

UMA COMPARAÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE A DEFINIÇÃO E AS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES ANTES E DEPOIS DE UMA EXPERIÊNCIA DE FORMAÇÃO

A COMPARATION OF THE KNOWLEDGE IN THE DEFINITION AND THE MULTIPLE REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS BEFORE AND AFTER A TRAINING EXPERIENCE

UNA COMPARACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE LA DEFINICIÓN Y MÚLTIPLES REPRESENTACIONES DE FUNCIONES ANTES Y DESPUÉS DE UNA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE

Otavio Paciullo Furquim*; Gabriel Oliveira Pinto**; William Vieira*** Roberto Seidi Imafuku****

Furquim, O.P.; Pinto, G.; Vieira, W.; Imafuku, R.S. (2022). Uma comparação de conhecimentos sobre a definição e as múltiplas representações de funções antes e depois de uma experiência de formação. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 17(3), pp. 643-660 DOI: 10.14483/23464712.17633

Resumo

Apresentamos, neste artigo, os resultados de uma comparação dos conhecimentos acerca da definição e das múltiplas representações de funções que licenciandos em matemática tinham no início e após um ano de formação superior. Os participantes responderam a dois questionários, um no início do primeiro ano letivo e outro no início do segundo ano. As respostas foram classificadas segundo uma análise de erros e analisadas à luz da interação de aspectos formais, intuitivos e algorítmicos. A análise comparativa entre os resultados dos estudantes nos primeiro e segundo momentos revelou que houve uma melhoria no desempenho dos participantes, o que indica que o processo de formação contribuiu com a capacidade dos estudantes de inter-relacionar os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos durante a resolução dos problemas propostos.

Palavras-Chave: Aspectos algoritmos. Aspectos intuitivos. Aspectos formais. Análise de erros. Funções. Formação de professores..

Fecha de recibido: mayo de 2021. Fecha de aceptado: agosto de 2022

* Graduado em Licenciatura em Matemática. Colégio Humboldt, Brasil Email: otaviopfurquim@gmail.com – ORCID 0000-0002-6449-9969

** Pós-Graduado em Formação de Professores. Centro Universitário ENIAC, Brasil. Email: gabrieloliveirabrotero@gmail.com – ORCID 0000-0001-7530-2589

*** Doutor em Educação Matemática. IFSP – Campus Guarulhos, Brasil. Email: wvieira@ifsp.edu.br – ORCID 0000-0002-5592-891X

**** Doutor em Educação Matemática. IFSP – Campus Guarulhos, Brasil. Email: roberto.imafuku@ifsp.edu.br – ORCID 0000-0002-4047-9533

Abstract

In this paper, we present the results of a comparison of knowledge about the definition and multiple representations of functions that undergraduates in mathematics had at the beginning and after a year of learning in higher education. Participants answered two questionnaires, one at the beginning of the first academic year and another at the beginning of the second year. The answers were classified according to an error analysis and studied in the light of the interaction of formal, intuitive and algorithmic aspects. The comparative analysis between the students' results in the first and second moments revealed that there was an improvement in the participants' performance, which indicates that the training process contributed to the students' ability to interrelate the formal, intuitive and algorithmic aspects during the resolution of the proposed problems.

Keywords: Algorithmic aspects. Intuitive aspects. Formal aspects. Error analysis. Functions. Teacher training.

Resumen

En este artículo presentamos los resultados de una comparación de conocimientos sobre la definición y múltiples representaciones de funciones, presentes en estudiantes de licenciatura en matemáticas, al inicio y después de un año de aprendizaje en la educación superior. Los participantes respondieron dos cuestionarios, uno al comienzo del primer año académico y otro al comienzo del segundo año. Las respuestas se clasificaron según un análisis de errores y se analizaron a la luz de la interacción de aspectos formales, intuitivos y algorítmicos. El análisis comparativo entre los resultados de los estudiantes en el primer y segundo momento reveló que hubo una mejora en el desempeño de los participantes, lo que indica que el proceso de formación contribuyó a la capacidad de los estudiantes para interrelacionar los aspectos formales, intuitivos y algorítmicos durante la resolución de los problemas propuestos.

Palabras-Clave: Aspectos algorítmicos. Aspectos intuitivos. Aspectos formales. Análisis de errores. Funciones. Formación del profesorado.

1. Introdução

Com destaque em currículos, desde a Educação Básica ao Ensino Superior, o conceito de função é central no estudo da Matemática, sendo importante para as mais diversas áreas do conhecimento, funções são utilizadas por infectologistas para desenhar a projeção do número de possíveis infectados durante uma epidemia, podem ser utilizadas para projetar a curva de aprendizado de uma criança, além de serem utilizadas nas finanças para calcular o preço ideal de alguns produtos. Devido a sua

importância para as diversas áreas do conhecimento, este estudo visa observar e comparar o desenvolvimento de estudantes do Ensino Superior, antes e após uma experiência de formação em que se abordou o estudo de funções e suas representações, visto que o assunto tem destaque nos programas oficiais para o ensino de Matemática da Educação Básica brasileira, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e o currículo do estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011).

As orientações oficiais reiteram a importância do estudo de funções na formação matemática de

estudantes do Ensino Básico e é citado pela primeira vez no currículo de Matemática do estado de São Paulo (2011) no 9º ano do Ensino Fundamental, que aponta como essencial o entendimento de função como “(...) a relação de interdependência entre grandezas” (SÃO PAULO, 2012, p.63). No Ensino Médio, novos tipos de funções são trabalhados e, segundo este documento, ao final do terceiro ano os alunos devem “(...) saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e de 2º grau, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características” (SÃO PAULO, 2012, p. 63).

Apesar de ser um tema central no estudo da Matemática, há muitos anos pesquisadores como Meneghetti, Rodriguez e Poffal (2017), Panaoura (2017), Faour (2020) e Oliveira (1997) vêm apontando para o fato de que, na realidade, apenas uma pequena parcela dos estudantes tem completa compreensão sobre o conceito de função e suas múltiplas representações ao final de sua formação básica. Por exemplo, Vinner e Dreyfus (1989) constataram que, em média, apenas 40% dos estudantes israelenses do Ensino Médio conseguiram identificar os elementos que compunham uma função em sua representação gráfica.

Meneghetti *et al.* (2017) apontam que após a formação no ensino básico, os estudantes devem “(...) ter autonomia para interpretar um gráfico e reconhecê-lo em situações diversas pois a compreensão de um conceito matemática em geral está relacionada à capacidade do aluno em migrar de uma forma de representação matemática para a outra” (MENEGETTI *et al.* 2017 p.166).

Além deles, Panaoura (2017), fez uma pesquisa com 756 estudantes do Ensino Médio de Chipre para verificar como os estudantes explicitavam, reconheciam e resolviam problemas envolvendo o conceito de funções e suas múltiplas representações. Ao analisar seus resultados, o autor encontrou altas taxas de erros e conclui que uma possível explicação para isso é o fato de que

os professores usualmente supervalorizam o objetivo de acertar as questões e para isso trabalham com funções prontas e definidas apenas em intervalos não discretos com seus alunos (PANAOURA, 2017 p.738), tornando mais fáceis as tarefas escolares.

Faour (2020), também interessado no tema, aplicou um questionário diagnóstico para alunos do Ensino Médio libaneses para avaliar se estes sabiam explicar o conceito de função e reconhecer este objeto matemático por meio de sua representação gráfica. O autor concluiu que mesmo após três anos do Ensino Médio estudando funções, apenas 19 dos 465 participantes demonstraram em suas respostas terem desenvolvido uma profunda compreensão dos elementos e do conceito de função (FAOUR, 2020 p. 6).

