CAPÍTULO 11

11

ECUACIONES FUNCIONALES

José Luis Arregui Casaus
Universidad de La Rioja

Palabras clave

- *palabra 1*
- *palabra 2*
- *palabra 3*
- *palabra 4*

Una **ecuación funcional** expresa una propiedad que cumplen los valores de una función en algunos de los puntos de su dominio, tal vez en todos.

Normalmente la propiedad consiste en una relación de igualdad (*ecuación*) sobre los valores de la función f en distintos puntos del dominio, que se expresan mediante variables $(x, y, \dots)$. La diferencia con lo que normalmente entendemos como un problema de ecuaciones es que la *incógnita* no es ninguna de las variables, sino la misma función f: debemos encontrar qué funciones f cumplen lo que se nos dice, no para qué puntos x se cumple.

11.1 Introducción

En las olimpiadas matemáticas los problemas sobre ecuaciones funcionales son muy frecuentes, y suelen ser de enunciado sencillo, pero muchas veces resultan bastante difíciles porque las claves de la resolución pueden no ser evidentes en absoluto, pese a que normalmente estarán al alcance de cualquier participante en la prueba (se suelen evitar los problemas que requieren de conocimientos previos muy especializados). Sin embargo, la mayoría de ellos son atrayentes, y en muchos casos hay varias formas de resolverlos, siendo muy habitual que algunos participantes lo hagan de manera más corta o más ingeniosa que las esperadas por los mismos proponentes.

El problema más habitual que se plantea consiste en hallar todas las funciones que satisfacen la propiedad que se expresa, lo que llamamos las *soluciones* de la ecuación. En alguna ocasión el problema puede ser otro, tal vez simplemente encontrar *una* solución.

Es importante advertir la diferencia entre la *solución* del problema (la respuesta adecuada a lo que se nos pregunta una vez lo hemos resuelto) y cada *solución* de la ecuación que sale en el problema. Por ejemplo, si el problema consiste en demostrar que la ecuación

$$f(x+1) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

tiene soluciones no constantes, entonces una forma de resolverlo consiste en observar que una solución no constante de la ecuación es la función dada por $f(x) = \cos 2\pi x$. Cualquier función constante es también solución de la ecuación, pero no nos da la solución al problema. En todo lo que sigue, cuando hablamos de una *solución* queremos decir *solución de la ecuación*, y a la forma que presentamos de resolver el problema la llamamos *resolución*.

11.2 Generalidades y estrategias

En este capítulo no pretendemos establecer ni resumir ninguna teoría sobre ecuaciones funcionales[1]: presentamos y resolvemos ejemplos del tipo de problemas que aparecen en olimpiadas, y nos atrevemos a señalar algunas estrategias generales a tener en cuenta si nuestra intuición o entrenamiento no son suficientes para abordarlos.

Estrategia general 1

En muchos casos es fácil adivinar una solución, especialmente si existe entre las más sencillas de alguna clase de funciones que conocemos bien. Esta solución podría ser la única o podría servir para llevarnos a todas las soluciones.

Estrategia general 2

Posiblemente la función que resulta al transformar de cierta manera una solución, o al combinar varias soluciones, es una función que cumple otra ecuación, que ya es conocida o es más sencilla que la dada, y eso nos permite resolver el problema.

[1]Si ese fuera el objetivo recomendaríamos el libro de Christopher G. Small *Functional Equations and How to Solve Them*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2007

Ejemplo 11.1 Se trata de hallar todos los polinomios que cumplen que

$$p(x+1) = p(x) + 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Resolución: Una solución es, claramente, $p(x) = x^2$. Notemos que, si p y q son dos soluciones, entonces la función $f = q - p$ cumplirá que, para todo x, $f(x+1) - f(x) = 0$. Pero f es un polinomio, luego f debe ser constante (explicación: $f(x) - f(0)$ es otro polinomio que se anula en $0, 1, 2, 3, \ldots$, y todo polinomio no nulo tiene un número finito de raíces, luego $f(x) - f(0)$ es el polinomio nulo y $f(x)$ es igual a $f(0)$ para todo x).

