Dom. Cien., ISSN: 2477-8818
Vol 7, núm. 2, Abril-Junio 2022, pp. 867-885



DOI: http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i2.2681

Ciencias Técnicas y Aplicadas
Artículo de Investigación

# *Modelos Matemáticos para Análisis de Demanda en Transporte*

# *Mathematical Models for Transportation Demand Analysis*

# *Modelos Matemáticos para Análise de Demanda de Transporte*

Vanessa Fernanda Morales-Rovalino [I]
vanessa.morales@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-8844-8544

Andrea Damaris Hernández-Allauca [II]
andrea.hernandez@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-6413-5607

Nery Elisabeth García-Paredes [III]
ne.garcia@uta.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-5267-5868

**Correspondencia:** vanessa.morales@espoch.edu.ec

***Recibido:** 20 de marzo del 2022 ***Aceptado:** 03 de abril de 2022 *** Publicado:** 13 de abril de 2022

I. Mestre em Engenharia Mecanica - Producao Industrial, Ingeniera Mecánica. Docente en la Facultad de Administración de Empresas- Carrera de Gestión de Transportes. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba- Ecuador.
II. Magister en Ciencias de la Educación Aprendizaje de la Matemática, Licenciada en Ciencias de la Educación Profesora de Ciencias Exactas, Mentora en Matemática del SNNA – SENESCYT, Formadora de Formadores SECAP. Docente en la Facultad de Recursos Naturales. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba- Ecuador.
III. Magister en Matemática, Magister en Docencia y Currículo para la Educación Superior, Doctora en Ciencias de la Educación Mención Física, Licenciada en Ciencias especialidad Física y Matemática. Universidad Técnica de Ambato, Ambato - Ecuador.

## Resumen

En las comunidades recientes, los inconvenientes de transporte son cada vez más relevantes, más que nada en las enormes metrópolis y es de suma trascendencia la planeación a mediano y largo plazo con el objeto de proveer un servicio más eficiente. Para eso se necesita aprender y entender el manejo de la red de transporte usando los instrumentos idóneos.

En especial, lo modelos matemáticos de asignación de tránsito son un instrumento que posibilita comprender como los usuarios del transporte público usan la red de transporte para viajar de sus diversos orígenes a sus diferentes destinos. Matemáticamente, una red de transporte se puede representar mediante un grupo de nodos y aristas. Los nodos tienen la posibilidad de separarse en nodos centroides, que son las regiones donde se origina o finaliza un viaje, y nodos básicos que son los aspectos donde los medios de transporte realizan paradas o intersecciones de dos o más aristas.

Las aristas son los senderos de los que dispone el cliente a lo largo de su viaje, a cada arista se le asocia una función que modela el flujo sobre la misma. En las aristas también están definidos los segmentos de tránsito, los cuales representan a las diversas líneas de transporte que pasan por esa arista, por consiguiente, el número de segmentos continuamente será más grande o igual que el número de aristas.

En las grandes ciudades, suele pasar que ciertos servicios de tránsito se saturen al nivel de que los pasajeros no tienen la posibilidad de abordar el primer vehículo que llega a su punto de espera, en dichos casos se necesita modelar tanto la congestión de pasajeros en los vehículos como los tiempos de espera crecientes para abordar un vehículo. Varios modelos de elección de ruta no piensan el crecimiento en la era de espera y principalmente solo imponen limitaciones de capacidad, lo que provoca que se sobrestime la oferta de servicio que tiene la posibilidad de conceder varias líneas. Por consiguiente, aparte de modelar los tiempos de espera crecientes, sería útil establecer una vez que la demanda no podría ser satisfecha por el servicio, independientemente de la elección de ruta.


**Palabras Claves:** Modelos matemáticos; demanda; análisis; transporte.


## Abstract

In recent communities, the inconveniences of transportation are increasingly relevant, more than anything in the huge metropolises, and planning in the medium and long term is of utmost importance in order to provide a more efficient service. For that, it is necessary to learn and understand the management of the transport network using the appropriate instruments.

In particular, the mathematical models of traffic assignment are an instrument that makes it possible to understand how public transport users use the transport network to travel from their different origins to their different destinations. Mathematically, a transport network can be represented by a group of nodes and edges. The nodes have the possibility of being separated into centroid nodes, which are the regions where a trip originates or ends, and basic nodes, which are the aspects where the means of transport make stops or intersections of two or more edges.

The edges are the paths available to the client throughout his journey, each edge is associated with a function that models the flow on it. In the edges, the transit segments are also defined, which represent the various transport lines that pass through that edge, therefore the number of segments will continuously be greater than or equal to the number of edges.

In large cities, it often happens that certain transit services become saturated to the point that passengers do not have the possibility of boarding the first vehicle that arrives at their waiting point, in such cases it is necessary to model both the passenger congestion in the vehicles such as increasing waiting times to board a vehicle. Several route selection models do not think about growth in the waiting era and mainly only impose capacity limitations, which causes the service offer that several lines have the possibility of granting to be overestimated. Therefore, apart from modeling the increasing waiting times, it would be useful to establish a time when the demand could not be satisfied by the service, regardless of the choice of route.

**Keywords:** Mathematical models; demand; analysis; transport.

## Resumo

Nas comunidades recentes, os problemas de transporte são cada vez mais relevantes, mais do que tudo nas grandes metrópoles, e o planejamento de médio e longo prazo é extremamente importante para oferecer um serviço mais eficiente. Para isso, é necessário aprender e compreender a gestão da rede de transportes utilizando os instrumentos adequados.