Com relação ao Ensino Superior, Oliveira (1997) observou em seu estudo que ao entrarem no curso de Cálculo “(...) os alunos, em geral, confundem atributos do conceito com os exemplos de função (...) e definem função como equação” (OLIVEIRA, 1997 p. 125). Porém, segundo o autor, as disciplinas de formação matemática no Ensino Superior provocaram um avanço nas concepções dos participantes da pesquisa sobre a definição de função e suas múltiplas representações (OLIVEIRA, 1997 p.126).

Inspirados nas pesquisas de Vinner e Dreyfus (1989), Panaoura (2017) e Faour (2020) realizamos uma pesquisa com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública brasileira para avaliar, assim como Oliveira (1997), quais conhecimentos sobre funções os participantes tinham ao ingressar no Ensino Superior e como a formação matemática nas diversas disciplinas do curso impactou seus conhecimentos sobre este tema. Para isso, foram aplicados questionários diagnósticos que envolviam o tema funções em dois momentos distintos da formação dos participantes. Os questionários foram analisados e os erros encontrados foram classificados em tabelas e comentados sob a luz da interação de

aspectos algorítmicos, intuitivos e formais colocados por Fischbein (1994).

A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais colocados por Fischbein (1994) é o referencial teórico adotado na análise dos resultados, que apresentamos no que segue.

2. Marco teórico

Fischbein (1994) discute sobre a necessidade de avaliarmos se existe, ou não, uma interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos quando uma pessoa está em atividade matemática. Segundo o autor, devemos olhar a Matemática como uma atividade humana que envolve momentos de “iluminação, hesitação, aceitação e refutação” (FISCHBEIN, 1994 p. 231). Além disso, defende que a interação dos aspectos deve guiar nossas práticas, se desejamos que nossos estudantes sejam capazes, eles mesmos, não só de produzir afirmações e provas, mas também de verificar a veracidade das mesmas.

A seguir, descrevemos brevemente cada um dos aspectos colocados por Fischbein (1994).

O aspecto formal se refere aos axiomas, definições, teoremas e demonstrações e eles “(...) têm de penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio. Devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente pelo estudante” (FISCHBEIN, 1994 p. 232), pois tais conhecimentos compõem o núcleo do currículo escolar de Matemática. Além disso, o autor ressalta que o pensamento proposicional e as construções hipotético-dedutivas não são espontaneamente adquiridos pelos sujeitos e que só um bom processo de ensino pode incentivar essa aquisição. Um aluno que se questiona sobre a paridade do número 0 e, para responder a essa questão, recorre a definição de números pares e ímpares está se valendo de aspectos formais para encontrar uma resposta.

O aspecto algorítmico se refere aos procedimentos e técnicas de resolução, e também tem papel central no processo de produção matemática, pois apenas o conhecimento formal sobre as propriedades e

definições não é suficiente para resolver problemas. É preciso saber manipular os mais diversos elementos durante a atividade matemática. Segundo Fischbein, “(...) Esta profunda simbiose entre significado e habilidades é uma condição básica para o produtivo e eficiente raciocínio matemático” (FISCHBEIN, 1994 p. 232). Ao utilizar regras de resolução de equações para encontrar os elementos da imagem que correspondem a elementos específicos do domínio de uma função ou para determinar as raízes de uma função quadrática, um sujeito está se valendo de aspectos algorítmicos.

O aspecto intuitivo, por sua vez, se manifesta nos conhecimentos matemáticos aparentemente evidentes, que não parecem precisar de comprovação, como por exemplo, “A parte é sempre menor que o todo” ou “multiplicar sempre aumenta o número”. O aspecto intuitivo é algo que um sujeito considera auto evidente e não vê necessidade de prova ou justificativa (FISCHBEIN, 1994). Esse tipo de pensamento norteia a resolução de um problema durante a atividade matemática. Fischbein (1994) destaca que, se os aspectos intuitivos do estudante estiverem de acordo com as verdades matemáticas, eles podem facilitar os processos de criação e de resolução de problemas, contudo, se estiverem em desacordo com as leis matemática, podem ser um caminho para dificuldades e equívocos por partes dos aprendizes, por isso é importante que aspectos intuitivos mereçam atenção durante o processo de ensino.

Ao defender a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, Fischbein destaca que “(...) a capacidade de processar uma informação não é controlada somente pelas estruturas lógicas, mas também por modelos intuitivos, que agem de maneira implícita, colocando restrições e definindo caminhos” (FISCHBEIN, 1994 p. 237). Essas são as ideias teóricas que baseiam nossas análises. No que segue, apresentamos os procedimentos metodológicos empregados na investigação.

3. Metodologia de pesquisa

Para atingir nossos objetivos, no início do primeiro semestre de 2019, um Questionário diagnóstico contendo seis questões sobre funções e inequações, desenvolvidas a partir dos conteúdos encontrados em livros didáticos destinados ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio, que foram homologados pelo Ministério da Educação com destino à rede pública de ensino, foi aplicado para os quarenta e dois ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino brasileira que aceitaram participar voluntariamente do estudo. Um ano depois, no início do primeiro semestre de 2020, após os participantes da pesquisa terem passado por uma nos de formação matemática e cursado disciplinas de Fundamentos de Matemática 1 e Fundamentos de Matemática 2, nas quais são abordadas funções de diferentes tipos e suas diversas representações, aplicamos para os dezenove estudantes remanescentes um novo Questionário diagnóstico, com novas seis questões sobre funções e inequações e que apresentavam a mesma estrutura das que foram aplicadas no ano anterior. Ambos os questionários traziam uma questão que solicita a definição de função e outra que aborda a classificação de gráficos em função e não-função. Neste artigo, discutimos as respostas dos participantes à essas duas questões, nos dois questionários.

Antes de responderem as questões, todos os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e, nas análises dos dados coletados, são tratados por apelidos de modo a garantir o anonimato.

Em ambas as situações, as questões foram respondidas individualmente, com duração máxima de trinta minutos, no campus em que os participantes estudam e no horário de aula das disciplinas, com duração máxima de 1h30, não foi permitido nenhum tipo de consulta a materiais externos e os pesquisadores não forneceram nenhuma informação adicional, além daquelas constantes nos enunciados das questões

propostas. Nos Questionários aplicados haviam outras questões, que tratavam sobre outras formas de representação de funções e inequações, mas que não serão discutidas nesse artigo.

Após a aplicação de cada um dos Questionários, foi realizada uma avaliação das respostas dadas pelos participantes, acompanhada de uma Análise de Erros proposta por Cury (2007). Este procedimento metodológico está baseado em uma análise de conteúdo, que visa identificar classes de erros que são recorrentes nas resoluções de problemas. Por fim, foi elaborado um quadro que apresenta as frequências percentuais de cada tipo de erro identificado.

4. Resultados

Para que possamos comparar o desempenho dos estudantes antes e depois da experiência de formação, a estrutura da análise dos resultados obtidos em nossa pesquisa está colocada da seguinte forma: começamos com a análise das duas questões selecionadas por nós para este artigo e que estão presentes no Primeiro Questionário; em seguida, apresentamos a análise das duas questões do Segundo Questionário, nos mesmos moldes da análise realizada no Primeiro Questionário; por fim, apresentamos uma discussão comparativa sobre os resultados obtidos pelos participantes em ambos os questionários.

4.1. Análise do Primeiro Questionário

A seguir apresentamos os enunciados e as análises didáticas das duas questões presentes no Primeiro Questionário e que são discutidas neste trabalho, seus quadros de erros e as análises de cada tipo de erro encontrado.

Questão 1

Explique, com suas palavras, o que você entende por função.

Essa questão foi proposta com o objetivo de verificar a forma com que os estudantes exprimem o conceito e as ideias que possuem sobre função. Nessa questão, estamos interessados em observar a interação dos aspectos formais e intuitivos nas respostas apresentadas pelos participantes.

