ALEXANDRIA: R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, v. 15, n. 2, p. 189-208, novembro. 2022.
https://doi.org/10.5007/1982-5153.2022.e83741

ALEXANDRIA
Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

Potencialidades Didáticas da Manipulação da Escala dos Números (1623) para a Formação do Licenciando em Matemática

Didactic Potentials of Manipulation of the Number Scale (1623) for the Formation of the Mathematics Student

Andressa Gomes dos Santos[a]; Ana Carolina Costa Pereira[a]

a Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, Brasil – andressaa.santos@uece.br, carolina.pereira@uece.br

Palavras-chave:
Interface entre história e ensino. Teoria da objetivação. Média proporcional.

Resumo: Com a intenção de articular a história e o ensino de matemática por meio de uma interface entre esses dois campos, escolheu-se o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise*, especificamente, selecionando como recurso a escala dos números inscrita no *Cross-staff*, apresentado nesse documento. Considerando a construção de interface e a Teoria da Objetivação (TO) para a elaboração de uma atividade envolvendo a escala dos números, buscou-se discutir os aspectos matemáticos que podem ser potencialmente didáticos, que emergem a partir dos problemas de uma tarefa que trata a respeito da manipulação da escala dos números para obter-se uma média proporcional, caracterizando a pesquisa como documental. Foi feito um estudo pautado nas questões matemáticas envoltas no uso da escala para encontrar uma média proporcional dados dois números e, através da tarefa, destacaram-se algumas potencialidades didáticas direcionadas para a formação de professores. Concluiu-se que a tarefa proporciona o ensino de logaritmo, de progressão geométrica e de construções geométricas, podendo viabilizar uma autonomia do futuro professor em abordar esses assuntos de maneiras diferentes em sala de aula.

Keywords:
Interface between history and teaching. Objectification theory. Proportional average.

Abstract: With the intention of articulating the history and teaching of mathematics through an interface between these two fields, the treatise The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practice, specifically, selecting it as a resource the scale of numbers inscribed in the Cross-staff presented in this document. Considering the construction of an interface and the Theory of Objectification (TO) for the elaboration of an activity involving the scale of numbers, we sought to discuss the mathematical aspects that can be potentially didactic, which emerge from the problems of a task that deals with the regarding the manipulation of the scale of numbers to obtain a proportional average, characterizing the research as documentary. A study was carried out based on the mathematical issues involved in the use of the scale to find a proportional average given two numbers and from the task some didactic possibilities aimed at teacher training were highlighted. It was concluded that the task provides the teaching of logarithm, geometric progression and geometric constructions, being able to make possible an autonomy of the future teacher to approach these subjects in different ways in the classroom.

Introdução

A aliança entre a história e o ensino está se fortalecendo cada vez mais em pesquisas nacionais[1], nas quais destacam-se aquelas que se apropriam de uma historiografia atualizada para construir uma interface entre esses dois campos de investigação[2]. Contudo, pesquisas com essa vertente precisam amadurecer e ganhar mais espaço no âmbito acadêmico e na sala de aula.

A perspectiva de interface adotada, neste estudo, é a desenvolvida por Saito e Dias (2013), que preza por ações que acarretem uma reflexão pela construção do saber matemático. Essa interface nasce pelo diálogo entre o historiador e o educador matemático, em que surgem opções didáticas advindas da história para o ensino por meio de dois movimentos, o do contexto histórico da elaboração do saber matemático e o do movimento do pensamento, que está vinculado ao processo de construção do conhecimento matemático (PEREIRA; SAITO, 2019).

Nesse viés, a formação de professores é o foco, para que se possa desenvolver criticidade e autonomia nos futuros professores de matemática[3]. Nesse sentido, realiza-se um tratamento didático do recurso histórico escolhido para ser aliado ao ensino e é feito o delineado do plano de ação para ser implementado com licenciandos de matemática.

Uma opção para o desenho do plano de ação é a Teoria da Objetivação, desenvolvida por Luis Radford, uma vez que ela fornece aparatos metodológicos para construção de atividades, postura do pesquisador ao aplicá-la, regimento no decorrer da implementação e fornece base para análise dos eventuais dados obtidos no processo.

Dito isso, escolheu-se, na história, o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practice*, de autoria de Edmund Gunter (1581 – 1626), publicado, em sua primeira versão, no ano de 1623, em Londres[4]. Esse documento traz quatro instrumentos: Setor, *Cross-staff*, *Cross-bow* e Quadrante, dentre eles, foi selecionado o *Cross-staff*, em particular, a escala dos números.

A escolha dessa escala advém da matemática incorporada nela, que possibilita a mobilização de conhecimentos matemáticos com base nos logaritmos. A seleção dessa escala

[1]Pesquisa sobre história e ensino de matemática, vide: Baroni, Teixeira e Nobre (2011), Bissi (2014) e Chaquiam (2015).
[2] Sobre historiografia atualizada, vide: Fried (2001), Roque (2012) e Saito (2015).
[3] Sobre estudos que adotam essa perspectiva de interface, vide: Santos, Alves e Pereira (2018), Pereira e Saito (2019) e Santos e Pereira (2020).
[4] Para mais informações sobre os critérios de escolha de fontes históricas, vide: Silva e Pereira (2021).

já foi pauta de pesquisas anteriores, como a de Santos e Pereira (2021a, 2021b), com a exploração de questões didáticas sobre a escala dos núremos.

Nas diversas questões matemáticas e epistemológicas que podem ser exploradas por meio da construção e do uso dessa escala, optou-se, neste artigo, por algumas potencialidades didáticas no seu manuseio para obter-se uma média proporcional dados dois números. Dessa forma, tem-se como objetivo discutir os aspectos matemáticos, que podem ser potencialmente didáticos e que emergem a partir dos problemas de uma tarefa, a qual trata a respeito da manipulação da escala dos números para obter uma média proporcional.

Ressalta-se que este estudo é um recorte de uma pesquisa de mestrado desenvolvida entre os anos de 2020 e 2022, em que se selecionou apenas um manuseio da escala dos números para ser explorado aqui.

A presente pesquisa é caracterizada como documental, haja vista que foi realizada uma análise de um texto original (CELLARD, 2012), ou seja, do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practice.*

Segundo Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009, p. 2),

> O uso de documentos em pesquisa deve ser apreciado e valorizado. A riqueza de informações que deles podemos extrair e resgatar justifica o seu uso em várias áreas das Ciências Humanas e Sociais porque possibilita ampliar o entendimento de objetos cuja compreensão necessita de contextualização histórica e sociocultural.

