La sucesión de los números primos.

The sequence of prime numbers

Por : Johannio Marulanda Arbeláez Ph.D.

Resumen

Se plantea el problema de la sucesión de los números, se deduce una expresión de nuevo tipo que permite la construcción de dicha sucesión, se establecen sus límites, se presenta un ejemplo y se enuncian algunas de la implicaciones internas y externas.

Palabras clave:

Números primos, sucesión de números primos, criptografía.

Abstract

The problem of the sequence of prime numbers is exposed. A new type of expression that allows the construction of the sequence is deduced, and its limits are established. An example is presented, and internal and external implications are stated.

Keywords:

Prime numbers, sequence of prime numbers, cryptography.

1. Introducción

El artículo presenta la construcción de la sucesión de los números primos y algunas implicaciones. Al respecto se pronunció Euler: "Hay algunos misterios que la mente humana no penetrará jamás. Para convencernos de ello basta con que echemos un vistazo a las tablas de los números primos. Observaremos que en ellas no reinan orden ni ley." Y agregó Hardy: "La teoría de números es la más difícil de todas las ramas de la matemática pura. Pasará al menos otro millón de años antes de que consigamos comprender los números primos." Las citas ilustran el escepticismo sobre el problema, a tal punto que se descartó la posibilidad de su solución, prueba de ello es su ausencia en las listas de problemas:

•7 problemas del milenio (2000): solo la hipótesis de Riemann.

•18 problemas de Smale (2000): solo la hipótesis de Riemann.

•4 problemas de Landau (1912): de Goldbach, Polignac, Legendre, Iwaniec.

•23 problemas de Hilbert (1900): solo las hipótesis de Riemann y Goldbach.

Desde Euclides, circa 2.300 años, se sabe que los números primos forman una sucesión. Eratóstenes, de Cirene, ideó un algoritmo con el que se excluyen de la sucesión de los números naturales aquellos que incumplen la prueba de primalidad, en oposición a los algoritmos que, mediante una función, definen los elementos. Hoy, establecer la ley de la sucesión de los números primos amenaza los negocios globales y la defensa al poner en entredicho la seguridad de las encriptaciones basadas en la primalidad. Hasta el momento hemos carecido de una auténtica teoría de los números primos, de un cuerpo axiomático y metodológico que dé cuenta de los números y de la sucesión. Desde Eratóstenes, la identificación de números primos ha sido un oficio de pescadores en detrimento de los constructores; al momento se han fortalecido las hipótesis estadísticas y los modelos computacionales basados en el pequeño teorema de Fermat, los métodos de Hardy-Littlewood, la conjetura de Mordell, la teoría combinatoria aplicada a las cribas, la teoría probabilística aplicada a la factorización y las progresiones aritméticas de Green-Tao.

La sucesión de los números primos

Sea la sucesión de los primeros cien números naturales, en ella el algoritmo de Eratóstenes excluye los números compuestos por la factorización de los números primos ¡{2,3,5,7} generando una sucesión ("¡" significa conjunto):

{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97}

La teoría armónica introduce la función seno con período λ:

$$j = \sin\left(\frac{n}{\lambda}\pi\right) : \begin{cases} n = k\lambda \therefore j = 0 \\ n \neq k\lambda \therefore j \neq 0 \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

La función j suprime los múltiplos del período λ. Al colocar como período λ el conjunto de los números ¡{2,3,5,7}, se obtiene la misma sucesión anterior, por tanto, la siguiente función es una forma funcional del algoritmo de Eratóstenes:

$$J = \sin\left(\frac{n_p}{2}\pi\right) \bullet \sin\left(\frac{n_p}{3}\pi\right) \bullet \sin\left(\frac{n_p}{5}\pi\right) \bullet \sin\left(\frac{n_p}{7}\pi\right) \bullet\bullet\bullet \sin\left(\frac{n_p}{\lambda_p}\pi\right)$$

Con las siguientes expresiones se convierte el producto J en suma y se coloca el conjunto de períodos