A análise dos protocolos revelou que apenas as respostas de Bia e Maria, apresentadas na Figura 1, podem ser consideradas corretas (apesar de Maria restringir sua resposta apenas as funções reais de variável real), pois destacam ideias de que funções relacionam elementos de dois conjuntos e que cada elemento do domínio deve estar associado a um único elemento do contradomínio. Com isso, temos um total de 4% de acertos.

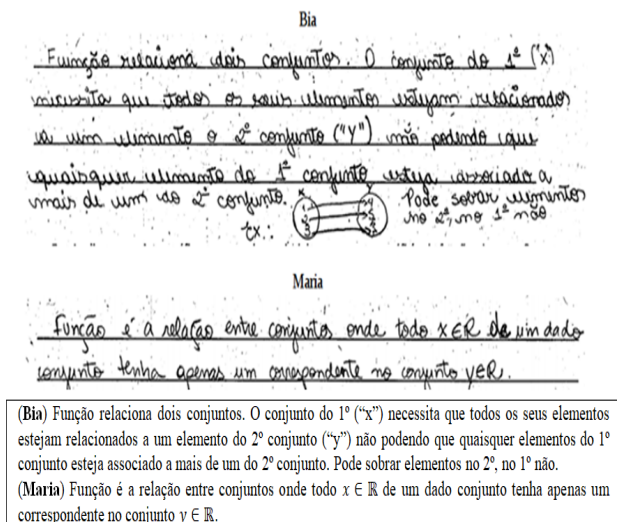


Figura 1. Respostas de Bia e Maria para a Questão 1 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

O Quadro 1, apresenta as classes de erros identificadas nas respostas consideradas incorretas e, em seguida, exemplificamos e discutimos cada um dos erros identificados. Ressaltamos que uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma classe de erro, por isso a soma dos percentuais das classes não totaliza 100%.

Quadro 1. Classes de erros da Questão 1 do Primeiro Questionário.

	Classes de erros	%
A1	Expressar a definição por meio de exemplo	25
A2	Restringir a ideia de função ao plano cartesiano	41
A3	Deixar de utilizar a ideia de conjuntos	77
A4	Deixar de utilizar a ideia da unicidade entre os elementos dos conjuntos	86
A5	Em branco	2

Fonte: Elaborado pelos autores.

A resposta de Pedro (Figura 2), diz que função é “uma relação entre dois termos que dependam um do outro. À medida que um deles muda, o outro também muda”. Apesar de apresentar um aspecto intuitivo correto sobre função, que é a dependência entre duas grandezas, se encaixa no erro do tipo A1, *Expressar a definição por meio de exemplo*, porque o participante acaba exprimindo a ideia de função usando a relação de dependência entre a medida do raio e a área da superfície do círculo. Além disso, a resposta de Pedro também se encaixa na classe de erro tipo A3, *Deixar de utilizar a ideia de conjuntos*, pois apresenta uma relação entre dois termos, sem relacioná-los à ideia de conjunto, domínio e contradomínio. Ao deixar de apresentar elementos essenciais para a definição de função, o participante revela ter desenvolvido aspectos formais incorretos sobre o tema.

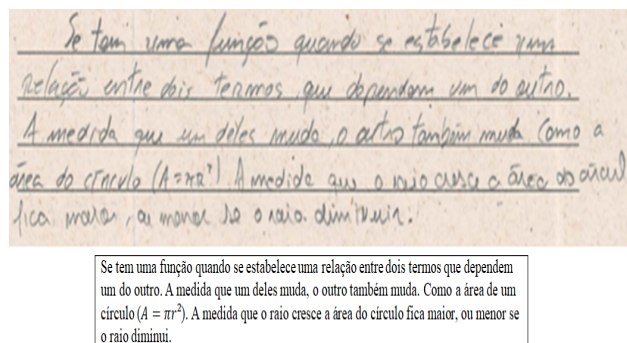


Figura 2. Resposta de Pedro para a Questão 1 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta de Denise (Figura 3) apresenta um aspecto intuitivo vago sobre a dependência entre dois elementos, e evidencia o erro tipo A2, *Restringir a ideia de função ao plano cartesiano*, pois traz a ideia das coordenadas x e y de um ponto no plano ao definir função. Podemos observar que sua resposta se encaixa também na classe de erro A3, *Deixar de utilizar a ideia de conjuntos*, demonstrando que, assim como Pedro, Denise apresenta incompreensões relacionadas a aspectos formais de funções.

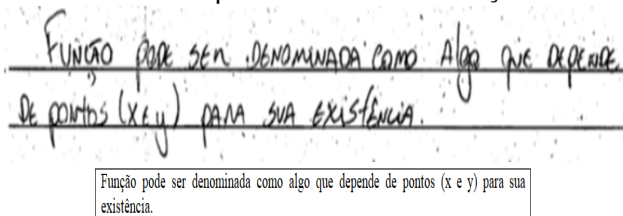


Figura 3. Resposta de Denise para a Questão 1 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

João (Figura 4) tenta exprimir a definição de função por meio de um exemplo ao dizer que funções “são representadas por equações com uma ou mais incógnitas”, se encaixando na classe A1, *Exprimir a definição por meio de um exemplo*, cometendo um erro relacionado aos aspectos formais pela falta de elementos necessários para definir uma função, e restringindo-se ao exemplo dado. Também não cita a ideia de conjuntos e por isso sua resposta se encaixa na classe A3, *Deixar de utilizar a ideia de conjuntos*. Esse tipo de erro foi bastante recorrente, com 77% de incidência nas respostas dos participantes. Além disso, podemos perceber que João confunde os conceitos de incógnita e variável em sua resposta, o que pode ser fruto de um aspecto intuitivo equivocado provocado pelo fato de utilizarmos equações para encontrar alguns elementos das funções, por exemplo, para determinar o elemento do domínio que tem uma imagem dada. A classe de erro A4, *Deixar de utilizar a ideia da unicidade entre os elementos dos conjuntos*, também pode ser observada nessa resposta, possivelmente causada pela não interação entre os aspectos formais e intuitivos ao definir função de uma forma vaga.

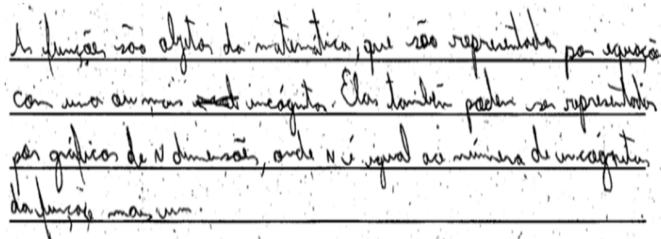


Figura 4. Resposta de João para a Questão 1 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta de Claudia (Figura 5) exemplifica o erro tipo A4, *Deixar de utilizar a ideia da unicidade entre os elementos dos conjuntos*. Em sua resposta, a participante indica entender que função é uma “relação entre duas partes”, ou seja, indica implicitamente conhecer que uma das características importantes de uma função é a de apresentar uma relação de dependência entre as variáveis, mas não apresenta a necessidade da unicidade para os elementos do domínio, e por isso sua resposta se enquadra na classe de erros tipo A4. Esta foi a classe de erros com maior incidência nas respostas dos participantes para o Primeiro Questionário, com 86%.