Como esta pesquisa trata da manipulação de um instrumento histórico, justifica-se o uso do documento original e da sua importância na compreensão do contexto histórico em que foi desenvolvido. Assim, foi feita uma tradução do inglês para o português do excerto que fala sobre o *Cross-staff*, com um tratamento didático dessa parte.

Desse modo, o estudo está dividido em seis partes, cuja primeira parte versa sobre a Teoria da Objetivação voltada para a elaboração da atividade. A segunda parte traz um panorama geral sobre o instrumento *Cross-staff*, em que a escala dos números está inserida. Posteriormente, trata-se da manipulação da escala dos números para encontrar a média proporcional de dois números. Em seguida, delimitou-se a atividade, que foi elaborada conforme a TO, consequentemente, apresenta-se a tarefa cinco, que aborda a manipulação da escala para obter a média proporcional. Por fim, são apresentadas as considerações finais do estudo.

Desenho da atividade conforme a Teoria da Objetivação

A Teoria da Objetivação é uma teoria educacional sociocultural moderna, elaborada por Luis Radford[5], que valoriza "[...] a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em práticas matemáticas constituídas histórica e culturalmente, e que refletem sobre novas possibilidades de ação e pensamento" (RADFORD, 2020a, p. 34, tradução nossa). Assim, ela preza pela colaboração em grupo, que, por meio do trabalho em grupo, os sujeitos possam construir certo conhecimento.

Essa teoria mobiliza, através do trabalho humano, o saber cultural, que vai se "[...] materializar em algo sensível, em algo suscetível de ser pensado e de converter-se em objeto de consciência. A atividade é também importante na medida que é o elo entre o sujeito e a sua cultura" (MORETTI et al., 2018, p. 255). Por objeto de consciência, entende-se o saber materializado, definido, na TO, como conhecimento, que, posteriormente, torna-se um conceito.

Portanto, pela colaboração dos sujeitos de um grupo, é possível mobilizar um saber que é potencial e fazer com que os indivíduos tomem consciência dele, ou seja, objetifiquem-no. Nesse processo, a construção da atividade é crucial e requer alguns elementos, como um objeto e o encadeamento de dificuldade, da mais simples para a mais elaborada.

A atividade é um labor conjunto para se alcançar um objeto, que se define por "[...] um objeto histórico-cultural, um objeto ideal, um saber que se revela à consciência dos alunos durante a atividade. O encontro com esse objeto é a entrada em um diálogo com a humanidade" (RADFORD, 2020b, p. 24, tradução nossa). O objeto perpassa por toda a atividade, cada tarefa mobiliza um saber, que vai acarretar, no final do processo, a objetivação do objeto delimitado. Para alcançar o objeto da atividade, ela precisa ser realizada em labor conjunto, em que cada componente dos grupos, juntamente com o professor, tem papel ativo no decorrer da atividade.

Já as tarefas são desenvolvidas a partir de um "[...] conjunto de ações estruturadas, planejadas para serem vivenciadas na sala de aula e desenhadas para atingir determinada meta com a mobilização de determinados saberes[6]" (PAIVA, 2019, p. 21). Desse modo, cada tarefa tem um objetivo, que culmina no objeto da atividade.

Nesta pesquisa, a TO foi utilizada para o delineamento das tarefas. Entretanto, ela sustenta também a postura do professor na aplicação da atividade e a análise dos dados, contudo, o estudo não se aprofundou nesses aspectos. Logo, a teoria está incorporada na

[5] Sobre o idealizador da TO, Luis Radford, vide: Moretti, Panossian e Radford (2018).

[6] Para informações mais detalhadas sobre saber e conhecimento na visão da TO, vide: Radford (2015, 2017, 2018, 2020b).

tarefa cinco, que será apresentada posteriormente e que foi desenvolvida por meio de um recurso histórico.

O *Cross-staff* elaborado por Edmund Gunter

O *Cross-staff* era um instrumento muito disseminado durante os séculos XV a XVII, por causa das demandas da sociedade em relação à matemática utilizada na prática, como na arte da navegação. Por isso, muitos estudos sobre matemática prática foram desenvolvidos nesse período, trazendo esse instrumento, inclusive na Inglaterra, em que esses estudos eram amplamente incentivados pela coroa (ASH, 2004; CORMACK, 2017).

Um dos tratados elaborados, nesse período, foi o *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe and other instruments, for such as are studioes of Mathematicall practice*, de autoria de Edmund Gunter, que traz a descrição e o uso do Setor, *Cross-staff* (Figura 1), *Cross-bow* e Quadrante.

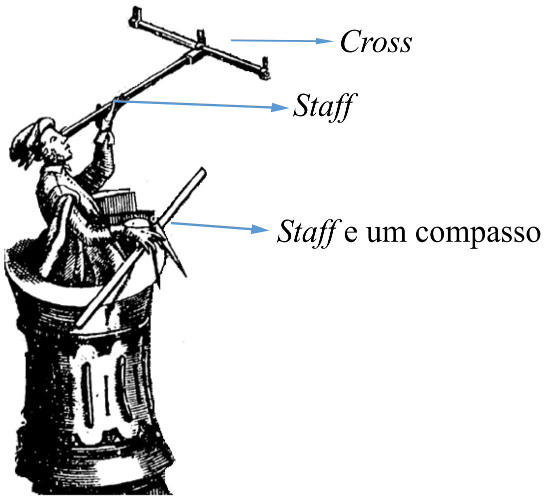

Figura 1 – *Cross-staff* elaborado por Edmund Gunter
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, frontispício).

O *Cross-staff* é descrito na segunda parte desse tratado, na qual o autor descreve o instrumento e cada uma das escalas que o compõem[7], apresentando, posteriormente, o uso geral de cada uma e, em seguida, os usos específicos das escalas novas até então, desenvolvidas por ele.

Gunter (1623) define o *Cross-staff* sendo um instrumento muito usado pelos homens do mar, na prática da navegação e da astronomia. O autor ressalta que ele já foi desenvolvido anteriormente por outros estudiosos, como Gemma Frisius e Thomas Hood, entretanto, destaca que o *Cross-staff* elaborado por ele contém escalas inéditas, as escalas para trabalhar proporções de diversos tipos, fazendo com que se diferencie dos demais instrumentos.