¡{λ_2=2, λ_3=3, λ_4=5, λ_5=7}:

$$2\,sin\,\alpha \bullet sin\,\beta = [cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)], \qquad 2\,cos\,\alpha \bullet cos\,\beta = [cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)]$$
$$2\,sin\,\alpha \bullet cos\,\beta = [sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)], \qquad 2\,cos\,\alpha \bullet sin\,\beta = [sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)]$$

$$J = \frac{1}{2^3}\text{¡}\left\{\begin{matrix} \cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi - \cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi \\ -\cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi - \cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi \\ -\cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi - \cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi \\ -\cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi - \cos\left(\frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5}\right)\pi \end{matrix}\right\}$$

Se extraen los argumentos de las funciones trigonométricas:

$$arg(J) = \text{¡}\left\{\begin{matrix} \frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5} \\ \frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5} \\ \frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5} \\ \frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5} \\ \frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5} \\ \frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5} \\ \frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}+\frac{n_5}{\lambda_5} \\ \frac{n_2}{\lambda_2}-\frac{n_3}{\lambda_3}-\frac{n_4}{\lambda_4}-\frac{n_5}{\lambda_5} \end{matrix}\right\}\pi$$

Se excluye π, se introduce en la notación el signo ⊙ que significa el conjunto de combinaciones de los signos {+,-} y se agrega formalmente λ_1=1:

$$arg(J) = ¡\left\{\frac{n_1}{\lambda_1} \odot \frac{n_2}{\lambda_2} \odot \frac{n_3}{\lambda_3} \odot \frac{n_4}{\lambda_4} \odot \frac{n_5}{\lambda_5}\right\}$$

Las funciones $¡\{n_p\}$ generan valores significativos cuando son números primos, en caso contrario generan raíces; por tanto $¡\{n_p\} = ¡\{\lambda_p\}$ con la condición de que se eviten las coincidencias entre el numerador y el denominador; esta condición se expresa con un súper índice $¡\{\lambda_p^i\}$, y se lee: "$¡\lambda_p^i$ *es el conjunto afectado de números primos* $¡\{\lambda_1\ a\ \lambda_p\}$ *excepto el número primo* λ_i" , la afectación es la supresión de un elemento. Se extrae el denominador $\lambda_5!$ de arg(J), que es el primorial del conjunto $¡\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$ que se omite por inocuo:

Los factores $¡\{\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5,\ \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_5,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_5,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\}$ son cada uno el primordial con exclusión del número primo que genera una raíz en uno de los sinusoides; esta condición se expresa con el mismo súper índice y se lee "$\lambda_p^i!$ *es el primorial afectado* $\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \ldots \lambda_p$ *donde se ha excluido el número primo* λ_i":

$$arg(J) = ¡\{¡\lambda_p^1 \bullet \lambda_p^1! \odot ¡\lambda_p^2 \bullet \lambda_p^2! \odot ¡\lambda_p^3 \bullet \lambda_p^3! \odot ¡\lambda_p^4 \bullet \lambda_p^4! \odot ¡\lambda_p^5 \bullet \lambda_p^5!\}$$

Se introduce el símbolo Σ_p que significa la operación $\odot$:

$$\Omega_p = ¡\{¡\lambda_p^1 \bullet \lambda_p^1! \odot ¡\lambda_p^2 \bullet \lambda_p^2! \odot ¡\lambda_p^3 \bullet \lambda_p^3! \odot ¡\lambda_p^4 \bullet \lambda_p^4! \odot ¡\lambda_p^5 \bullet \lambda_p^5!\} = \Sigma_p ¡\{¡\lambda_p^p \bullet \lambda_p^p!\}$$

Se simplifica la notación $¡\{¡\lambda_p^p \bullet \lambda_p^p!\} = ¡\lambda_p^p!$ y se lee: "$¡\lambda_p^p!$ *es el producto del conjunto afectado* $¡\lambda_p^p$ *por el primorial afectado* $\lambda_p^p!$" $\therefore \Omega_p = \Sigma_p ¡\lambda_p^p!$