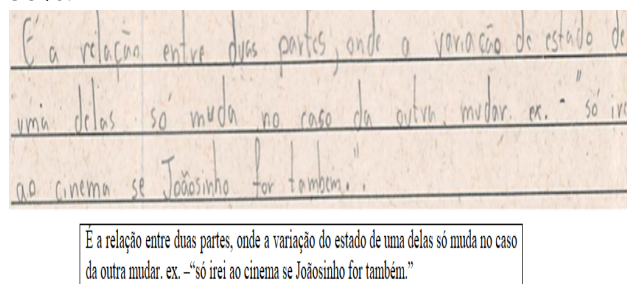


Figura 5. Resposta de Claudia para a Questão 1 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

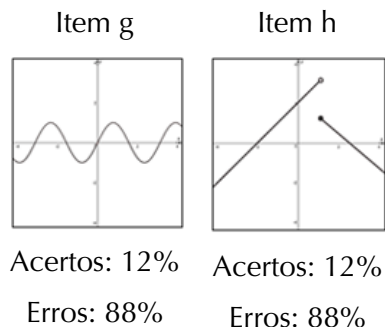
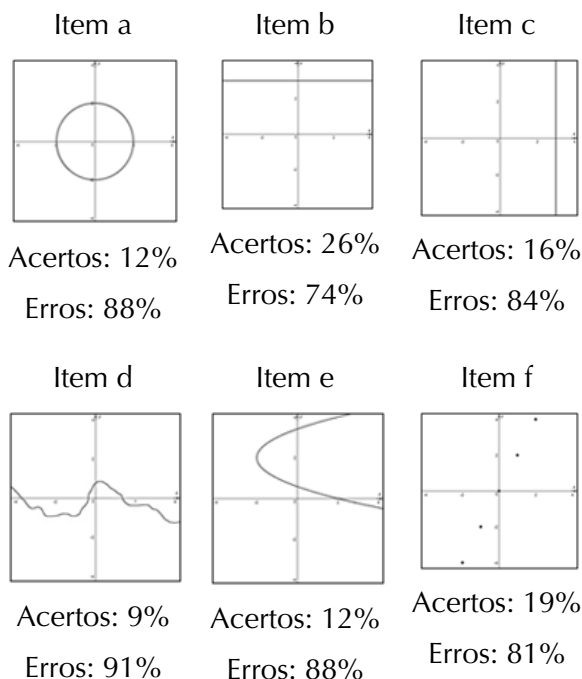
A classe A5, *Em branco*, enquadra as respostas dos participantes que não responderam à questão. A de questões em branco (2% do total) pode mostrar que os participantes estavam confiantes em responder sobre o tema, deixando poucas respostas em branco.

Ao analisar as respostas dos estudantes na primeira questão, podemos notar na maior parte delas a ausência de elementos essenciais para que se apresente uma definição correta de função. Destaque para a ideia da unicidade que não apareceu em 86% dos questionários (erro tipo A4) e para a ideia de conjuntos que não apareceu em 77% deles (erro tipo A3).

Questão 2

Analise os seguintes gráficos e responda: quais deles representam funções de x em y ? Justifique suas respostas (gráficos abaixo).

Com essa questão, procuramos identificar se os participantes conseguem identificar quais dos gráficos apresentados representam ou não funções de x em y . Além disso, avaliamos se os estudantes utilizam as definições apresentadas por eles na Questão 1 para justificar suas escolhas. Os percentuais destacados abaixo de cada um dos gráficos indicam muitas dificuldades dos participantes da pesquisa em identificar gráficos que representam, ou não, funções.



No Quadro 2, apresentamos uma classificação das justificativas consideradas incorretas. Ressaltamos que uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma classe de erro, por isso a soma dos percentuais das classes não totaliza 100%.

Quadro 2. Classes de erros da Questão 2 do Primeiro Questionário.

Classes de erros		%
B1	Confundir função com equação	48
B2	Confundir função de x em y com função de y em x	50
B3	Afirmar que função deve seguir um padrão	55
B4	Não reconhecer a representação de uma função discreta	64

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em sua resposta, José (Figura 6), identifica corretamente a circunferência e mostrou conhecer a equação dessa curva, porém afirma, de maneira incorreta, que esse gráfico representa uma função. Essa resposta exemplifica o erro tipo B1, *Confundir função com equação*, pois, ao usar o termo “função quadrática” para designar a equação da circunferência, o estudante confunde o conceito de função com o de equação e não apresenta nenhum elemento da definição como parte de sua justificativa, não mobilizando assim aspectos formais em conjunto com os intuitivos em sua resposta.

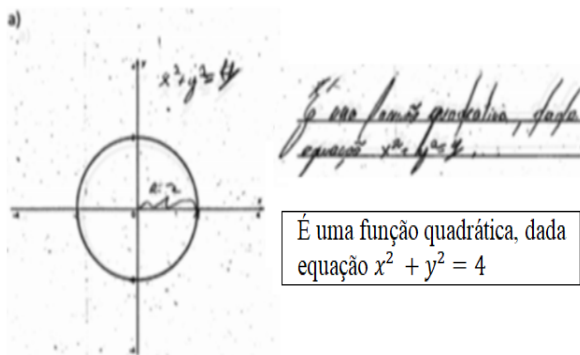


Figura 6. Resposta de José para o item a da Questão 2 do Primeiro Questionário.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A resposta de Matheus (Figura 7) para o item e da Questão 2 enquadra-se no erro tipo B2, *Confundir função de x em y com função de y em x*, pois ele não se atentou para o fato de a parábola ser originada por uma função de y em x. Neste caso, aspectos intuitivos relacionados à identificação do gráfico da função do 2º grau podem ter levado o participante a identificar essa curva como a representação gráfica de uma função; ou seja, o estudante reconheceu um gráfico de formato conhecido (a parábola) e isso o levou a classificá-lo como função, sem se preocupar com a relação entre os elementos dos conjuntos domínio e imagem. Essa perspectiva evidencia a ausência da interação entre aspectos intuitivos e formais na interpretação do estudante.

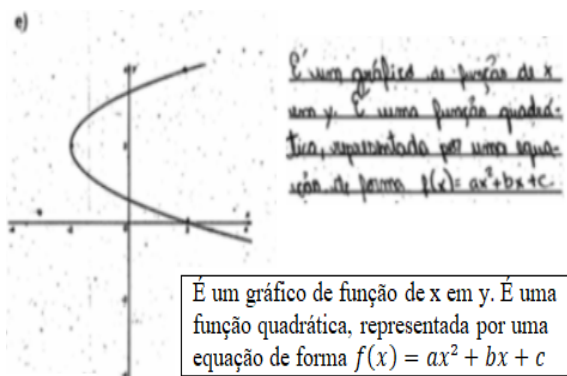


Figura 7. Resposta de Matheus para o item e da Questão 2 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta de Bárbara para o item d (Figura 8) caracteriza o erro tipo B3, *Afirmar que uma função deve seguir um padrão*, pois a participante afirma que o gráfico apresentado não representa uma função por não seguir um padrão, como uma reta ou parábola. É notado aqui uma dificuldade com aspectos intuitivos ao não identificar o gráfico como sendo uma função por não seguir um padrão, evidenciado na afirmação da participante “foge do padrão gráfico de uma função” e um erro relacionado a aspectos formais pelo fato da estudante não buscar a definição para validar suas conclusões.

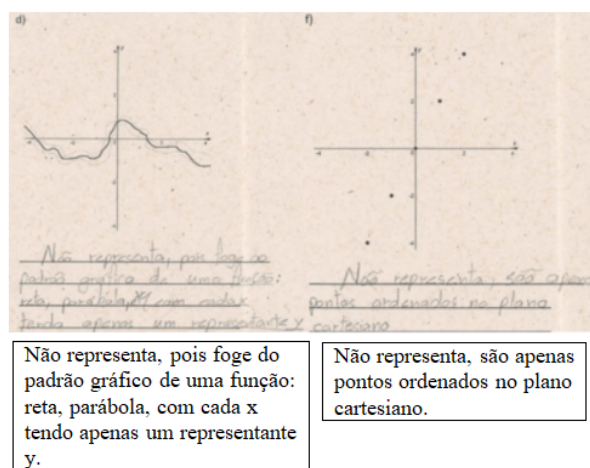


Figura 8. Respostas de Bárbara para os itens d e f da Questão 2 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta da participante para o item f (Figura 8) exemplifica o erro tipo B4, *Não reconhecer a representação de uma função discreta*. De fato, ao justificar que o gráfico não é uma função, pois “são apenas pontos ordenados no plano cartesiano”, a estudante indica não admitir uma função definida num domínio discreto, provavelmente por não ter sido apresentada a situações desse tipo durante sua formação escolar. Por exemplo, ao estudar PA e PG, o estudante poderia ter sido apresentada a uma abordagem que relacionasse essas sequências com funções de domínio inteiro positivo. Entendemos que um tipo de ensino que explorasse a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais relacionados a estruturas do

tipo \mathbb{Z} em \mathbb{R} poderiam minimizar incompreensões dessa natureza.