[7] Entende-se como escala, nesse contexto, as graduações marcadas no instrumento. Para mais informações sobre as que compõem o *Cross-staff*, vide: Santos e Pereira (2021b).

O *Cross-staff* de Gunter (1623) traz 12 escalas no total, sendo 5 inscritas no *cross* e mais 7 no *staff*. As escalas inscritas no *cross* não têm classificação, são elas: a escala das polegadas, a escala da tangente de 20 e da tangente de 30, a escala das cordas e a continuação da escala do meridiano.

Já as dispostas no *staff*, são classificadas em quatro tipos, sendo uma escala para medir e prolongar, uma para o mapa do mar, uma para obter ângulos e quatro outras para resolver problemas sobre proporções (Quadro 1).

Quadro 1 – As escalas inscritas no *staff*.

Tipo de escala	Denominação da escala
Medir e prolongar	Escala das polegadas
Mapa do mar	Escala do meridiano
Obter ângulos	Escala das tangentes
Proporção	Escala dos números
	Escala dos senos artificiais
	Escala das tangentes artificiais
	Escala dos senos versados

Fonte: Elaborado pelas autoras.

O conjunto das escalas das proporções foi elaborado a partir de estudos anteriores de Edmund Gunter e de seu conhecimento sobre os logaritmos de base 10, assunto que estava sendo amplamente discutido em Londres, no século XVII, principalmente, no Gresham College, em que Henry Briggs lecionava geometria e Gunter ministrava astronomia (CHARTRES; VERMONT, 1998).

A construção das escalas dos senos artificiais, das tangentes artificiais e dos senos versados decorre de um tratado de Gunter, publicado em 1620, chamado de *Canon Triangvloorvm*, que apresenta tabelas resultantes do estudo de trigonometria e de logaritmos. Já a escala dos números, é construída pelos logaritmos de base 10, Gunter (1623) indica o tratado *Logarithmorvm Chilias Prima*, que traz tabelas logarítmicas para a construção dessa escala.

A escala dos números foi a escolhida para se explorar as questões matemáticas e as potencialidades através do seu manuseio para encontrar uma média proporcional dados dois números. Dessa maneira, esses aspectos são abordados nas sessões a seguir.

Questões matemáticas presentes na manipulação da escala dos números para encontrar uma média proporcional

A escala dos números (Figura 2), elaborada por Gunter (1623), é descrita no primeiro livro, que trata sobre o *Cross-staff* e foi construída tendo por base os logaritmos decimais. Ela era utilizada para diversos fins. Neste artigo, exploramos seu uso para obter uma média proporcional entre dois números.

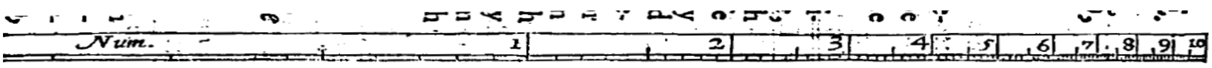

Figura 2 – Escala dos números
Fonte: Gunter (1623, p. 31).

Ele enuncia o manuseio da escala para esse fim da seguinte forma: “Tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles” (GUNTER, 1623, p. 19, tradução nossa). Por números extremos dados, entendem-se as marcações em que os pés do compasso vão ficar. Gunter (1623, p. 19, tradução nossa) explica como fazer esse manuseio: “divida o espaço entre os números extremos em duas partes iguais, e o pé do compasso permanecerá na proporcional média”. Desse modo, o compasso registra a distância dos números dados e a metade dessa distância verifica-se como a média proporcional desses dois números.

O autor complementa com um exemplo: “portanto, os números extremos dados como 8 e 32, a média entre eles será 16, o que pode ser comprovado pela antiga proposição, onde foi mostrado, que como 8 a 16, também são 16 a 32” (GUNTER, 1623, p. 19, tradução nossa). Como antiga proposição, Gunter (1623) se refere à proporção contínua, em que dados dois números, pode-se encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua, ou seja, é possível encontrar uma sequência de números proporcionais entre si.

Assim, é necessário seguir alguns passos com a escala dos números e com o compasso para encontrar a média proporcional entre dois números. Considerando os números dados 2 e 8, deve-se estender os pés com o compasso do número 2 até o número 8, obtendo a distância registrada no compasso, correspondente ao segmento em vermelho na Figura 3.

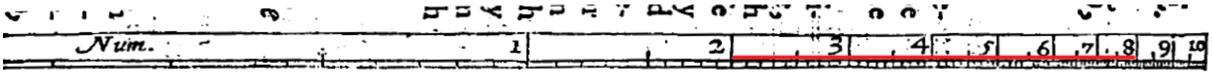

Figura 3 – Registrando a distância entre os números dados
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Feito isso, é preciso dividir a distância entre os números 2 e 8 registrada pelo compasso em duas partes iguais. Gunter (1623) não explica como fazer esse procedimento.

Entretanto, o autor tinha conhecimento sobre os elementos de Euclides, haja vista que cita, em seu tratado, quando se refere ao instrumento Setor. Logo, ele sabia dividir um segmento em duas partes iguais pelas proposições I.1, I.9 e 10 de Euclides.

Pela proposição I.1, sobre construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada, tem-se:

> Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.
> Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.
> E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.
> Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.
> [Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Dessa forma, tendo uma reta f com os pontos A e B formando o segmento $\overline{AB}$ $\overline{AB}$, traça-se um círculo BCD com centro em A e raio igual a $\overline{AB}$ $\overline{AB}$. Analogamente, constrói-se o círculo ACE e os segmentos $\overline{AC}$ $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ $\overline{CB}$, dessa maneira, os círculos têm raios de mesmo tamanho. Como $\overline{AC}$ $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$ $\overline{AB}$ são raios das circunferências, o triângulo ABC é equilátero, observa-se essa construção na Figura 4.