Por tanto, si ahora llamamos p a una solución cualquiera entonces debe ser $p(x) - x^2 = c$, constante. Y comprobamos por fin que, en efecto, $x^2 + c$ cumple la ecuación, para cualquier c. Hemos encontrado todas las soluciones:

$$p(x) = x^2 + c \quad (\text{para cualquier } c \in \mathbb{R}) .$$

$\square$

Estrategia general 3

Cuando damos valores a algunas de las variables de la ecuación ($x, y, z, n, m, k \ldots$) obtenemos nuevas condiciones que han de cumplir las soluciones. En la mayoría de los casos, los mismos términos que aparecen en la ecuación son los que nos sugieren qué valores probar. No tienen necesariamente que ser valores concretos, pueden ser expresiones que dependen de las variables, si con eso obtenemos otras ecuaciones relacionadas con la ecuación inicial.

Ejemplo 11.2 Buscamos las funciones tales que, para cada x real en su dominio,

$$x\, f(x) + 2x\, f(-x) = -1 .$$

Resolución: Si $x = 0$ el término de la izquierda se anula y el de la derecha no, por lo que cualquier solución f debe dejar a 0 fuera de su dominio. Además, la condición dice implícitamente que el dominio es simétrico (x es del dominio si y solo si lo es $-x$). Buscaremos soluciones en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En este caso, que la expresión involucre al valor de f en cualquier x y en su opuesto sugiere investigar qué pasa si aplicamos la condición a $-x$. Resulta la ecuación

$$-x\, f(-x) - 2x\, f(x) = -1 ,$$

es decir

$$-2x\, f(-x) - 4x\, f(x) = -2 ,$$

y sumando esta ecuación y la inicial obtenemos

$$-3x\, f(x) = -3 ,$$

con lo que necesariamente $f(x) = 1/x$ para cada x no nulo. Es directo comprobar que esta función es una solución, luego es la única solución. $\square$

Ejemplo 11.3 Se trata de hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen, para todos x e y, que

$$x\, f(y) + y\, f(x) = (x+y)\, f(x)\, f(y) .$$

Resolución: Una solución es $f = 0$. Buscaremos más. Si $y = 0$ la ecuación nos dice que, para cualquier x, $x\, f(0) = x\, f(x)\, f(0)$. Es decir, para todo x

$$x\, f(0)(1 - f(x)) = 0 .$$

Concluimos que, si $f(0) \neq 0$, entonces $f(x) = 1$ en todo $x \neq 0$. Esto ya nos permite encontrar muchas soluciones: elijamos cualquier $a \in \mathbb{R}$, fijemos $f(0) = a$ y $f = 1$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se ve directamente que la función f definida así es una solución.

Notemos que si $x + y = 0$ entonces el término de la derecha es nulo. Tomamos cualquier x y elegimos $y = -x$, y obtenemos

$$x\,(f(-x) - f(x)) = 0\,,$$

luego en todo punto $f(-x) = f(x)$, f es una *función par*. Está bien saberlo, pero no lo vamos a usar.

Es mejor que elijamos $y = x$, ya que entonces la ecuación dice que

$$2x\,f(x) = 2x\,f(x)^2\,,$$

luego para todo x

$$2x\,f(x)(1 - f(x)) = 0\,,$$

por lo que $f(x)$, si $x \neq 0$, solo puede tomar los valores 0 y 1. Puede parecer que habrá muchas formas de elegirlos para definir más soluciones de la ecuación, pero en realidad no hay más soluciones que las ya mencionadas: si $f(x) = 0$ y $f(y) \neq 0$, la ecuación nos da directamente que $x = 0$. □

Ejemplo 11.4 Se piden todas las soluciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de

$$f(x)\,f(y) = f(x - y)\,.$$

Resolución: Dos soluciones obvias son las constantes $f = 0$ y $f = 1$. Vamos a ver que no hay más soluciones:

Si $x = y = 0$ la ecuación dice que $f(0)^2 = f(0)$, así que o bien $f(0) = 0$ o bien $f(0) = 1$. Pero si x es no nulo y hacemos $y = x$ vemos que $f(x)^2 = f(0)$. Por tanto, si $f(0) = 0$ la única solución es $f = 0$. Supondremos entonces que $f(0) = 1$, y en ese caso $f(x)^2 = 1$ para todo x. Si vemos que $f \geq 0$, se sigue que $f = 1$.