Respostas dessa natureza evidenciam um tipo de ensino que valoriza apenas funções que seguem um padrão, que valoriza apenas as funções reais de variável real. Isso termina por incutir uma ideia intuitiva equivocada sobre o conceito de função, e também evidenciam os problemas que podem ser ocasionados pela não interação de aspectos intuitivos e formais na aprendizagem de funções.

De maneira geral, justificativas dadas pelos estudantes na segunda questão apontam para uma predominância do uso de aspectos intuitivos em suas respostas. Em poucos casos foram identificadas mobilizações de aspectos formais para identificar quais gráficos seriam ou não representações de funções.

Mesmo Bia, que apresentou uma resposta correta para a Questão 1 (Figura 9), mostrando que possui uma boa compreensão dos aspectos formais envolvidos no estudo de funções, ao responder a Questão 2 apresentou justificativas como as mostradas a seguir.

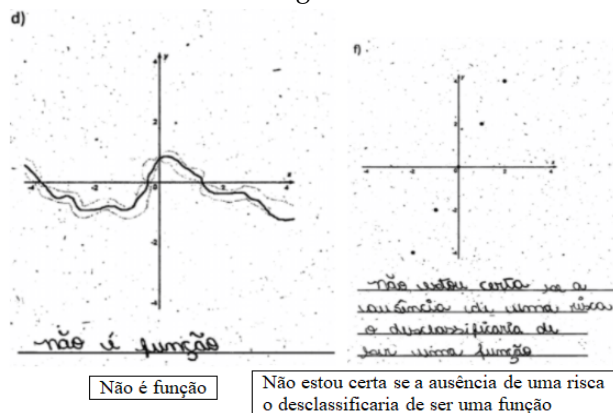


Figura 9. Respostas de Bia para os itens d e f da segunda Questão do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em ambas as respostas a estudante não inter-relaciona aspectos formais e intuitivos para apresentar suas justificativas. De fato, ela não cita nenhum dos elementos que elencou como essenciais para que seja definida uma função.

4.2. Análise do Segundo Questionário

A seguir apresentamos os enunciados e as análises didáticas de duas questões presentes no Segundo Questionário e que são discutidas neste trabalho, seguidas dos seus quadros de erros e das análises de cada tipo de erro encontrado. A Questão 1 é idêntica a apresentada no Primeiro Questionário, já a Questão 2, apesar de parecida, teve alguns de seus gráficos alterados.

Questão 1

Explique, com suas palavras, o que você entende por função.

Ao repetir essa questão, estamos interessados em saber como os dois semestres de formação em disciplinas de matemática no ensino superior que abordaram o estudo de funções influenciou, ou não, os conhecimentos dos participantes em relação ao conceito de função.

Consideramos que 26% dos participantes da pesquisa apresentaram respostas que podem ser consideradas corretas, um indicativo de que a formação superior que tiveram impactou positivamente alguns dos participantes da pesquisa no que se refere ao conceito de função. A análise das respostas para o Segundo Questionário mostrou que nenhum participante deu uma definição completamente correta. Porém, um exemplo de resposta que consideramos correta é a de Bruno (Figura 10), nela, apesar do estudante expressar ter conhecimento sobre a ideia de conjuntos e da unicidade entre as relações entre seus elementos, ele comete um erro ao afirmar que a função é um par ordenado, o que não é sempre verdade.

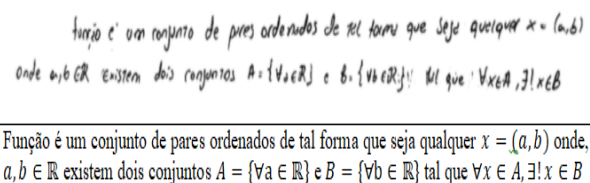


Figura 10. Resposta de Bruno para a Questão 1 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

Rogério (Figura 11), ao responder a questão, também define função de forma parcialmente correta. O estudante destaca a necessidade da relação estabelecida ser biunívoca, fato alheio a definição de função. De qualquer maneira, esses estudantes indicam possuir bons conhecimentos sobre o tema, embora tenham cometido alguns erros de natureza formal.

Função é uma relação entre dois conjuntos A e B de modo que se estabeleça uma relação biunívoca em relação dos dois conjuntos e de forma que para um X exista apenas um único $f(x)$.

Função é uma relação entre dois conjuntos A e B de modo que se estabeleça uma relação biunívoca em relação dos dois conjuntos e de forma que para um X exista apenas um único $f(x)$.

Figura 11. Resposta de Rogério para a Questão 1 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

No Quadro 3 apresentamos uma classificação dos erros das respostas consideradas incorretas. Em seguida, exemplificamos e discutimos cada um dos erros identificados. Ao analisar as respostas dadas no segundo questionário, não encontramos nenhum erro que pudesse originar uma nova classe de erros, portanto, optamos por manter os mesmos nomes das apresentadas anteriormente. Ressaltamos que uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma classe de erro, por isso a soma dos percentuais das classes não totaliza 100%.

Quadro 3. Classes de erros da Questão 1 do Segundo Questionário.

	Classes de erros	%
C1	Expressar a definição por meio de exemplo	11
C2	Restringir a ideia de função ao plano cartesiano	0
C3	Deixar de utilizar a ideia de conjuntos	32
C4	Deixar de utilizar a ideia da unicidade entre os elementos dos conjuntos	74
C5	Em branco	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

A classe de erros C1, *Expressar a definição por meio de exemplo*, engloba as respostas nas quais os estudantes se valeram de exemplos para tentar definir uma função. Em sua resposta, Marcelo (Figura 12) recorre a uma analogia, usando o exemplo de “uma ponte” na tentativa de apresentar uma definição. Esse tipo de resposta evidencia uma dificuldade dos estudantes em inter-relacionar aspectos formais e intuitivos durante a elaboração de suas respostas, pois ao tentarem expressar uma definição, apenas usam intuitivamente exemplos conhecidos por eles para apresentar suas ideias.

Função seria uma espécie de “ponte” que liga dois conjuntos, de forma que a quantidade de elementos do conjunto “destino” é menor ou igual à quantidade do conjunto “partida”.

Função seria uma espécie de “ponte” que liga dois conjuntos, de forma que a quantidade de elementos do conjunto “destino” é menor ou igual à quantidade do conjunto “partida”.

Figura 12. Resposta de Marcelo para a Questão 1 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A classe de erros C2, *Restringir a ideia de função ao plano cartesiano*, engloba as respostas nas quais os participantes se limitaram ao plano cartesiano para tentar definir uma função. Os participantes da pesquisa não voltaram a cometer erros dessa natureza no Segundo Questionário e, nesse sentido, podemos afirmar que o processo formativo ao qual os participantes foram submetidos impactou positivamente suas interpretações sobre as diferenças entre o plano cartesiano e o conceito de função.

Na classe de erros C3, *Deixar de utilizar a ideia de conjuntos*, enquadramos as respostas dos participantes que não apresentaram ou citaram a ideia de que função é uma relação entre conjuntos. Em sua resposta, o estudante Manoel (Figura 13) dá, corretamente, destaque à ideia de unicidade entre elementos quando aponta que “obtem-se um resultado único a aquele dado”,

mas não utiliza a ideia de conjuntos, parte fundamental do conceito de função.

