien, ningún bien es un placer" (§2):

$$(B \not\supseteq P) \rightarrow (P \not\supseteq B).$$

"Si todo placer es un bien, algún bien es un placer" (§3):

$$(B \supseteq P) \rightarrow (P \supseteq B).$$

"Si algún placer es un bien, algún bien es un placer" (§4):

$$(B \supset P) \rightarrow (P \supseteq B).$$

Las proposiciones negativas quedarían como la siguiente:

"Si *A* no es atribuida a alguna *B*, no es necesario que *B* no sea a alguna *A*" (§9)

$$(A \not\supset B) \nRightarrow (B \not\supset A).$$

En el capítulo 4, Aristóteles inicia el estudio de los silogismos con las siguientes definiciones:

- Cuando tres términos están entre sí en tal relación que el último está en la totalidad del medio y el medio esté o no en la totalidad del primero, es de necesidad que se forma silogismo completo con los extremos.
- Llamo medio al término que estando el mismo encerrado en otro, encierra él igualmente otro término.
- Los extremos son el término que está contenido en otro término y el término que contiene igualmente otro término.
- Por ejemplo si *A* se atribuye a toda *B* y *B* se atribuye a toda *C*, es necesario que *A* se atribuya a toda *C*. (4, §2-4)

Con la simbología propuesta, el ejemplo sería así:

$$((A \supseteq B)\ \&\ (B \supseteq C)) \Rightarrow (A \supseteq C).$$

En el capítulo 4, Aristóteles estudia lo que él mismo llama primera figura, es decir, cuando el término medio es el sujeto en la primera premisa y predicado en la segunda, como el siguiente:

$$((A \supseteq B)\ \&\ (B \supseteq C)) \Rightarrow (A \supseteq C):$$

Si todo hombre es mortal y todo británico es hombre, entonces todo británico es mortal.

La segunda figura (Cap. 5) es cuando el término medio es predicado en las dos premisas. Un ejemplo de esta figura sería:

$$((V \supseteq A)\ \&\ (V \not\supseteq M)) \Rightarrow (A \not\supseteq M):$$

Si a todo animal se atribuye estar vivo y a ningún mineral se atribuye estar vivo, entonces a ningún mineral se le atribuye ser animal.

La tercera figura (Cap. 6) es cuando el término medio es sujeto en las dos premisas. Un ejemplo de esta figura sería:

$$((V \supseteq A)\ \&\ (R \supseteq A)) \Rightarrow (R \supset V):$$

Si a todo animal se le atribuye estar vivo y a todo animal se le atribuye respirar, entonces a algún ser vivo se le atribuye respirar.

A partir de esas bases, Aristóteles analiza exhaustivamente las diferentes posibilidades y variantes de las tres figuras en el resto de los *Primeros analíticos*. De forma simplificada la estructura de un silogismo es:

$$((\text{Afirmación}X)\ \&\ (\text{Afirmación}Y)) \Rightarrow (\text{Afirmación}Z);$$

cuyos elementos son X, Y, Z y sus relaciones son &, $\Rightarrow$.

En los *Segundos analíticos*, Aristóteles estudia las demostraciones apoyándose en los silogismos ya analizados y continúa usando las letras mayúsculas para representar los términos de una proposición y facilitar la exposición. En los *Tópicos* trata de lo probable y en las *Refutaciones sofísticas* estudia las refutaciones. En estos dos últimos tratados ya no utiliza las letras mayúsculas para representar los términos de las proposiciones. Sólo menciono de pasada estos tres últimos libros, ya que, como lo dije al principio de este inciso, en este trabajo sólo me interesan los tres primeros libros del *Organón*.

5. Análisis del trabajo de Aristóteles

Aristóteles inicia su lógica a partir de un análisis del lenguaje proposicional. Por ello inicia en las *Categorías* analizando los conceptos, que él llama términos, los cuales pueden jugar el papel de sujetos o de predicados según la posición que ocupen en una proposición. En ese tratado describe exhaustivamente, según su costumbre, lo que pueden expresar los términos: una sustancia, una cualidad, etcétera. No habla de individuos propiamente dichos, como lo especificamos arriba. De manera que si estuviéramos en un lenguaje de conjuntos, es decir de conceptos tomados extensionalmente, tendríamos una ontología en la que sólo hay conjuntos y sus relaciones.

El punto de partida son los conjuntos de cosas que son recogidos en las categorías que describe Aristóteles. Por supuesto que para llegar a ellos ya se dio un acto de abstracción consistenete en que a partir de la experiencia de las cosas individuales se recogió lo común a todas ellas mediante una palabra, o término. Lo común puede ser su esencia, su color, su tamaño, etcétera; es decir, los llamados universales. Ese proceso lo dieron ciertos lenguajes específicos, como el griego que usaba Aristóteles. La verdad, no se si todos los lenguajes que usan los diferentes pueblos lo hacen. De cualquier forma, este paso es fundamental para construir posteriormente una lógica como la silogística.