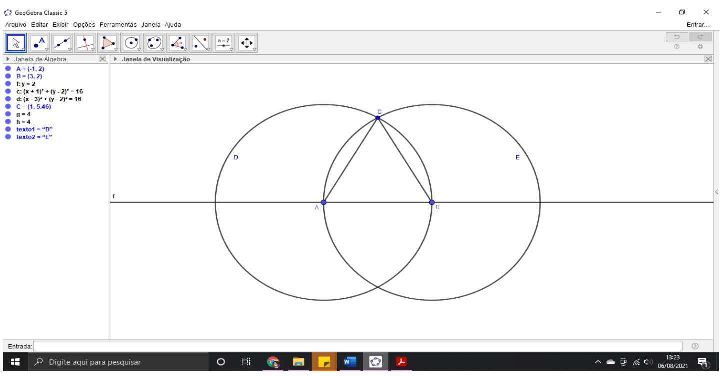

Figura 4 – Representação da construção de um triângulo equilátero
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Posteriormente, considera-se a proposição I.9 para cortar em dois um ângulo retilíneo dado, tem-se:

> Seja o ângulo retilíneo dado sob BAC; é preciso, então, cortá-lo em dois.
> Fique tomado sobre a AB o ponto D, encontrado ao acaso, e fique subtraída da AC a AE igual à AD, e fique ligada a DE, e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero DEF, e fique ligada a AF; digo que o ângulo sob BAC foi cortado em dois pela reta AF.

> Pois, como a AD é igual à AE, e a AF é comum, então, as duas DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada uma a cada uma. Também a base DF é igual à base EF; portanto, o ângulo sob DAF é igual ao ângulo sob EAF.
> Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 105).

Para isso, considera-se um ponto D arbitrário no segmento AB, depois traça-se o segmento $\overline{AE}$ $\overline{AE}$ = $\overline{AD}$ $\overline{AD}$ em $\overline{AC}$ $\overline{AC}$. É preciso traçar um triângulo equilátero, tomando por base o raio igual a $\overline{ED}$ $\overline{ED}$, vide proposição I.1. Em seguida, constrói-se o segmento $\overline{AF}$ $\overline{AF}$, que divide o ângulo B$\widehat{A}$C $\widehat{A}$C em dois congruentes, como se apresenta na Figura 5.

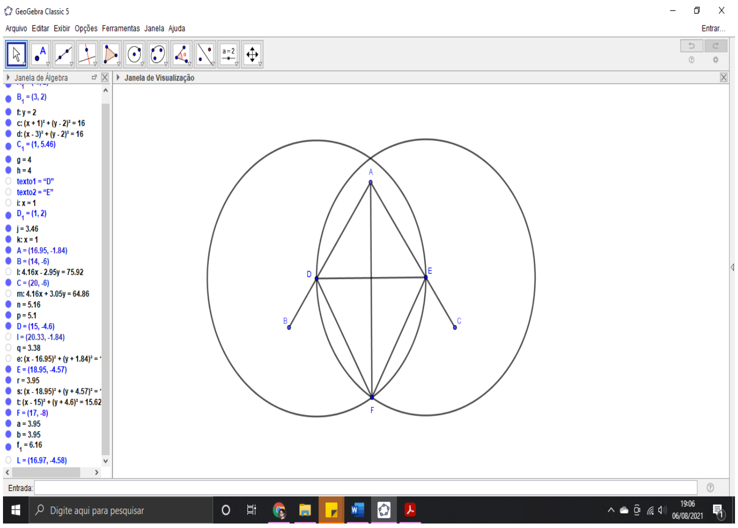

Figura 5 – Representação da construção para divisão de ângulo em duas partes iguais
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Com o procedimento anterior de dividir um ângulo retilíneo[8] em duas partes, decorre a proposição I.10, para se dividir um segmento em duas partes iguais, segue-se:

> Seja a reta limitada dada AB; é preciso, então, cortar a reta limitada AB em duas.
> Fique construído sobre ela o triângulo equilátero ABC, e fique cortado o ângulo sob ACB em dois pela reta CD; digo que a reta AB foi cortada em duas no ponto D.
> Pois, como a AC é igual à CB, e a CD é comum, então, as duas AC, CD são iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ACD é igual ao ângulo sob BCD; portanto, a base AD é igual à base BD.
> Portanto, a reta limitada dada AB foi cortada em duas no D; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 106).

Essa proposição demonstra que, tendo-se uma reta limitada, ou seja, um segmento $\overline{AB}$ $\overline{AB}$ e tendo-se, a partir dele, construído um triângulo equilátero (proposição I.1), depois cortando o ângulo A$\widehat{C}$B A$\widehat{C}$B em dois (proposição I.9), os segmentos $\overline{AD}$ $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ $\overline{DB}$ são congruentes. Verifica-se a representação dessa proposição na Figura 6, contendo todas as construções anteriores.

[8] Ângulo retilíneo é "[...] quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo" (EUCLIDES, 2009, p. 97).

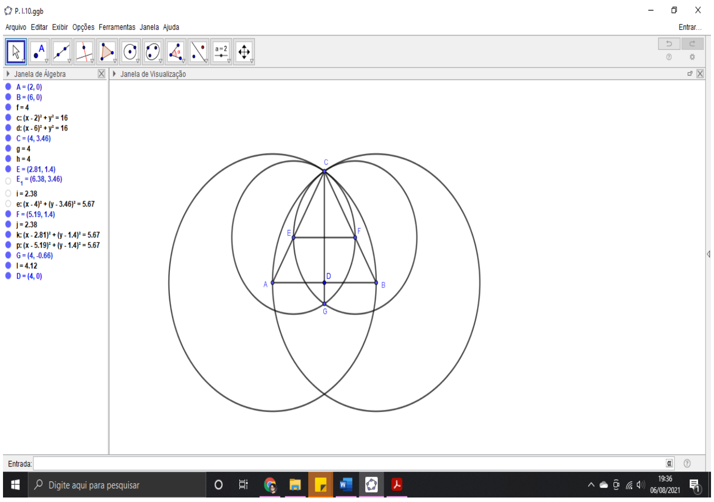

Figura 6 – Representação da divisão de um segmento em duas partes iguais
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Percebe-se, com essas proposições, que elas se complementam, além disso, é possível ocultar alguns passos para obter-se a resolução da divisão de um segmento dado $\overline{AB}$ $\overline{AB}$ em duas partes, como não traçar os lados do triângulo equilátero na proposição I.1, uma vez que o objetivo não é encontrar esse triângulo.