Uma função é um dispositivo matemático em que se insere um dado inicial e obtém-se um resultado único a aquele dado.

Uma função é um dispositivo matemático em que se insere um dado inicial e obtém-se um resultado único a aquele dado.

Figura 13. Resposta de Manoel para a Questão 1 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A classe de erros C4, *Deixar de utilizar a ideia da unicidade entre os elementos dos conjuntos*, é a categoria que representa os erros dos estudantes que, em suas respostas, não evidenciaram a necessidade da unicidade da relação entre os elementos dos conjuntos para que se estabeleça uma função. A resposta de Débora (Figura 14) exemplifica esse erro, pois, mesmo tendo citado a ideia de relação entre conjuntos, não evidenciou que cada elemento do conjunto domínio está associado a um único elemento do conjunto contradomínio.

Função é algo que relaciona dois conjuntos, por exemplo A e B.

Função é algo que relaciona dois conjuntos, por exemplo A e B.

Figura 14. Resposta de Débora para a Questão 1 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

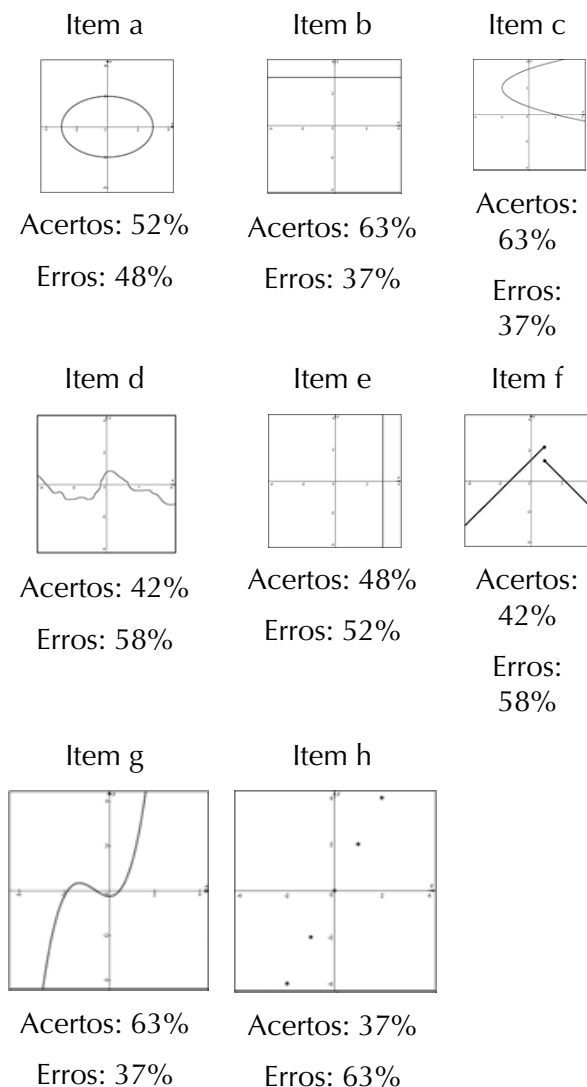
No geral, apesar da melhora nos índices de incidência dos erros nas questões apresentadas nesse artigo, ainda podemos observar que muitos participantes cometem erros relacionados a aspectos formais, ainda apresentando a definição de maneira vaga e confusa, se valendo de aspectos intuitivos equivocados sobre a ideia de função, mesmo após um ano de formação.

Seguimos com a análise da Questão 2 do Segundo Questionário.

Questão 2

Analise os seguintes gráficos e responda: quais deles representam funções de x em y ? Justifique suas respostas.

A Questão 2 segue o mesmo padrão apresentado no Primeiro Questionário, buscando verificar como o ano de formação impactou na capacidade dos estudantes de identificar quais gráficos representam, ou não, funções. Para o Segundo Questionário, três gráficos da Questão 2 foram trocados, mas de maneira que o objetivo da questão não fosse alterado.



No Quadro 4 apresentamos uma classificação das justificativas consideradas incorretas na Questão 2. Ressaltamos que uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma classe de erro, por isso a soma dos percentuais das classes não totaliza 100%.

Quadro 4. Classes de erros da Questão 2 do Segundo Questionário.

	Classes de erros	%
D1	Confundir função com equação	21
D2	Confundir função de x em y com função de y em x	16
D3	Afirmar que função deve seguir um padrão	21
D4	Não reconhecer a representação de uma função discreta	16

Fonte: Elaborado pelos autores.

A classe de erros D1, *Confundir função com equação*, engloba as respostas dos participantes que, como Ednaldo (Figura 15) cometeram erros relacionados aos aspectos formais ao confundir função com equação e marcar o item a como um representante de função.

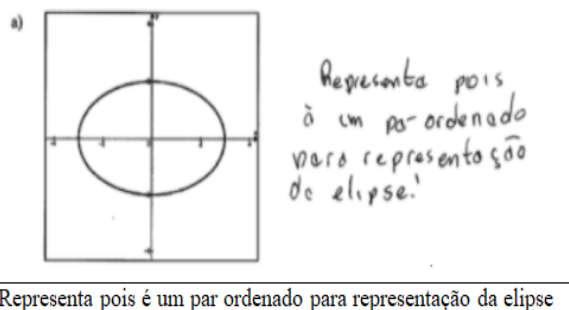


Figura 15. Resposta de Ednaldo para o item a da Questão 2 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A categoria de erros D2, *Confundir função de x em y com função de y em x*, engloba as respostas dos participantes que marcaram funções de y em x como funções de x em y. Podemos verificar esse tipo de erro na resposta de Junior (Figura 16), que identificou o gráfico como uma função quadrática, possivelmente por conta do seu

formato de parábola. A identificação de um gráfico conhecido em interação com aspectos formais relacionados à definição de função podem ter levado este participante a classificar, incorretamente, este gráfico como função de x em y.

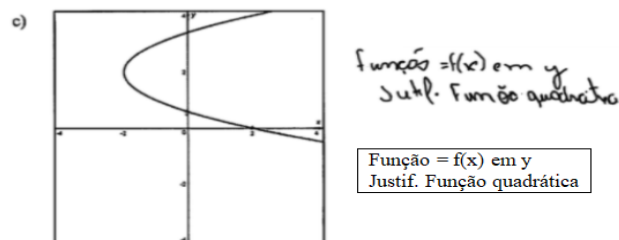


Figura 16. Resposta de Junior para o item c da Questão 2 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os erros da categoria D3, *Afirmar que função deve seguir um padrão*, enquadram as respostas dos estudantes que, em suas repostas, afirmaram que para que um gráfico ilustre uma função este deve seguir algum tipo de padrão, como pode ser identificado na resposta de Bruno (Figura 17), que exemplifica este tipo de erro. Nela, o participante afirma que o gráfico não representa uma função por “não estabelecer uma lei de formação clara”. Talvez o estudante só tenha tido contato com funções que sigam uma lei de formação (lei algébrica da função) e isso pode ter-lhe incutido um aspecto intuitivo equivocado que, ao não ser colocado em interação com aspectos formais relacionados à definição de função, termina por levar o estudante a este tipo de interpretação.