El siguiente paso en el camino que siguieron algunos lenguajes fue la construcción de diversas expresiones en las que se combinan los términos o conceptos. De entre ellas, las afirmaciones son las que toma Aristóteles como básicas para su lógica. Otro tipo de expresiones, como las exclamaciones, preguntas o mandatos no interesan porque no son verdaderas o falsas. En las afirmaciones se atribuye una cosa a otra y esto puede ser cierto o no.

Una vez que algunos lenguajes naturales construyeron afirmaciones que podían ser verdaderas o falsas dependiendo de si correspondían o no a los hechos a los que se referían, los mismos lenguajes empezaron a relacionar las afirmaciones de diferentes formas. De entre estas formas de relacionar afirmaciones, se destaca particularmente una como la más relevante para la construcción de cualquier lógica: la relación de consecuencia. Un argumento es una secuencia de afirmaciones conectadas de tal manera que la última se desprende de las otras; es decir, es la consecuencia de aquellas. La Lógica es la disciplina que estudia la relación de consecuencia, estudia cuándo un argumento es correcto, cuando en efecto la última afirmación es la consecuencia de las otras afirmaciones.

Ahora bien, los argumentos pueden ser de muchos tipos, pero hay unos que están basados sólo en la estructura gramatical de la secuencia de afirmaciones; es decir, cuando podemos obtener una afirmación nueva basándonos solamente en la forma gramatical de la secuencia de afirmaciones que le anteceden, y sin importar el contenido de todas esas afirmaciones. Los silogismos que estudia Aristóteles son, justamente, argumentos de ese tipo, es decir estructuras puramente formales que garantizan la obtención de la nueva afirmación. Por eso Aristóteles propone, usando letras mayúsculas, argumentos correctos como el siguiente que usa las conectivas que propusimos arriba:

$$((A \supseteq B)\ \&\ (B \supseteq C)) \Rightarrow (A \supseteq C);$$

en el cual no interesa el significado de dichas letras mayúsculas que representan conceptos. En realidad se trata de una estructura gramatical que puede ser ejemplificada con diferentes conceptos. "El descubrimiento más importante de Aristóteles fue la idea de que una prueba consiste en inferir consecuencias a partir de premisas que sabemos que son verdaderas, es decir, en ver la prueba como Verdad y Consecuencia". (Corcoran 1992: 74)

"La práctica de la prueba demostrativa tuvo evidentemente sus raíces en Jonia en tiempos de Tales" (Corcoran 1992: 73) con los primeros teoremas conocidos. Con esos antecedentes conocidos por Aristóteles a través de Platón y los matemáticos de la Academia, según Corcoran (1992), Aristóteles, en vez de realizar pruebas sobre diferentes temas, se centró en las pruebas mismas llevando a cabo una revolución con ese cambio radical de enfoque. En vez de probar se centró en ver en qué consiste una prueba, y, por lo visto en el inciso anterior, lo hizo matemáticamente construyendo las estructuras abstractas que llamó silogismos.

Ahora bien, tal como lo expusimos arriba, Aristóteles define los términos, las afirmaciones, los silogismos y las conectivas que relacionan todo eso, básicamente: "se atribuye a" y "es necesario que"; las cuales, simbolizamos con los símbolos $\supseteq$, $\Rightarrow$ y sus variantes. Estas conectivas en palabras o en símbolos son entidades abstractas que no dependen de nada más que de sus propias definiciones. En ese sentido son como los números aritméticos o los conjuntos de la teoría de conjuntos.

> La matemática es una creación humana que a partir del mundo natural [a través del lenguaje en el caso de la silogística aristotélica] crea un mundo abstracto con individuos [términos, proposiciones], relaciones ["se atribuye a", "es necesario que"], etcétera, que una vez creado se independiza de sus orígenes y sigue sus propias reglas. (Ávila 2017: 112-113)

Por su parte, George Boole, al matematizar la lógica de Aristóteles dice lo siguiente:

> Quienes están informados del estado actual de la teoría del Algebra Simbólica saben que la validez de los procedimientos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos utilizados, sino exclusivamente de las leyes de su combinación.... Tomando como fundamento este principio general, me propongo establecer el Cálculo de la Lógica para el que reclamo un lugar entre las formas conocidas del Análisis Matemático. (Boole 1960: 11, 13)

Para llevar a cabo su matematización, Boole maneja como clases los grupos de objetos que tienen una propiedad, es decir, lo que definió Aristóteles en las *Categorías*, y da, por ejemplo, las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \text{La clase } X \text{ es} &: x \\ \text{La clase no } X \text{ es} &: 1 - x \\ \text{Todas las } X \text{ son } Y\text{, y todas las } Y \text{ son } X &: x = y \\ \text{Ninguna } X \text{ es } Y &: xy = 0 \end{aligned}$$

En las cuales, Boole utiliza exclusivamente el 0 y el 1, creando lo que luego se denominaría una aritmética binaria que fue utilizada posteriormente en la computación y otros campos con mucho éxito.