No processo de cortar um ângulo pela metade (proposição I.9), basta considerar o ponto arbitrário sendo o próprio A, assim, usam-se os dois círculos já feitos no processo da proposição I.1, portanto, basta traçar um segmento com as extremidades correspondentes às interseções dos círculos, obtendo a divisão do ângulo em duas partes iguais e do segmento da base, como demonstra a proposição I.10. Vê-se, na Figura 7, como fica esse processo de maneira simplificada.

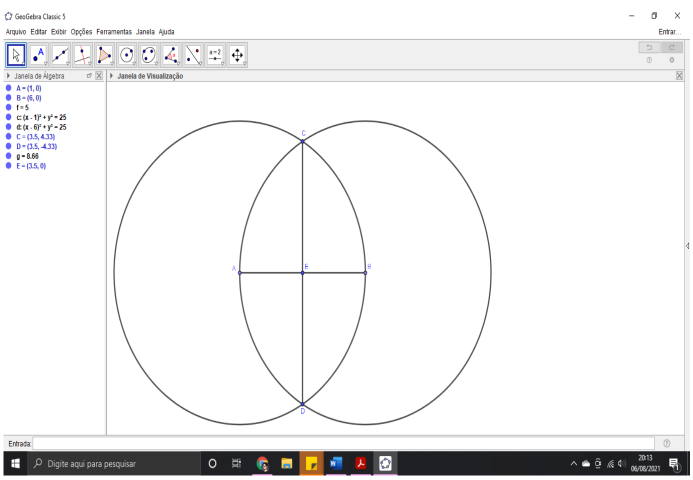

Figura 7 – Representação de como dividir um segmento em duas partes iguais de forma simplificada
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Desse modo, seguindo esses passos, é possível dividir o segmento encontrado considerando a distância de 2 e 8 na escala dos números em duas partes iguais. Toma-se como a extremidade A o ponto onde o compasso toca o número 2 na escala; a outra extremidade, B, é o ponto correspondente ao 8 da escala dos números.

O segmento $\overline{AB}$ $\overline{AB}$, nesse caso, equivale à distância do log 2 ao log 8. Para encontrar a média proporcional, deve-se dividir essa distância em duas partes iguais. Seguindo os passos simplificados, tem-se a representação na Figura 8, em que se encontra o número 4 na escala.

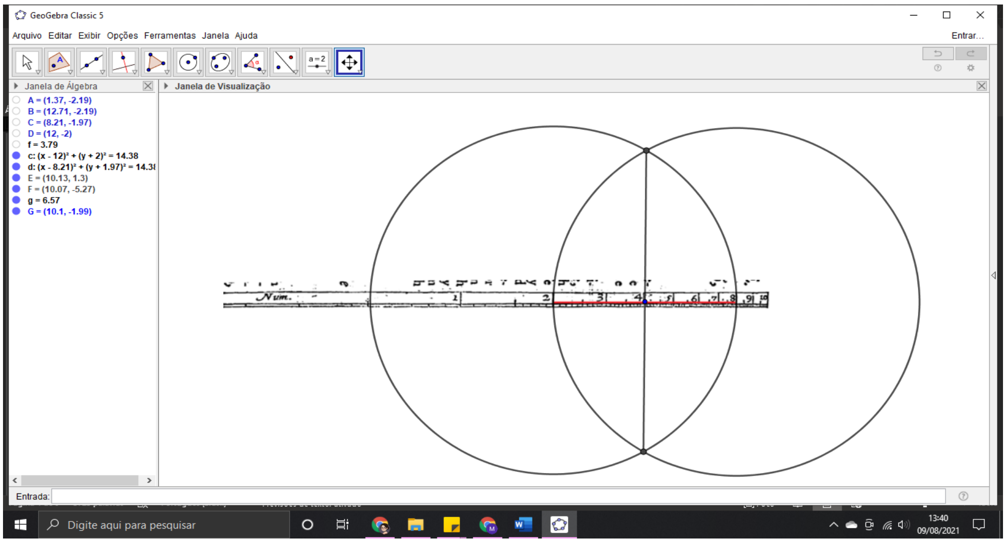

Figura 8 – Achando a média proporcional de 2 e 8
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

O exemplo que Gunter (1623, p. 19, tradução nossa) mostra, tendo “[...] os números extremos dados como 8 e 32, a média entre eles será 16 [...]”, soluciona-se mobilizando os passos apresentados anteriormente, no entanto, considera-se o 8 no começo da escala antes do 1, transformando os números marcados na escala em 10, 20, 30 etc., pois, ao considerar um número no início da escala, multiplicam-se seus números por 10. Dito isso, observam-se, na Figura 9, os procedimentos para obter a média proporcional de 8 e 32.

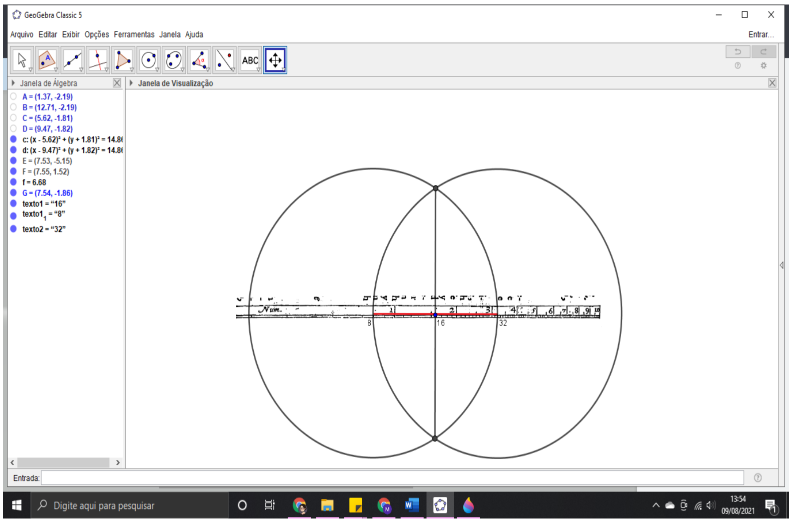

Figura 9 – Média proporcional de 8 e 32
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Essa ideia de obter-se a média proporcional de dois números dados, usando-se a escala dos números, está ancorada na característica intrínseca da sua construção a partir dos logaritmos. Assim, tendo em vista os números dados 8 e 32, o compasso registra a distância entre esses dois números, logo, tem-se que a distância entre 8 e 32, na escala, corresponde ao log 4, matematicamente, expressa-se como visto na equação 1.