La función Ω_p tiene un límite de validez, para establecerlo se supone el número natural compuesto: $\rho_k = \eta_i\eta_j$, donde:

$$\begin{cases} \eta_i = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}\} \\ \eta_j = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}\} \end{cases};\ i = \{1\ a\ (p+1)\},\ j = \{1\ a\ (p+1)\};\ \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p / \ períodos\} \therefore$$

$$\rho_k = \eta_i\eta_j = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \cdot \lambda_1, \ldots, \lambda_1 \cdot \lambda_p, \cdots, \lambda_1 \cdot \lambda_{p+1} \\ \lambda_p \cdot \lambda_1, \ldots, \lambda_p \cdot \lambda_p, \cdots, \lambda_p \cdot \lambda_{p+1} \\ \lambda_{p+1} \cdot \lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1} \cdot \lambda_p, \cdots, \lambda_{p+1} \cdot \lambda_{p+1} \end{Bmatrix}$$

En este conjunto se presentan dos posibilidades:

- Los elementos generan raíces porque λ_p es período:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \cdot \lambda_1, \dots, \lambda_1 \cdot \lambda_p, \cdots, \lambda_1 \cdot \lambda_{p+1} \\ \lambda_p \cdot \lambda_1, \dots, \lambda_p \cdot \lambda_p, \cdots, \lambda_p \cdot \lambda_{p+1} \\ \lambda_{p+1} \cdot \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \cdot \lambda_p, \cdots \end{Bmatrix} \in \{raíces\}$$

- El elemento $\lambda_{p+1} \cdot \lambda_{p+1} = \lambda_{p+1}^2$ ≠ raíz, debería serlo porque λ_{p+1} es un nuevo período como número primo consecuente en la sucesión.

Por tanto: λ_{p+1}^2 es el primer número compuesto y límite de la sucesión generada por el número primo λ_p. De donde la sucesión parcial de números primos o familia de números primos de λ_p es: $\Lambda_p^f = [\lambda_{p+1}, \lambda_{p+1}^2[$.

En consecuencia, la sucesión de los números primos se expresa con la siguiente función Ω_p generadora de una sucesión de sucesiones ¡ $\{\Lambda_p^f\}$, donde $(p, p+1)$ son los números primos antecedente y consecuente:

$$\boldsymbol{\Omega_p = \sum_p ¡\, \lambda_p^p! < \lambda_{p+1}^2}$$

Ejemplo: $\Omega_3 = \sum_3 ¡\, \lambda_3^3! < \lambda_{3+1}^2$

$$\Omega_3 = \sum_3 ¡\, \lambda_3^3 \bullet \lambda_3^3! < \lambda_4^2 = ¡\, \lambda_3^1 \bullet \lambda_3^1! \odot ¡\, \lambda_3^2 \bullet \lambda_3^2! \odot ¡\, \lambda_3^3 \bullet \lambda_3^3! < \lambda_4^2$$

$$\Omega_3 = \begin{Bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} \lambda_2\lambda_3 \odot \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} \lambda_1\lambda_3 \odot \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \lambda_1\lambda_2 < \lambda_4^2 = \begin{Bmatrix} \lambda_2^2\lambda_3 \\ \lambda_2\lambda_3^2 \end{Bmatrix} \odot \begin{Bmatrix} \lambda_1^2\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_3^2 \end{Bmatrix} \odot \begin{Bmatrix} \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2^2 \end{Bmatrix} < \lambda_4^2$$

$$\Omega_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2^2 \end{pmatrix} \right\} < \lambda_4^2$$

$$\Omega_3 = \left\{\begin{matrix} 2^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 3 + 1 \bullet 2^2 \\ 2^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 3 - 1 \bullet 2^2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 3 + 1 \bullet 2^2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 3 - 1 \bullet 2^2 \\ 2^2 \bullet 3 + 1 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 + 1 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 + 1 \bullet 3^2 + 1 \bullet 2^2 \\ 2^2 \bullet 3 + 1 \bullet 3^2 - 1 \bullet 2^2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1 \bullet 3^2 + 1 \bullet 2^2 \\ 2^2 \bullet 3 - 1 \bullet 3^2 - 1 \bullet 2^2 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 2 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 3 + 1 \bullet 2^2 \\ 2 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 3 - 1 \bullet 2^2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 3 + 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 3 - 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 3 + 1 \bullet 2^2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 3 - 1 \bullet 2^2 \\ 2 \bullet 3^2 + 1 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 + 1 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 + 1 \bullet 3^2 + 1 \bullet 2^2 \\ 2 \bullet 3^2 + 1 \bullet 3^2 - 1 \bullet 2^2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1 \bullet 3^2 + 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1 \bullet 3^2 - 1^2 \bullet 2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1 \bullet 3^2 + 1 \bullet 2^2 \\ 2 \bullet 3^2 - 1 \bullet 3^2 - 1 \bullet 2^2 \end{matrix}\right\} < 5^2$$