Tomando en cuenta la caracterización de la matemática expuesta por los estructuralistas en la introducción, y la expresada en las dos citas recién transcritas, la silogística expuesta en el inciso 3 es ya una teoría matemática. Del puño de Aristóteles es una teoría matemática no plenamente simbólica; pero puede fácilmente simbolizarse como se sugirió en ese mismo inciso. Por consiguiente, no necesita ser matematizada: ya está matematizada desde el momento que es una teoría puramente formal, que parte de definiciones, y cuyas conectivas son objetos abstractos, aunque descritos con palabras. De hecho, los silogismos aristotélicos son fórmulas matemáticas descritas verbalmente. Y, dado que tienen una estructura matemática, no es difícil simbolizarlos plenamente como lo hemos hecho arriba, o como lo propuso Boole.

Como dijo Corcoran (1992), "*Los Primeros analíticos* es el primer trabajo conocido que considera las pruebas como abstracciones atemporales disponibles para su investigación, de forma análoga al modo en que ya se consideraban los números y las figuras geométricas" (ibídem: 73).

Con el objeto de ver aun más claramente que el trabajo de Aristóteles es realmente un trabajo matemático veamos un trozo de matemática para ver el paralelismo. Como ejemplo de una demostración abstracta, veamos un teorema que presenta Euclides en sus *Elementos*, libro IX, Proposición 22 y dice así: "si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es par, el total será par". La prueba es como sigue: Digamos que tenemos los números impares A, B, C, y D, cuya cantidad de impares es par, entonces si quitamos una unidad a cada uno de ellos, obtendríamos puros números pares, cuya suma es par por un teorema anterior, y resulta que si sumamos las unidades que les quitamos, obtenemos también un numero par. Por consiguiente, el total es par.

Este teorema utiliza las definiciones 6 y 7 del libro VII, donde Euclides define un número par como aquel que se puede dividir en dos partes iguales, e impar como aquel que difiere en una unidad de un número par. También utiliza la Proposición 21 donde se prueba que la suma de números pares resulta en un número par. La prueba del Teorema 22 del libro IX supone implícitamente que al sumar números obtengo otro número, y que la suma consiste en juntar en un solo grupo, o pluralidad, las unidades de uno de los sumandos con las unidades del otro sumando. Y, dado que un número lo definió Euclides en la definición 2 del libro VII como "una pluralidad compuesta de unidades", la unión de unidades es también un número.

En función de esto, podemos decir que la prueba abstracta del Teorema 22 del libro IX se basa en ciertas definiciones que el mismo Euclides estableció con anterioridad. Si ya dijimos que esto es así y esto otro es así, de ahí se siguen ciertas consecuencias sin tener que recurrir a nada más que a lo previamente establecido.

Esto es justamente lo que hace Aristóteles cuando dice:

> El silogismo es una enunciación en la que una vez sentadas ciertas proposiciones se concluye necesariamente en otra proposición diferente, sólo por el hecho de haber sido aquellas sentadas (*Primeros analíticos*, Cap. 1, §8)

Así pues, si como supusimos al principio, toda estructura abstracta formalizada es matemática, los *Primeros analíticos* son un tratado matemático porque construye una estructura abstracta y su razonamiento es puramente formal. Este argumento en símbolos se puede expresar como sigue:

$$((\mathrm{EAF} \subseteq \mathrm{M})\ \&\ (s \in \mathrm{EAF})) \rightarrow (s \in \mathrm{M}).$$

El cual es un silogismo de la Primera Figura que además de usar las conectivas que emplea Aristóteles (&, $\Rightarrow$, según nuestra sugerencia), usa también las conectivas $\subseteq$, $\in$ de la teoría de conjuntos. No obstante, la expresión '$A \subseteq B$' es equivalente con nuestra simbología a '$(B \supseteq A)$'; y '$A \in B$' es equivalente a '$B \supseteq A$'. De manera que usando sólo la simbología que propusimos, el silogismo quedaría como sigue:

$$((\mathrm{M} \supseteq \mathrm{EAF})\ \&\ (\mathrm{EAF} \supset s)) \Rightarrow (\mathrm{M} \supset s).$$

El cual se leería de la siguiente forma: si matemático se atribuye a toda estructura abstracta formalizada y a algunos silogismos (los Aristotélicos) se les atribuye que son estructuras abstractas formalizadas, entonces es necesario que a esos silogismos se les atribuya que son matemáticos.