$$\log 32 - \log 8 = \log\frac{32}{8} = \log 4 \log 32 - \log 8 = \log\frac{32}{8} = \log 4$$

(1)

Esse procedimento se justifica pelo tratado *Arithmetica logarithmica*, em que Briggs (1628, p. 19, tradução nossa) afirma que, “se o logaritmo do denominador for retirado do logaritmo do numerador, permanece o logaritmo da fração”. Dessa maneira, a distância entre 8 e 32 equivale ao log 4. Dessa forma, para encontrar a média proporcional desses números é necessário dividir a distância do log 4 em duas partes iguais, ou seja, encontrar a raiz quadrada do log 4. Tem-se, matematicamente, como o observado na equação 2.

$$\log\sqrt{4} = \frac{1}{2}(\log 4) = \log 2 \log\sqrt{4} = \frac{1}{2}(\log 4) = \log 2$$

(2)

O procedimento de obter-se a raiz quadrada de um logaritmo se dá pela passagem de Brigss: “Pois se a raiz quadrada é procurada, metade do logaritmo dado é obtido [...]” (1628, p. 31, tradução nossa). Desse modo, encontra-se o logaritmo que equivale à distância de 8 para a média proporcional correspondente a 16 ou, analogamente, de 32 para a média proporcional, como representa a Figura 10, sendo o segmento azul consoante ao log 2, que é obtido pela distância do log 1 até o log 2.

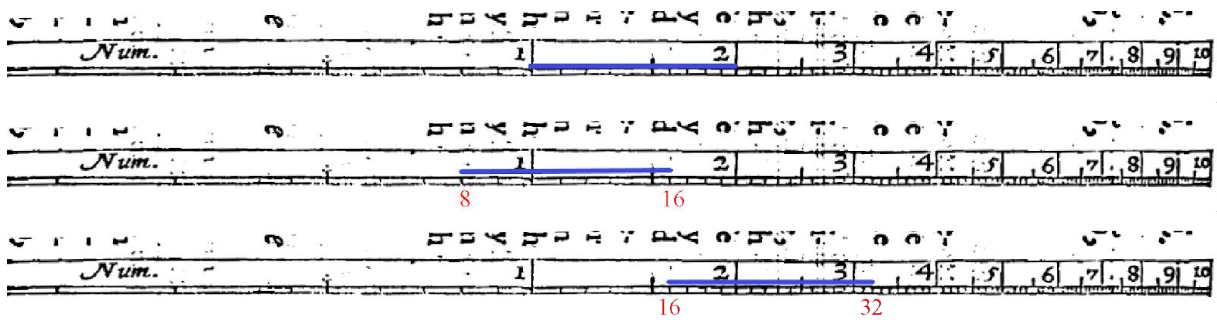

Figura 10 – Representação da média proporcional de 8 e 32
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Com esse procedimento, é possível encontrar a média proporcional de dois números dados, utilizando-se as propriedades dos logaritmos de forma indireta ao se manipular a escala dos números de Edmund Gunter. Esse é o procedimento matemático que está assimilado à escala no seu manuseio para obter a média proporcional de dois números dados. Percebe-se, nesse procedimento, muitos saberes matemáticos mobilizados, os quais serão abordados nas sessões seguintes.

Uma atividade à luz da TO

As tarefas elaboradas conforme a Teoria da Objetificação partiram de um pano de fundo histórico pautado em Londres, no século XVII, especificamente, no ano de 1624, em que os alunos seriam transportados para esse contexto e seriam desafiados a resolverem problemas práticos dessa sociedade com o auxílio da escala dos números e do tratado Edmund Gunter, *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise*.

Assim, as tarefas têm temáticas e objetivos diferentes (Quadro 2), entretanto, convergem para um mesmo objeto, visualizado a partir dos documentos oficiais. Nessa atividade, o objeto delimitado foi, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em particular, a habilidade (EM13MAT508) de “identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 541).

Quadro 2 –As tarefas

Tarefas	Temática
1	Familiarização sobre o contexto de elaboração do tratado de Gunter (1623)
2	Primeiro olhar sobre o instrumento *Cross-staff* e a escala dos números
3	Entendimento sobre a manipulação da escala dos números para o uso de proporção contínua
4	Aplicação do uso da escala dos números para proporção contínua em uma situação histórica
5	Entendimento sobre a manipulação da escala dos números para o uso de média proporcional
6	Aplicação do uso da escala dos números para média proporcional em uma situação histórica
7	Sistematização das ideias matemáticas mobilizadas no decorrer das demais tarefas

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A primeira tarefa está relacionada à ambientação quanto ao cenário proposto para a inserção dos problemas posteriormente apresentados através do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments*... e da escala dos números elaborada por Edmund Gunter. Já a segunda tarefa foca no estudo inicial do instrumento *Cross-staff* e da escala dos números quanto à sua construção e aos saberes incorporados nela à primeira vista.

A tarefa seguinte traz o primeiro manuseio que Gunter (1623) atribui à escala, com o uso da proporção contínua. O autor inicia o manuseio da escala com um conceito elementar de proporção e os licenciandos são convidados a manusearem a escala juntamente com o compasso, para compreenderem essa manipulação.

A tarefa posterior aborda os elementos trazidos previamente sobre a escala dos números e sua manipulação da proporção contínua. Nesse momento, são postos problemas práticos, que exigem o uso da escala e o entendimento sobre os aspectos matemáticos que permeiam a proporção contínua.

A quinta tarefa refere-se ao segundo manuseio da escala dos números, trata sobre como obter a média proporcional de dois números dados. Os discentes do curso de matemática são colocados, aqui, em uma situação de continuidade de dificuldade e de elaboração de ideias mais complexas, pois é proposto que haja um estudo sobre como manipular a escala para encontrar uma média proporcional. Essa tarefa será explorada no próximo tópico.

A penúltima tarefa está diretamente vinculada à anterior, haja vista que aborda a manipulação da média proporcional em uma situação prática. Nesse caso, é preciso que haja um amadurecimento de ideias e dos saberes matemáticos mobilizados para a resolução de quatro problemas que abrangem as noções envoltas na média proporcional.