$$\Omega_3 = \left\{\begin{matrix} 12+3+2 \\ 12+3-2 \\ 12+3+4 \\ 12+3-4 \\ 12-3+2 \\ 12-3-2 \\ 12-3+4 \\ 12-3-4 \\ 12+9+2 \\ 12+9-2 \\ 12+9+4 \\ 12+9-4 \\ 12-9+2 \\ 12-9-2 \\ 12-9+4 \\ 12-9-4 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 18+3+2 \\ 18+3-2 \\ 18+3+4 \\ 18+3-4 \\ 18-3+2 \\ 18-3-2 \\ 18-3+4 \\ 18-3-4 \\ 18+9+2 \\ 18+9-2 \\ 18+9+4 \\ 18+9-4 \\ 18-9+2 \\ 18-9-2 \\ 18-9+4 \\ 18-9-4 \end{matrix}\right\} < 25; \quad \Omega_3 = \left\{\begin{matrix} 17 \\ 13 \\ 19 \\ 11 \\ 11 \\ 7 \\ 13 \\ 15 \\ 23 \\ 19 \\ 25 \\ 17 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \\ -1 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 23 \\ 19 \\ 25 \\ 17 \\ 17 \\ 13 \\ 19 \\ 11 \\ 29 \\ 25 \\ 31 \\ 23 \\ 11 \\ 7 \\ 11 \\ 5 \end{matrix}\right\} < 25$$

$$\Omega_3 = \text{¡}\{5,7,11,13,17,19,23\} \rightarrow \Lambda_3^f = \text{¡}\{\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}\}$$

Se lee: "*la familia* Λ_3^f *del número primo* λ_3 *está formada por el conjunto de números primos* ¡$\{\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}\}$".

Análogamente se construyen las demás sucesiones de modo que la sucesión de los números primos hasta la familia del número primo λ_{10} se compone de la siguiente sucesión de sucesiones:

Λ_1^f	0	1	2														
Λ_2^f				3	5												
Λ_3^f					5	7	11	13	17	19	23						
Λ_4^f						7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	
Λ_5^f							11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53 a 113
Λ_6^f								13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53 a 167
Λ_7^f									17	19	23	29	31	37	41	43	47	53 a 283
Λ_8^f										19	23	29	31	37	41	43	47	53 a 359
Λ_9^f											23	29	31	37	41	43	47	53 a 523
Λ_{10}^f												29	31	37	41	43	47	53 a 839

Implicaciones.

Las implicaciones de la teoría armónica son internas y externas:

- *Implicaciones internas*. Se refieren a temas relacionados con la construcción de la sucesión de los números primos, específicamente con los números ¡ λ_p^p! que participan en las operaciones de recurrencia.

  - *Objetos iniciales*. La sucesión de los números primos exige la identificación de objetos iniciales ¡ $\{\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}$. El problema de la formación de este conjunto requiere una axiomatización.

  - *Familia de sucesiones*. La componente operativa es un problema técnico para la ingeniería de sistemas y la investigación de operaciones.

  - *Números* ¡ λ_p^p! Los números generados por el núcleo Ω_p tienen propiedades de: anidación, simetría, formación de grupos, segmentación, reducción, formación de cuadrados perfectos, expansión, agrupación y otras.

  - *Prueba de primalidad*. La determinación de la primalidad de un número es un problema abierto.

  - *Expresiones de un número primo*. Es un tema para la encriptación.

  - *λ – polinomios*. Es un problema algebraico acerca del nuevo tipo de polinomios Σ_p¡ λ_p^p!

  - *Algoritmos*. Hay identificados 17 algoritmos.