Para ello, observamos primero que f es par: la ecuación, si $x = 0$, dice que $f(y) = f(-y)$. Entonces, dado t, tomamos $x = t/2$ e $y = -t/2$ y obtenemos que $f(t/2)^2 = f(t)$, luego en efecto $f(t) \geq 0$. □

Si los ejemplos anteriores han parecido muy cortos, el que sigue ya no lo parecerá tanto. Pero tampoco es especialmente difícil, si pensamos en cómo usar las estrategias dadas:

Ejemplo 11.5 Queremos hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) + f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = x \quad \text{si } 0 \neq x \neq 1\,.$$

Resolución: De forma similar a un ejemplo anterior, veamos qué obtenemos si cambiamos x por $g(x) = 1/(1-x)$: la ecuación inicial es

$$f(x) + f(g(x)) = x\,,$$

y obtenemos que

$$f(g(x)) + f(g(g(x))) = g(x)\,.$$

Con el mismo cambio,

$$f(g(g(x))) + f(g(g(g(x)))) = g(g(x))$$

(debemos notar que, si $0 \neq x \neq 1$, entonces $0 \neq g(x) \neq 1$).

Resulta que $g(g(x)) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1-x}{-x} = 1 - \dfrac{1}{x}$, y $g(g(g(x))) = x$.

Por tanto, la tercera ecuación es

$$f(g(g(x))) + f(x) = g(g(x))\,.$$

Le restamos la segunda, y sale que

$$f(x) - f(g(x)) = g(g(x)) - g(x)\,.$$

Sumamos esta ecuación y la inicial, y concluimos que

$$2\,f(x) = x + g(g(x)) - g(x)\,,$$

así que necesariamente

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(x + g(g(x)) - g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\Big) \quad \text{si } \ 0 \neq x \neq 1\,. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si f es así en los valores distintos de 0 y 1 y tomamos $f(0)$ y $f(1)$ como queramos, esta función f cumple la ecuación: si x no es ni 0 ni 1

$$\begin{aligned} f(x) + f(g(x)) &= \frac{1}{2}\big(x + g(g(x)) - g(x)\big) + \frac{1}{2}\big(g(x) + x - g(g(x)\big) \\ &= \frac{1}{2}(x + x) = x\,. \end{aligned}$$

□

No es fácil formular más estrategias tan generales como las anteriores que no puedan expresarse combinando lo que ya dicen las dadas. Si acaso, como hemos visto en el ejemplo 1.4 merece la pena en general señalar las propiedades que debe cumplir toda solución f conforme las vamos deduciendo (en el ejemplo veíamos que se trata de una función par), con la esperanza obvia de que nos lleven a resolver el problema al acotar el conjunto de posibles soluciones.

Como estrategias particulares, claramente el tipo de problema (la clase de funciones de que se trate, o la especificación del dominio en el que las consideramos) hará recomendable que usemos nuestros conocimientos en ese ámbito.

Así, en algunos casos debemos proceder por inducción para resolver el problema. Nuestro siguiente ejemplo trata una de las llamadas *ecuaciones funcionales de Cauchy*,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

Ejemplo 11.6 Si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos x e y, y $f(1) = a$, se pide determinar $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Reolución: Primero, es muy fácil ver por inducción que, fijado x, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(nx) = nf(x)$.

En particular, tomando $n = 2$ y $x = 0$ deducimos que $f(0) = 0$.

Ahora tomamos $y = -x$ en la ecuación, y deducimos que f es una función impar, es decir $f(-x) = -f(x)$.

Por tanto, $f(nx) = nf(x)$ para todo x y cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

Si fijamos x, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ es $f(x) = f\big(n\,(x/n)\big) = nf(x/n)$), así que $f(x/n) = f(x)/n$.