A última tarefa requer que os participantes da formação recapitulem os saberes matemáticos mobilizados no decorrer da atividade e os formalizem utilizando livros de nível superior. Neste artigo, escolheu-se a tarefa cinco para ser explorada quanto às suas potencialidades didáticas para o ensino de matemática.

Potencialidades didáticas a partir da manipulação da escala dos números para obter média proporcional

O contexto da tarefa cinco, que trata do estudo da média proporcional ao manusear a escala dos números, retrata a oficina de um famoso artesão inglês do século XVII, Elias Allen (1588 – 1653). O artesão solicita que o grupo de discentes, que entrou em sua loja, advindos de outra realidade portando o tratado de Edmund Gunter, examine o excerto desse estudo sobre a manipulação da escala dos números para obter a média proporcional de dois números dados.

As tarefas anteriores à cinco balizaram os saberes que os alunos precisam para realizar as ações e os problemas propostos, respeitando a ordem de dificuldade e de complexidade do conjunto de saberes a serem mobilizados. Verifica-se, no Quadro 3, os problemas que compõem essa tarefa.

Quadro 3 – Problemas da tarefa sobre média proporcional

Problemas	Enunciados
1	Procurem entender o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional.
2	Expliquem como divide-se um segmento em duas partes iguais. Por que é necessário realizar esse procedimento para encontrar a média proporcional de dois números dados na escala?
3	Discutam a relação entre a manipulação da média proporcional e da proporção contínua. Destaquem aspectos semelhantes entre os dois manuseios.
4	Elenquem os conhecimentos matemáticos que foram mobilizados. Descrevam, no mínimo, cinco conhecimentos, associando-os aos movimentos realizados com a escala dos números e com o compasso. Para facilitar a organização das ideias, preencham o quadro em anexo.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A primeira ação dessa tarefa tem como foco deixar que os discentes fiquem livres para manusear a escala dos números para obter a média proporcional de dois números a partir do processo explicitado por Gunter (1623), expresso na sessão anterior, em que é preciso dividir a distância dos números em duas partes iguais.

Nesse momento, há um processo que o autor oculta no procedimento de como obter a média proporcional, que pode ser a primeira pergunta dos alunos: como dividir um segmento em duas partes iguais? Isso culmina no segundo problema: explicar como dividir um segmento pela metade e qual a importância disso nesse manuseio. Nessa ocasião, os licenciandos são instigados a revisitarem o conceito de construção geométrica, sendo uma potencialidade didática desse problema.

Destarte, no segundo problema, pelo menos dois saberes se mesclam: o de logaritmos e o de mediatriz, sendo potencialmente didático para explorar esses dois assuntos. Esses saberes caminham juntos nesse problema, visto que há uma distância obtida através de dois números da escala dos números, a qual incorpora os logaritmos na sua construção e a mediatriz ao dividir essa distância na metade e, dessa maneira, encontrar a média entre os dois números dados. Nesse procedimento, são revistos saberes mobilizados em tarefas anteriores, como na de proporção contínua, uma vez que se percebe que esses números estão em uma proporção contínua, já que a distância do primeiro para a média é a mesma da média para o seguinte número conhecido.

Portanto, encadeia com o problema três, no qual os alunos devem formalizar a relação da média proporcional com a proporção contínua. Nesse caso, há a potencialidade didática de se abordar o assunto de progressão geométrica, sabendo-se de dois termos da progressão, como encontrar um termo entre eles, haja vista que o conceito de progressão geométrica está diretamente associado ao de proporção contínua.

O último problema faz o arremate da tarefa, solicitando a sistematização das ideias matemáticas mobilizadas no decorrer das ações e dos problemas. Os alunos vão organizar os saberes matemáticos revisitados por eles ao fazerem o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional de dois números dados.

Logo, surgem vários conceitos matemáticos que permeiam essa manipulação, como: o assunto de logaritmo, que está sempre sendo recapitulado ao fazer uso dessa escala; conhecimentos de ordem geométrica, ao traçar a mediatriz de um segmento dado pelos números que se quer achar a média; saberes acerca de progressão geométrica, que também perpassam esse manuseio.

Desse modo, obter a média proporcional de dois números por meio da escala dos números com essa tarefa, com os preceitos da TO, possibilita a revisitação de vários saberes matemáticos, que podem ser explorados em sala de aula, como: construção geométrica, logaritmos e progressão geométrica, assim como a relação entre conteúdos antes vistos separadamente e em níveis diferentes, como o de mediatriz e e o de logaritmos. O professor, sabendo dessas potencialidades da escala dos números, pode fazer uma relação entre esses conceitos e, dessa forma, pode construí-los com os alunos ou ressignificá-los.

Considerações finais

A aliança entre história e ensino por meio de uma construção de interface, adotando-se uma perspectiva historiográfica atualizada, é interessante, visto que proporciona um pensamento crítico no que diz respeito ao olhar que se tem da matemática, da organização do ensino e da autonomia do professor em seu exercício da profissão.

Nesse cenário de construção de interface, tarefas precisam ser desenvolvidas para serem levadas à formação de professores, uma opção metodológica para o desenvolvimento das tarefas é a Teoria da Objetivação, uma vez que ela oferece uma estrutura para a elaboração dessa atividade requerida pela interface.

Nesse contexto, escolheu-se o instrumento *Cross-staff*, especialmente, a escala dos números, em particular, o manuseio sobre média proporcional, desenvolvida por Edmund Gunter, apresentada no tratado *The Description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and Other Instruments, for such as Are Studious of Mathematicall Practise*, para se construir uma tarefa e explorar suas potencialidades didáticas para o ensino de matemática.

Assim, foram apresentados o *Cross-staff*, o manuseio da escala dos números para obter-se a média proporcional de dois números, a atividade que contém a tarefa sobre esse assunto e as discussões sobre algumas potencialidades, que podem ser exploradas a partir dos problemas da tarefa cinco. Ressalta-se que as potencialidades didáticas apresentadas não são únicas, os mesmos problemas podem ser potenciais para o ensino de outros assuntos que não foram mencionados aqui.

Dessa maneira, a tarefa, realizada através de uma construção de interface e pautada na TO, é potencial para o ensino de progressão geométrica, de logaritmos e de construções geométricas, como a de mediatriz. Outra opção a ser levada ao ensino é a relação da progressão geométrica e dos logaritmos, promovendo associações que, normalmente, não são feitas entre esses dois saberes.