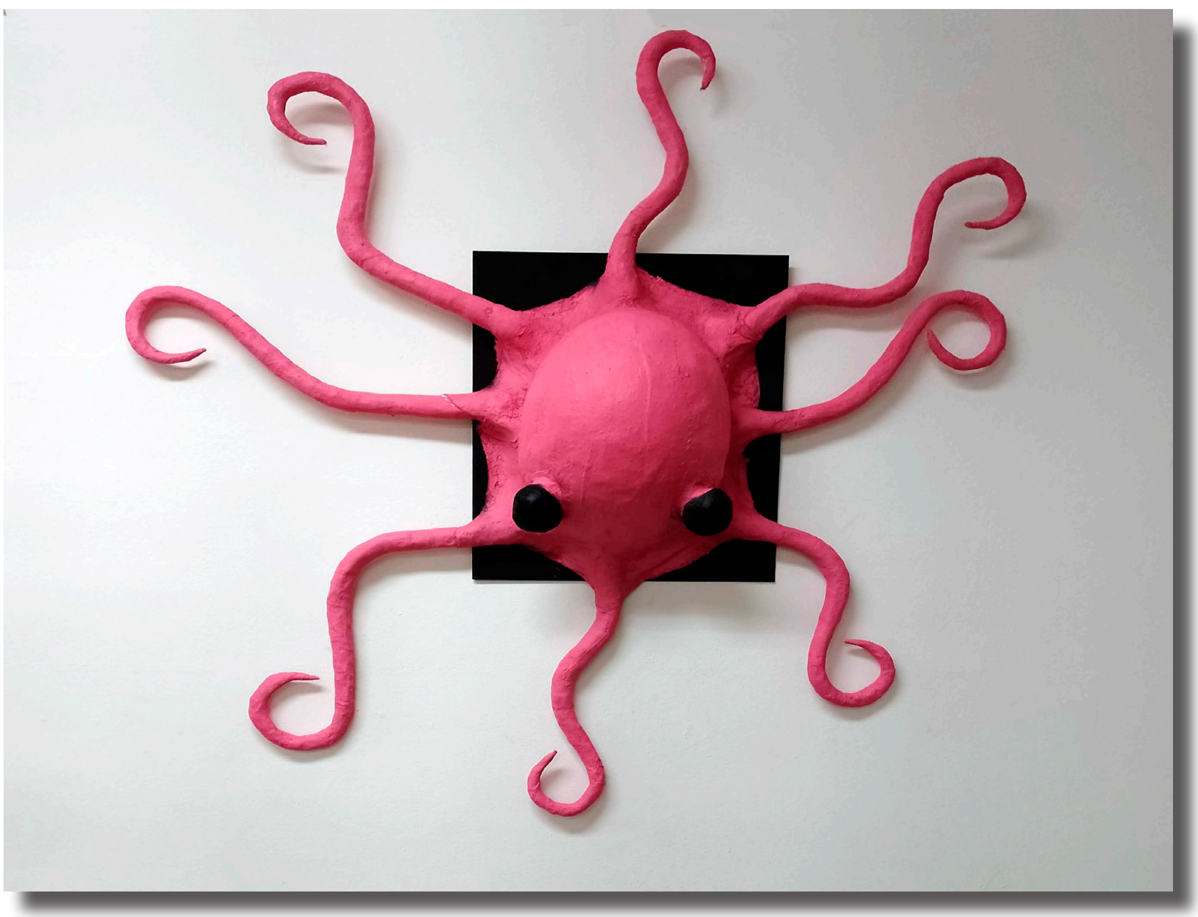
  - Problemas de Landau: Se resuelven las *Conjeturas de Goldbach, Polignac, Legendre* e *Iwaniec*.

  - *Otras*. Se resuelve la *hipótesis de Riemann,* se proponen expresiones para la *cantidad de números primos* y se dilucida la formación del *último dígito*.

- *Implicaciones externas*. Se refieren a la física, la química, la biología y la matemática (hipótesis de Riemann, criptología, fractalidad y otros problemas).

BIBLIOGRAFÍA.

Marulanda Arbeláez, J. (2021), Teoría armónica de los números, Bogotá, EP.



Obra por : María Alejandra Gómez