Por último, si además $m \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$f\big((m/n)x\big) = mf(x/n) = (m/n)f(x)\,.$$

Lo aplicamos a $x = 1$, y concluimos que $f(m/n) = (m/n)f(1) = (m/n)\,a$.

Es decir,

$$f(x) = a\,x$$

para todo $x \in \mathbb{Q}$. □

Si f está definida en $\mathbb{R}$ y es una solución de la ecuación de Cauchy anterior, su valor en los puntos no racionales no puede obtenerse por inducción. ¿Podremos demostrar que $f(x) = ax$ para todo x real? En realidad no, pero es muy complicado dar ejemplos que lo demuestran. Son tan extraños que algunos autores los llaman *monsters*.

11.3 Problemas de olimpiadas matemáticas

Las técnicas inductivas son mucho más frecuentes en los problemas donde las funciones tienen como dominios $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ o, en general, un subconjunto de $\mathbb{Z}$. El siguiente problema fue propuesto en la IMO (Olimpiada Matemática Internacional) de 1977. Lo indicamos en el enunciado, como haremos en lo sucesivo en otros ejemplos de la IMO o de la OME (Olimpiada Matemática Española):

Problema 11.1 (International Mathematical Olympiad, 1977) Supongamos que $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cumple que

$$f(n+1) > f(f(n)) \qquad \text{para todo } n\,.$$

Hay que probar que, entonces, $f(n) = n$ para todo n.

Solución : *El conjunto de imágenes de f tiene un mínimo, como todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$. La ecuación nos dice que dicho mínimo es necesariamente $f(1)$, y que $f(n) > f(1) \geq 1$ para cada $n > 1$. En particular, observemos que $f(n) \geq 2$ para todo $n \geq 2$. Razonando de la misma manera, el mínimo de $\{f(2), f(3), \dots\}$ es $f(2)$, y $f(n) > f(2) \geq 2$ para todo $n > 2$. Supongamos que hemos probado que $f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(n)$ y que $f(k) > f(n) \geq n$ para todo $k > n$. Entonces la ecuación dice que el mínimo de $\{f(n+1), f(n+2), \dots\}$ es $f(n+1)$, y que $f(k) > f(n+1) \geq n+1$ para todo $k > n+1$. Hemos probado, por inducción, que*

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots$$

(es decir, f es una función creciente) y que $f(n) \geq n$ para todo n.

Supongamos que $f(k) > k$. Entonces $f(k) \geq k+1$, y como f es creciente $f(f(k)) \geq f(k+1)$, en contradicción con la ecuación.

Por tanto, $f(n) = n$ para todo n. □

El que sigue ahora se propuso en la fase final de la OME de 2018. Sobre un máximo de 7 puntos, 49 participantes obtuvieron 0, otros 24 obtuvieron 1 punto y solo 3 llegaron a los 2 puntos, que fue la nota más alta. Es un buen ejemplo de la dificultad de algunos problemas sobre ecuaciones funcionales, de resolución sencilla de seguir cuando es explicada, pero difícil de descubrir.

Problema 11.2 (Olimpiada Matemática Española, 2018) Hay que hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que, para todos $x, y > 0$,

$$f(x + f(y)) = y\, f(xy + 1)\,.$$

Solución *En la ecuación, f se aplica a tres valores: y, $xy + 1$ y $x + f(y)$. Si estos dos últimos coinciden para ciertos valores de x e y, la ecuación dice que necesariamente $y = 1$. Es la mejor manera de empezar.*

Ahora bien, la igualdad $xy + 1 = x + f(y)$ se cumple siempre que sea $x = (f(y) - 1)/(y - 1)$. Para $y \neq 1$, si este valor fuera positivo tendríamos una contradicción, y entonces deducimos que

$$\frac{f(y) - 1}{y - 1} \leq 0 \quad \textit{para todo } \ y > 0 \textit{ distinto de 1}\,,$$

lo que equivale a decir que

$$(f(y) - 1)(y - 1) \leq 0 \quad \textit{para todo } \ y > 0. \qquad (*)$$

Esto nos dice que f aplica el intervalo $(0, 1]$ en $[1, +\infty)$ y viceversa, lo que nos sugiere la función $f(x) = 1/x$ como posible solución. Sería muy fácil comprobar que en efecto lo es, y ya habríamos resuelto parte del problema (de hecho resultará que es es la única solución). Vamos a proseguir, en cualquier caso, como si no hubiéramos adivinado aún ninguna solución.