Referências

ASH, E. H. *Power, Knowledge, and expertise in Elizabethan England*. [S.I.]: The Johns Hopkins University Press, 2004.

BARONI, R. L.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 153-171, dez. 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5742. Último acesso em: 17 jul. 2019.

BISSI, T. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática - Uma abordagem com alunos da 8ª série. *Revista de História da Matemática Para Professores*, Natal, p. 39-57, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

BRIGGS, H. *Arithmetica Logarithmica*. London: William Jones, 1628.

CHAQUIAM, M. *História da matemática em sala de aula:* proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 82 p. (Série hist).

CELLARD, A. A análise documental. In: POUPART, Jean et al. *A pesquisa qualitativa*: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. p. 295-316.

CHARTRES, R.; VERMONT, D. *A brief history of Grasham College 1597-1997*. [S.I.]: Gresham College, 1998.

CORMACK, L. B. Introduction: practical mathematics, practical mathematicians, and the case for transforming the study of nature. In: CORMACK, Lesley B.; WALTON, Steven A.; SCHUSTER, J. A. (ed.). *Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe*. 45. ed. Cham: Springer, 2017. p. 1-203. (Studies in History and Philosophy of Science).

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora Unesp, 2009. Tradução de: Irineu Bicudo.

FRIED, M. N. Can mathematics education and history of mathematics coexist? Science & Education. *Science And Education*, [S.L.], v. 10, n. 4, p. 391-408, 2001. Springer Science and Business Media LLC.

GUNTER, E. *The Description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and Other Instruments, for such as Are Studious of Mathematicall Practise.* London: William Jones, 1623.

MORETTI, V.; PANOSSIAN, M. L.; RADFORD, L. Questões em torno da Teoria da Objetivação. Obutchénie: *Revista de Didat. E Psic. Pedag*. v. 2, n. 1, p. 230-251, 2018.

PAIVA, J. P. A. A. *A teoria da objetivação e o desenvolvimento da orientação espacial no ensino-aprendizagem de geometria*. 2019. 209f. Tese (doutorado) – Curso de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. *Revista Cocar*, [s.l.], v. 13, n. 25, p. 342-372, fev. 2019. Universidade do Estado do Para. http://dx.doi.org/10.31792/rc.v13i25. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/2164. Último acesso em: 20 maio 2019.

RADFORD, L. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Revista Perspectivas da Educação Matemática* – UFMS. Mato Grosso do Sul: UFMS, p. 547-567, 2015.

RADFORD, L. A Teoria da Objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em Educação Matemática. In: MorettiV. D.; Cedro,W. L. (Eds.), *Educação matemática e a teoria histórico-cultural: um olhar sobre as pesquisas*. Mercado de Letra, 2017, p. 229–261.

RADFORD, L. Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación. In: Iran Abreu Mendes (Ed.), *Anais do 5° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* – 5º SIPEMAT (pp. 1-22). Belém, Brazil, 2018.

RADFORD, L. El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación**.** *Rematec*, [S.L.], v. 15, n. 36, p. 27-42, 2020a. http://dx.doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306.

RADFORD, L. ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora?: la labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, [S.I], v. 5, n. 2, p. 15-32, 2020b.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História & Ciências Sociais*, Campus Carreiros, v. 1, n. 1, p. 1-15, jul. 2009.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação* [s.l.], v. 19, n. 1, p.89-111, 2013. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/s1516-73132013000100007. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/236009323_Interface_entre_historia_da_matematica_e_ensino_uma_atividade_desenvolvida_com_base_num_documento_do_seculo_XVI. Último acesso em: 31 jul. 2019.

SAITO, F. *História da matemática e suas (re)construções contextuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SANTOS, A. G.; ALVES, V. B.; PEREIRA, A. C. C. Explorando a régua de cálculo como recurso didático no ensino de multiplicação para formação de professores de matemática. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, [S.L.], v. 4, n. 4, p. 56-67, 2018. Disponível em: https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/3480. Último acesso em: 17 dez. 2018.

SANTOS, A. G.; PEREIRA, A. C. C. A INCORPORAÇÃO DA RÉGUA DE CÁLCULO NO ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO ATRAVÉS DA SUA CONSTRUÇÃO E DO SEU MANUSEIO. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, [S.L.], v. 7, n. 20, p. 357-369, 12 jul. 2020. Boletim Cearense de Educacao e Historia da Matematica - BOCEHM. http://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v7i20.2827. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2827. Último acesso em: 12 jul. 2020.

SANTOS, A. G.; PEREIRA, A. C. C. Descrição das escalas do Cross-Staff (1623) de Edmund Gunter. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S.L.], v. 8, n. 23, p. 707-720, 17 jun. 2021a. *Boletim Cearense de Educacao e Historia da Matematica* - BOCEHM. http://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v8i23.4922. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4922. Último acesso em: 19 jun. 2021.

SANTOS, A. G.; PEREIRA, A. C. C. Questões didáticas envolvendo as escalas do Cross-Staff (1623) elaborado por Edmund Gunter. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, São Paulo, v. 10, n. 1/2, p. 105-118, 2021b. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/55019. Último acesso em: 05 out. 2021.

SILVA, I. C.; PEREIRA, A. C. C. Definições e Critérios para o Uso de Textos Originais na Articulação entre História e Ensino de Matemática. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 35, n. 69, p. 223-241, jan. 2021. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a11. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/GKJzc6LWtwPNkz8d98cvyGG/abstract/?lang=en. Último acesso em: 19 abr. 2021.

SOBRE OS AUTORES

ANDRESSA GOMES DOS SANTOS. Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE (2022), possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará - UECE (2019). Membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática - GPEHM. Atua como professora na Universidade Estadual do Ceará na área de Educação Matemática. Tem interesse na área de Matemática, com ênfase em ensino de Matemática, História da Matemática e formação inicial e continuada de professores de Matemática.

ANA CAROLINA COSTA PEREIRA. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2001), mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2005), doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2010) e pós-doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Ainda atua como docente Adjunta da Universidade Estadual do Ceará e líder do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: formação de professores de matemática e interface entre história e ensino de matemática.

Recebido: 03 de setembro de 2021.

Revisado: 07 de julho de 2022.

Aceito: 04 de agosto de 2022.