En síntesis, tal como lo expresamos en el resumen inicial de nuestra argumentación, en este trabajo hemos construido un silogismo mediante el cual pretendemos probar que los silogismos aristotélicos son matemáticos. Usamos la lógica de Aristóteles para probar una característica de ella misma. Si se acepta mi conclusión, podemos decir que usamos la matemática de Aristóteles para probar que ella misma es matemática. Para hacer esto, nos apoyamos en la idea de que la matemática es recursiva, lo cual significa que podemos aplicar la matemática a la matemática misma, tal como lo hace la metamatemática.

6. Conclusión

Examinando lógicamente la Silogística de Aristóteles, encontramos que en realidad los *Primeros analíticos* son ya, desde su origen, una teoría matemática. Lo cual no significa que toda la Lógica sea matemática. Para probar esto, o desmentirlo, se requeriría un trabajo mucho más amplio.

De cualquier forma, nuestro resultado parcial no da tampoco una respuesta a si ¿descubrir la estructura lógica de una teoría implica matematizarla? Pero sugiere que en ocasiones, al hacer el análisis lógico de una teoría, nos encontramos con que, en realidad se trata de una teoría matemática, como el caso examinado aquí. Aunque, en otras ocasiones, al reconstruir lógicamente una teoría, nos podemos encontrar con que no tiene una estructura matemática y, en ese caso, se podría matematizarla, si lo creemos conveniente. Esto, sobre todo, si aceptamos lo que dice Kant (1993: 102): "En toda teoría particular de la naturaleza, no podrá encontrarse ciencia *en sentido propio*, más que en la medida que pueda encontrarse *matemática* en ella". Sobre esto tengo mis reservas, pero no entraré en esa discusión porque rebasa las pretensiones del presente trabajo.

No me atrevería a extender más la conclusión, pero presiento que, al menos, parte del trabajo de Adolfo García de la Sienra, cuando ha reconstruido teorías económicas, ha encontrado matemática en ellas y, cuando no ha sido así, las ha matematizado. Pero esta idea la dejo más bien, sólo como una sugerencia, ya que no he analizado aquí en concreto ninguno de sus trabajos.

Referencias

Almanza, J. E. e I. Hernández (2019), "Entrevista a Adolfo García de la Sienra Guajardo", *Stoa*, vol. 10, no. 19, pp. 98-117.

Aristotle (1952), *Great Books of the Western World of the Encyclopedia Britannica*, vol. 8, William Benton Publisher, Chicago.

Aristóteles (1952a), "Logic", en Aristotle (1952), pp. 5-253.

Ávila, A. (2017), *Una visión cuasi-empirista de la matemática*, Colofón, México.

Balzer, W., C. U. Moulines y J. D. Sneed (2012), *Una arquitectónica para la ciencia*, Universidad Nacional de Quilmes, Bernal.

Boole, G. (1960), *Análisis matemático de la lógica*, Universidad Nacional de la Plata, Buenos Aires.

Byers, W. (2007), *How Mathematicians Think*, Princeton University Press, Princeton.

Cavailles, J. (1938), *Méthode Axiomatique et Formalism*, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts, París.

Cohnitz, D. y L. Estrada (2019), *An introduction to the Philosophy of Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Corcoran, J. (1992), "El nacimiento de la lógica: la concepción de la prueba en términos de verdad y consecuencia", *Agora*, vol. 11, no. 2, pp. 67-78.

Euclides (1952), *Great Books of the Western World of the Encyclopedia Britannica*, vol. 2, William Benton Publisher, Chicago.

Euclides (1952a), "The Thirteen Books of the Elements", en Euclides (1952), pp. 1-396.

Frege, G. (1972a), *Conceptografía, Los Fundamentos de la Aritmética y otros Estudios Filosóficos*, UNAM, México.

Frege, G. (1972b), *Fundamentos de la aritmética*, Laia, Barcelona.

García de la Sienra, A., (2019), *A Structuralist Theory of Economics*, Routledge, Londres.

Hersh, R. (1997), *What is Mathematics Really*, Oxford University Press, Nueva York.

Kant, I. (1993), *Primeros principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza*, UNAM, México.

Polya, G. (1957) *How to solve it?*, Princeton University Press, Princeton.

Resnik, M., (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press and Oxford University Press, Nueva York.

Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, Nueva York.
Vélez, C. C., (2013), "La matemática como teoría de estructuras", *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, vol. 13, no. 26, pp. 7-30.