La desigualdad $(*)$ nos da una condición sobre $yf(y)$. En la ecuación inicial no aparece este término, a no ser que sea $xy + 1 = y$; vamos a seguir por ahí: esta igualdad se da si y solo si $x = 1 - 1/y$, que es positivo si $y > 1$. La ecuación dice por tanto (tomando ese valor de x) que, si $y > 1$,

$$f(1 - 1/y + f(y)) = yf(y)\,.$$

Sea entonces $y > 1$, y sea $a = 1 - 1/y + f(y)$. Por $(*)$ sabemos que

$$(f(a) - 1)(a - 1) \leq 0\,,$$

es decir

$$(yf(y) - 1)(f(y) - 1/y) \leq 0\,,$$

lo que nos lleva (tomando y como factor en el primer paréntesis) a que $(f(y) - 1/y)^2 \leq 0$, y entonces

$$f(y) = 1/y \quad \textit{para todo } y > 1.$$

Para terminar, si $0 < y \leq 1$ la ecuación nos dice que también, al ser $2/y \geq 2 > 1$,

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y/2 + y/2) = f(y/2 + f(2/y)) = (2/y)\, f(2) \\ &= 1/y\,. \end{aligned}$$

Por tanto, la única solución de la ecuación es la función dada por $f(y) = 1/y$ para todo $y > 0$.

Cuando el problema concierne a funciones que se aplican a números naturales, a veces la clave la da la elección de una base determinada para escribir dichos números. Un clásico de este tipo es el siguiente problema, que se propuso en 1988 con un pequeño y evidente cambio en el enunciado:

Problema 11.3 (International Mathematical Olympiad, 1988) Se define una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sigue:

$$f(1) = 1\,, \quad f(3) = 3\,, \quad f(2n) = f(n)\,,$$

$$f(4n + 1) = 2\, f(2n + 1) - f(n)\,, \quad f(4n + 3) = 3\, f(2n + 1) - 2\, f(n)\,.$$

¿Cuántos números n cumplen que $f(n) = n$ y $n \leq 2022$?

Solución *Vamos a ver que la definición dada permite expresar de una manera muy sencilla el valor de f en cada número natural si lo expresamos en binario, es decir en base 2. En todo lo que sigue habrá alguna frase* *en la que se expresarán unos números en decimal y otros en binario; para distinguir la base escribiremos un número n como "$b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1 b_0$" si esa secuencia de cifras es su expresión en binario; recordemos que eso significa que*

$$n = b_0 + 2b_1 + 2^2 b_2 + \cdots + 2^k b_k \,,$$

donde $b_i = 0$ o $b_i = 1$ para cada i.

Llegaremos hasta las cuatro cifras en binario para tratar de adivinar esa expresión de $f(n)$, o sea hasta $n = 15$: escribiendo $x \mapsto y$ para decir $f(x) = y$, tenemos

$$\begin{aligned} &1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 1,\ 5 \mapsto 5,\ 6 \mapsto 3,\ 7 \mapsto 7,\ 8 \mapsto 1,\ 9 \mapsto 9, \\ &10 \mapsto 5,\ 11 \mapsto 13,\ 12 \mapsto 3,\ 13 \mapsto 11,\ 14 \mapsto 7 \text{ y } 15 \mapsto 15\,. \end{aligned}$$

En binario es mejor:

$$\begin{aligned} &\text{“1”} \mapsto \text{“1”},\ \text{“10”} \mapsto \text{“1”},\ \text{“11”} \mapsto \text{“11”},\ \text{“100”} \mapsto \text{“1”},\ \text{“101”} \mapsto \text{“101”},\ \text{“110”} \mapsto \text{“11”}, \\ &\text{“111”} \mapsto \text{“111”},\ \text{“1000”} \mapsto \text{“1”},\ \text{“1001”} \mapsto \text{“1001”},\ \text{“1010”} \mapsto \text{“101”},\ \text{“1011”} \mapsto \text{“1101”}, \\ &\text{“1100”} \mapsto \text{“11”},\ \text{“1101”} \mapsto \text{“1011”},\ \text{“1110”} \mapsto \text{“111”} \text{ y } \text{“1111”} \mapsto \text{“1111”}\,. \end{aligned}$$

Es fácil ahora adivinar que, si vemos n escrito en binario, entonces $f(n)$ es el número dado por las mismas cifras en orden inverso.