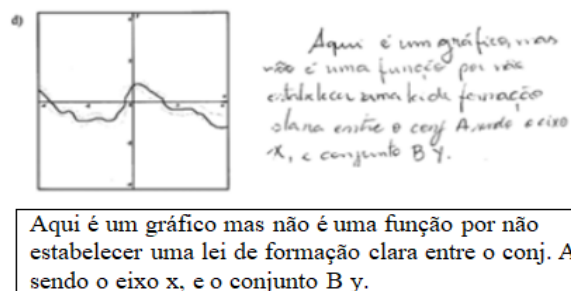


Figura 17. Resposta de Bruno para o item d da Questão 2 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A categoria D4, *Não reconhecer a representação de uma função discreta*, enquadra as respostas dos estudantes que não identificaram uma função com domínio discreto. A resposta de Laura (Figura 18) ilustra este tipo de erro, pois, ao afirmar que “são apenas pontos de uma possível” a estudante explicita um aspecto intuitivo equivocado. Possivelmente, a estudante não teve contato com gráficos de funções com domínio discreto ou a gráficos de sequências, como PG e PA, o que ocasionou o surgimento do aspecto intuitivo equivocado de que todo gráfico de função deve ser contínuo.

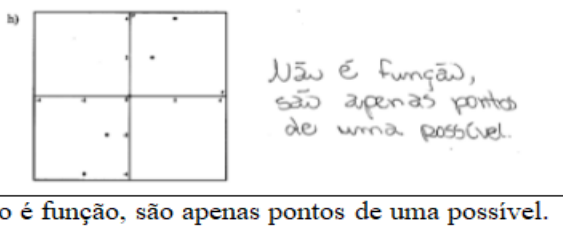


Figura 18. Resposta de Laura para o item h da Questão 2 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

De maneira geral, após um ano de formação superior em licenciatura em Matemática, os estudantes passaram a apresentar respostas que mobilizavam aspectos intuitivos e formais para justificar suas escolhas na Questão 2, como apresentamos a seguir.

Bruno (Figura 10), por exemplo, expressiu uma definição de função que pode ser considerada correta na Questão 1, sendo ela suficiente para que obtivesse êxito na Questão 2. Como exemplo do sucesso de Bruno em reconhecer gráficos de funções e não funções, destacamos na Figura 19 suas justificativas para os itens a e b.

Em suas respostas Bruno explicita a presença ou ausência dos elementos necessários para se reconhecer uma função nos gráficos e, assim, apresenta justificativas corretas. Isso indica que seus estudos no curso de Licenciatura em Matemática privilegiaram a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos permitindo ao estudante elaborar um raciocínio mais completo e assim encontrar as respostas corretas.

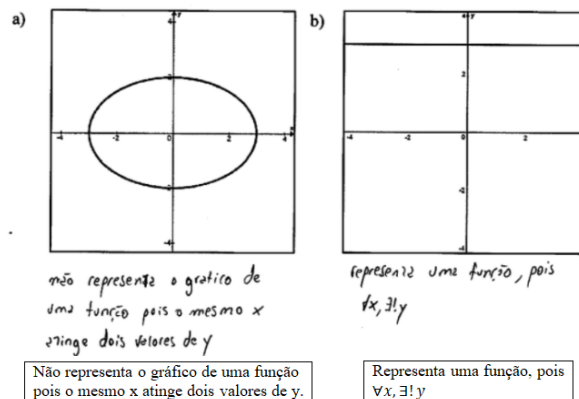


Figura 19. Respostas de Bruno para os itens a e b da Questão 2 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, apresentamos uma análise mais aprofundada dos progressos observados nas respostas dos estudantes ao passarem por dois semestres de formação.

4.3. Comparações entre as respostas dos dois Questionários

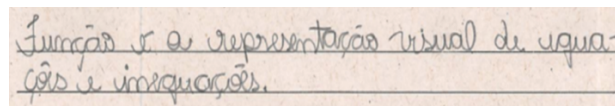
Na análise da Questão 1, em ambos os Questionários, verificamos a predominância dos aspectos algorítmicos e intuitivos nas definições apresentadas pelos participantes que, ao tentarem exprimir a ideia de função, deixaram de apresentar elementos essenciais que caracterizam este conceito. Ao compararmos as tabelas de erros das Questões 1 nos dois questionários, verificamos que houve, após um ano de estudos do curso de licenciatura em Matemática, uma diminuição na incidência de erros identificados no Primeiro Questionário. Com destaque para as categorias A3 e C3, que apresentaram redução de 45% nas suas ocorrências e para as categorias A2 e C2 que tiveram sua frequência zerada no Segundo Questionário. Num panorama geral, nos deparamos com um aumento de 4% para 26% de definições de função que podem ser consideradas corretas e uma diminuição na frequência de todos os tipos de erros observados no Primeiro Questionário com relação à Questão 1.

Na Questão 2, observa-se que em todos os itens houve melhora no desempenho dos estudantes, mesmo que tímidas, perspectiva que fica evidenciada no aumento das porcentagens de acertos. Até mesmo no gráfico que apresenta uma função de domínio discreto, como o item h da Questão 2 do Segundo Questionário, observamos um aumento na frequência de acertos. Isso é uma evidência de que durante esses dois semestres de formação, as disciplinas cursadas influenciaram positivamente as ideias dos participantes sobre o conceito e as múltiplas representações de uma função, perspectivas evidenciadas pela capacidade destes em reconhecer gráficos que representam, ou não, funções no Segundo Questionário.

Essas alterações nas porcentagens encontradas na aplicação do Segundo Questionário indicam que os estudos relacionados ao tema de funções permitiram aos participantes ter uma melhor compreensão acerca da definição de função na Questão 1. Além disso, ao utilizarem suas definições para apresentar justificativas coerentes na Questão 2, também fica evidenciado que os estudantes se tornaram mais proficientes em inter-relacionar aspectos formais e intuitivos na interpretação de gráficos.

A seguir, apresentamos uma análise das respostas de Laura para as Questões 1 e 2 dos dois questionários, buscando exemplificar os indicativos de que a formação superior em Licenciatura em Matemática de fato impactou no entendimento dos estudantes a respeito de funções e de suas múltiplas representações.

Ao apresentar essas duas questões em sequência nos Questionários, esperávamos que os participantes se valessem de suas definições apresentadas na Questão 1 para determinar, na Questão 2, quais dos gráficos representam, ou não, funções; contudo, ao comparar as respostas dadas pelos estudantes nas duas questões, encontramos respostas como as de Laura, que, no Primeiro Questionário, respondeu que “Função é a representação visual de equações e inequações” (Figura 20).



Função é a representação visual de equações e inequações.

Figura 20. Resposta de Laura para a Questão 1 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

Sua definição não possui os elementos necessários para uma definição correta de função, além disso, o fato dela mesma não fazer uso dessa resposta durante a análise dos gráficos da Questão 2 evidencia que a estudante não interage aspectos intuitivos e formais durante a identificação de gráficos como sendo ou não representações de funções, como mostra a Figura 21 abaixo.

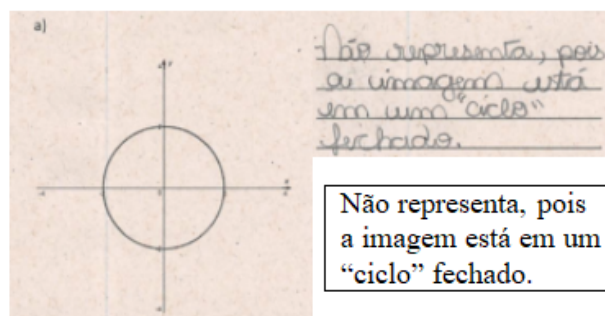


Figura 21. Resposta de Laura para o item a da Questão 2 do Primeiro Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

Laura afirma que este não é um gráfico de funções, mesmo este sendo a representação gráfica de uma circunferência que, segundo sua resposta na Questão 1, seria uma função. Mostrando que a participante não inter-relacionava, no momento da primeira aplicação do questionário, aspectos intuitivos e formais durante o desenvolvimento da atividade. Esse tipo de ocorrência, visto na maioria das respostas dos estudantes, demonstra que eles, durante a primeira aplicação do questionário, têm dificuldades de inter-relacionar aspectos formais, algorítmicos e intuitivos ao trabalhar com o tema de funções.