Tenemos que probarlo, y lo haremos por inducción completa sobre el número de cifras: visto lo anterior, sea $k \geq 4$ y supongamos que lo afirmado es cierto para números n que en binario tienen no más de k cifras (es decir, para todos los menores que 2^k). Queremos ver que, si $n =$ "$b_k \dots b_2 b_1 b_0$", con $b_k = 1$, entonces $f(n) =$ "$b_0 b_1 \dots b_k$" (donde por supuesto podríamos quitar todas las cifras anteriores a la primera que sea 1). Para que lo que sigue sea más claro, recordemos que multiplicar por 2^j, en binario, se expresa añadiendo j ceros al final. Observemos también que, en la definición del enunciado de f, podemos cambiar $2n+1$ por $4n+2$.

Primero lo vemos en el caso en que "$b_1 b_0$" = "00". Entonces $n = 4$"$b_k \dots b_2$", y por tanto

$$f(n) = f(\text{“}b_k \dots b_2\text{”}) = \text{“}b_2 \dots b_k\text{”} = \text{“}b_0 b_1 \dots b_k\text{”}.$$

Ahora supondremos que "$b_1 b_0$" = "10". Entonces $n = 2$"$b_k \dots b_2 1$", y

$$f(n) = f(\text{“}b_k \dots b_2 1\text{”}) = \text{“}1 b_2 \dots b_k\text{”} = \text{“}b_0 b_1 \dots b_k\text{”}.$$

Quedan los dos casos más complicados: si "$b_1 b_0$" = "01", entonces $n = 4$"$b_k \dots b_2$" $+1$, y 4"$b_k \dots b_2$" $+ 2 =$ "$b_k \dots b_2 10$", luego

$$\begin{aligned} f(n) &= 2\text{“}1 b_2 \dots b_k\text{”} - \text{“}b_2 \dots b_k\text{”} \\ &= \text{“}1 b_2 \dots b_k 0\text{”} - \text{“}b_2 \dots b_k\text{”} = \text{“}10 b_2 \dots b_k\text{”}\,, \end{aligned}$$

ya que la última igualdad equivale a

$$\text{“}10 b_2 \dots b_k\text{”} + \text{“}b_2 \dots b_k\text{”} = \text{“}1 b_2 \dots b_k 0\text{”}\,,$$

lo que es cierto: si $m =$ "$b_2 \dots b_k$" ambos términos valen $2^k + 2m$.

Por último, si "$b_1 b_0$" = "11" entonces $n = 4$"$b_k \dots b_2$" $+ 3$, y otra vez 4"$b_k \dots b_2$" $+ 2 =$ "$b_k \dots b_2 10$", *así que*

$$\begin{aligned} f(n) &= 3\text{“}1b_2 \dots b_k\text{”} - 2\text{“}b_2 \dots b_k\text{”} \\ &= (2+1)\text{“}1b_2 \dots b_k\text{”} - \text{“}b_2 \dots b_k0\text{”} \\ &= \text{“}1b_2 \dots b_k0\text{”} + \text{“}1b_2 \dots b_k\text{”} - \text{“}b_2 \dots b_k0\text{”} = \text{“}11b_2 \dots b_k\text{”}\,. \end{aligned}$$

Conclusión: la respuesta a la pregunta es el número de valores de $\{1, 2, 3, \dots, 2022\}$ *cuya expresión en binario es capicúa. El menor número de doce cifras en binario es* $2^{11} = 2048$*, luego todos los que buscamos tienen como máximo once cifras en binario. Es fácil contar, si consideramos los números con un número de cifras binarias dado, cuántos de ellos son capicúas. Por ejemplo, con siete cifras tenemos ocho, de la forma* “$1b_1b_2b_3b_2b_11$” *para cada elección de* $b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\}$*. Y para ocho cifras es igual, porque son los de la forma* “$1b_1b_2b_3b_3b_2b_11$”*. Sumando, el número de capicúas con un máximo de 11 cifras binarias es* $1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 32 = 94$*. No debemos contar al mayor de todos ellos, que es* “11111111111” $= 2048 - 1 = 2047$*, pero sí al segundo más grande, que es* “11111011111” $= 2047 -$ “100000” $= 2047 - 32 = 2015$.

En definitiva, la respuesta a la pregunta que se plantea es 93.

Notemos que la respuesta correcta al problema que se propuso en la IMO de 1988 era 92, porque había que descontar a 2015 pero no al anterior, que es “11110101111” $= 2047 - 64 - 16 = 1967$.

Lo más habitual es que los problemas sobre ecuaciones funcionales que se proponen desde hace muchos años en olimpiadas matemáticas no requieran conocimientos de Análisis Matemático, por básicos que sean (como límites, continuidad, diferenciabilidad, integración y suma de series). Eso no impide que, algunas veces, se pueda recurrir a ellos para resolver el problema de una manera más directa que la que después aparece en las soluciones oficiales.

Terminamos nuestro repaso con un problema muy reciente de lo anterior. Nuestra resolución es más corta que la oficial, a costa de usar (de manera muy elemental) la derivación de funciones reales.

Problema 11.4 (Olimpiada Matemática Española - fase local, 2022) Se pide encontrar todos los polinomios $p(x)$ con la siguiente propiedad: para cualesquiera x, y, z

$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)\,.$$

Solución *Cualquier función polinómica* p *solución de la ecuación se puede derivar indefinidamente. En la ecuación propuesta, si suponemos fijos* y, z *y derivamos ambos términos como funciones de* x*, obtenemos*

$$p'(x) + p'(x + y + z) = p'(x + y) + p'(z + x)\,,$$

y esta condición es cierta para todos x, y, z*. Si derivamos ambos términos en esta igualdad considerándolos funciones de* y*, resulta*

$$p''(x + y + z) = p''(x + y)\,,$$

cierto para todos x, y, z*. Si tomamos por ejemplo* $x = y = 0$ *concluimos que* p'' *es constante. Y entonces* $p(x)$ *debe ser un polinomio de grado menor o igual que 2.*

Recíprocamente, es muy fácil y rutinario comprobar que cualquier $p(x) = ax^2 + bx + c$ *es una solución de la ecuación propuesta.*

Por tanto, el conjunto de polinomios que satisfacen la ecuación funcional del enunciado es exactamente el de los polinomios de grado 0, 1 ó 2.

Ejercicios Propuestos

1. Hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen
$$f\big(f(y) + xf(x)\big) = y + f(x)^2 \,.$$
Pista: El enunciado dice que f debe ser suprayectiva, y podemos considerar a tal que $f(a) = 0$.

2. Encontrar todas las funciones $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumplen, para todo n, que
$$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) + f\big(f(n)\big) + f(n) = 3\,n \,.$$
Pista: Conviene notar que f debe ser inyectiva.

3. Sea $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ una función que satisface la *ecuación de Jensen*:
$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \text{, con } x, y \in \mathbb{Q} \,.$$
Si llamamos $a = f(0)$ y $b = f(1)$, se pide el valor de $f(x)$ para cada $x \in \mathbb{Q}$.

   Pista: Se puede aprovechar lo que hemos visto sobre la ecuación de Cauchy.

4. (International Mathematical Olympiad, 1990) Hallar una función $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$ se satisface la igualdad
$$f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y} \,.$$
Pista: El primer objetivo debe ser probar que una tal función f debe cumplir que $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$. Para dar con una solución, se pueden considerar entonces los números primos.

Bibliografía Adicional

1. Engel, A. (1998). Functional Equations. *Problem-Solving Strategies*. Editorial Springer, 271-288.