Após passar pelo primeiro ano de formação, cursando as disciplinas de Fundamentos de

Matemática 1 e 2, nas quais o tema de funções é abordado diretamente, podemos verificar que a estudante Laura apresenta melhor compreensão acerca de aspectos formais relacionados ao conceito de função funções (Figura 22, Figura 23 e Figura 24).

A definição apresentada por Laura agora, contém muito mais elementos corretos. Inclusive, embora não tenha destacado a necessidade de haver apenas um representante na Imagem para cada elemento do Domínio, a estudante utiliza essa regra para identificar, na segunda questão se os gráficos apresentados eram ou não representantes de funções, ou seja, aspectos intuitivos mostram que ela possui este conhecimento, apenas não o explicitou formalmente.

Situações como essas reforçam a necessidade de que professores, ao trabalhar esse conteúdo com seus alunos, procurem fazer a interação de aspectos algorítmicos como o teste da reta vertical com aspectos formais como a definição de função, ajudando seus alunos a compreender melhor os procedimentos adotados, tornando assim o processo de ensino aprendizagem menos mecânico e mais significativo para os alunos.

função é a relação de dependência entre dois conjuntos (A e B), sendo A o conjunto de "saída", ou seja, o número que, por meio de uma expressão previamente dada, definirá o conjunto B, que é o conjunto de "chegada".

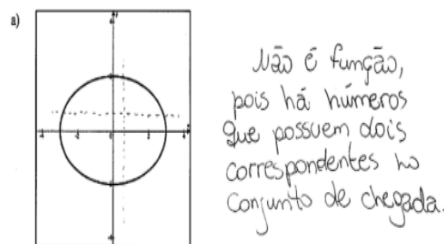
Função é a relação de dependência entre dois conjuntos (A e B), sendo A o conjunto de "saída", ou seja, o número que, por meio de uma expressão previamente dada, definirá o conjunto B, que é o conjunto de "chegada".

Figura 22. Resposta de Laura para a Questão 1 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em suas respostas para o Segundo Questionário, Laura demonstra conhecer melhor a definição de função, apresentando os conceitos de relação entre conjuntos. A participante inclusive utilizou o teste da reta vertical para identificar e justificar, corretamente, que o gráfico apresentado no item a da Questão 2 não se tratava de uma função.

Com isso, podemos afirmar que a experiência de formação superior a qual foi exposta a ajudou a melhorar seus conhecimentos acerca de funções e de suas múltiplas representações.



Não é função, pois há números que possuem dois correspondentes no conjunto de chegada.

Figura 23. Resposta de Laura para o item a da Questão 2 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

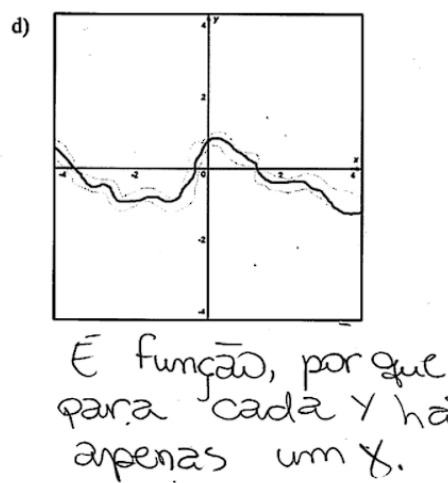


Figura 24. Resposta de Laura para o item d da Questão 2 do Segundo Questionário.

Fonte: Dados da pesquisa.

5. Considerações finais

Avaliando os resultados do Primeiro Questionário podemos verificar, da mesma forma que Faour (2020), que os estudantes têm dificuldades ao serem questionados sobre a definição de função. Acreditamos que essas dificuldades podem estar relacionadas a um tipo de ensino que não privilegia a inter-relação entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos pois, mesmo após passar pelo ensino médio, os

estudantes ainda não conseguiam expressar corretamente a definição e os conceitos que envolvem funções. A situação identificada por nós é semelhante às evidenciadas pelas pesquisas de Vinner e Dreyfus (1989) e Panaoura (2017), que também observaram grande dificuldade de estudantes do Ensino Médio com funções.

Nesse sentido, essas pesquisas indicam que, apesar dessas dificuldades já terem sido estudadas e reconhecidas há alguns anos, ainda não se observa mudanças estruturais na maneira como o tema funções é ensinado, perspectiva evidenciada por muitas dessas dificuldades continuarem sendo identificadas nas respostas de ingressantes do Ensino Superior.

Nossa investigação também corrobora os resultados colocados por Oliveira (1997), observou em sua pesquisa que os participantes apresentaram melhora ao trabalhar com a definição de funções e suas múltiplas representações após passarem por disciplinas que abordavam esse tema no Ensino Superior. Em nosso estudo, apesar de ter havido uma diminuição número de participantes no Segundo Questionário, fruto da evasão escolar, pudemos verificar os mesmos resultados de Oliveira (1997), ou seja, após um ano de formação superior, passando por disciplinas que tratam diretamente sobre o tema de funções, os participantes apresentaram um melhor resultado em questões que solicitavam a definição de função e o reconhecimento de gráficos de funções e não funções. Essa perspectiva fica evidenciada com a diminuição da frequência de todos os tipos de erros identificados no Primeiro Questionário e com um aumento na taxa de acertos das questões analisada no Segunda Questionário.

Esses resultados, somados ao fato de que os estudantes começaram a utilizar as definições de função para encontrar quais gráficos representavam ou não funções, mostram que os impactos do processo de formação foram capazes de proporcionar uma melhoria na capacidade dos estudantes em relacionar aspectos formais, algorítmicos e intuitivos ao formularem suas respostas acerca de funções e

suas múltiplas representações aumentando seus índices de acertos. Resta perguntar de que maneira essa formação será capaz de tornar os participantes dessa investigação em professores de Matemática que propõem um tipo de ensino que valorize a interação de aspectos algorítmicos, intuitos e formais no estudo de funções.

8. Referências

- BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. Brasília. 2017.
- CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Autêntica. São Paulo: Brasil, 2013.
- FAOUR, H. Existence of the Essential Features of the Function Concept in Public Secondary Students' Definitions. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, Jaipur, v.5 n.7, pp. 907-913. 2020. <https://doi.org/10.38124/IJISRT20JUL637>
- <https://doi.org/10.38124/IJISRT20JUL637>
- FISCHBEIN, E., TIROSH, D., MELAMED, U. Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?. *Educational Studies in Mathematics*, v.12. pp. 491-512. 1981. <https://doi.org/10.1007/BF00308145>
- FISCHBEIN, H. *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Springer Science & Business media. 1987.
- FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, v.13. pp. 231-245. 1994. <https://doi.org/10.1007/0-306-47204-X>
- MENEGHETTI, C. M. S., DO AMARAL RODRIGUEZ, B. D., POFFAL, C. A. Gráfico de função polinomial: uma discussão sobre dificuldades de aprendizagem no Ensino Superior. *Ciência e Natura*, v.39 n.1. pp. 156-168. 2017. <https://doi.org/10.5902/2179460X23191>
- DE OLIVEIRA, N. A. N. C. I. Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 28. Mestrado em Ensino de Matemática - PUC-SP, São Paulo, 1997.
- PANAOURA, A., MICHAEL-CHRYSANTHOU P., GAGATSI, A., ELIA, I., PHILIPPOU, A. A structural model related to the understanding of the concept of function: definition and problem

Furquim, O.P.; Pinto, G.; Vieira, W.; Imafuku, R.S. (2022). Uma comparação de conhecimentos sobre a definição e as múltiplas representações de funções antes e depois de uma experiência de formação

solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, v.15 n.4. pp. 723-740. 2017. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9714-1>

VINNER, S., DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in*

mathematics education, v.20 n.4. pp. 356-366. 1989. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.20.4.0356>