Em particular, os modelos matemáticos de atribuição de tráfego são um instrumento que permite compreender como os usuários de transporte público utilizam a rede de transporte para se deslocar de suas diferentes origens aos seus diferentes destinos. Matematicamente, uma rede de transporte pode ser representada por um grupo de nós e arestas. Os nós têm a possibilidade de serem separados em nós centroides, que são as regiões onde uma viagem se origina ou termina, e nós básicos, que são os aspectos onde os meios de transporte fazem paradas ou interseções de duas ou mais arestas.

As arestas são os caminhos disponíveis para o cliente ao longo de sua jornada, cada aresta está associada a uma função que modela o fluxo sobre ela. Nas arestas também são definidos os segmentos de trânsito, que representam as diversas linhas de transporte que passam por aquela aresta, portanto, o número de segmentos será continuamente maior ou igual ao número de arestas.

Nas grandes cidades, muitas vezes acontece que certos serviços de trânsito ficam saturados a ponto de os passageiros não terem a possibilidade de embarcar no primeiro veículo que chega ao seu ponto de espera, nesses casos é necessário modelar tanto o congestionamento de passageiros nos veículos como aumentar o tempo de espera para embarcar em um veículo. Vários modelos de escolha de rotas não pensam em crescimento na era da espera e principalmente impõem apenas limitações de capacidade, o que faz com que a oferta de serviço que tem a possibilidade de conceder várias linhas seja superestimada. Portanto, além de modelar os tempos de espera crescentes, seria útil estabelecer um tempo em que a demanda não pudesse ser atendida pelo serviço, independentemente da escolha da rota.

**Palavras-chave:** Modelos matemáticos; exigem; análise; transporte.

## Introducción

En la ingeniería del transporte los modelos de asignación se clasifican en dos tipos: los modelos de tráfico y los de tránsito. Dichos modelos poseen por objeto aprender redes de transporte urbanas para explicar, adivinar y describir la manera en cómo los conductores de automóviles particulares, en la situación de tráfico, y los usuarios del transporte público, en la situación de tránsito, usan las distintas rutas y líneas de transporte accesibles para dirigirse a su destino. Por lo tanto, los modelos de asignación son un instrumento bastante importante que puede contribuir a diseñar una mejor planeación estratégica y a la toma de elecciones en políticas de operación, con el objetivo de mejorar la eficiencia del sistema de transporte y el ahorro de recursos.

En un modelo de asignación de tránsito se busca modelar la manera en cómo la demanda del transporte (pasajeros) se distribuye en las diversas rutas y líneas de transporte accesibles, de tal forma que el precio total en el sistema sea mínimo. El precio se refiere a porción de tiempo, bienestar, tarifas, o una combinación de estas, o sea es un precio generalizado.

Esta asignación se consigue una vez que no existe incentivo para que el cliente cambie de ruta, lo cual se sabe cómo equilibrio de la red. Es bastante común que se desee formular el problema de asignación como un problema de ruta más corta, no obstante, se debería tener en cuenta que, en el problema del viajero, el automovilista tiende a escoger una sola ruta de un grupo de rutas probables, en lo que en una red de tránsito los viajeros tienden a escoger un grupo de rutas probables y posibilita que la ruta a tomar quede definida por el vehículo que arribe primero a cada nodo donde él está.

Una red de tránsito se representa mediante una gráfica poderosamente conexa llamada red generalizada de tránsito denotada por $G = (N; A)$, donde $N$ es el grupo de nodos de interconexión y $A$ es el grupo de arcos o aristas que representan los tramos y segmentos de las líneas de tránsito, así como los senderos peatonales.

Además de la red de transporte se necesita conocer la demanda en la misma, representada por la matriz origen- destino $G = \{G_{pq}\}$ cuyo tamaño es dependiente del número de nodos, en donde $G_{pq}$ denota el número de pasajeros que inician su viaje en el nodo p y lo terminan en el nodo q. En el proceso de asignación se implica que en cada nodo se sabe la época de inter-arribo *("headways")* de los vehículos de cada línea que sirve a aquel nodo y que además se sabe la tasa de arribo de pasajeros. Con dichos datos es viable conocer distribución del tiempo de espera de un vehículo de una línea dada, la época promedio de espera combinado para el arribo del primer vehículo y la posibilidad de cada línea para arribar primero al nodo.

También es importante tener una buena planeación de transporte se necesita conocer datos de campo, esto para que los resultados logrados sean lo más realistas viable. Dichos datos tienen la posibilidad de obtener a base de encuestas y otra clase de estudios que resultan ser bastante complicados y costosos. Los datos de campo logrados para un proceso de asignación solo serán útiles a lo largo de un corto lapso de tiempo, esto se debería a los cambios a los que están sujetas las localidades y a su rápido aumento debido a la abertura de nuevos centros de entretenimiento o novedosas fuentes de trabajo.

Si en el futuro se quisiera hacer un nuevo análisis de la red de transporte, entonces será primordial obtener nuevamente los datos de acceso, lo cual requerirá una totalmente nueva inversión monetaria y mucho trabajo de campo. Para evadir hacer nuevos estudios enteros sobre la demanda y los flujos sobre la red, hay varias técnicas que permitan hacer aproximaciones a los datos más actuales realizando uso de los datos conocidos previamente y usando sólo una porción pequeña significativa de datos nuevos.

Uno de los recursos más relevantes en el proceso de planeación de transporte es la matriz de demanda, también llamada como matriz origen-destino, la cual representa el flujo entre cada centroide origen y cada centroide destino de la red de transporte. La matriz de demanda no es solo uno de los elementos más relevantes, sino también uno de los más difíciles de obtener, debido a que estos datos no tienen la posibilidad de obtenerse a base de visualizaciones directas.

## Introducción

Entender el término de demanda de transporte no es fácil, debido a que un viaje no representa un fin de sí mismo ya que los individuos viajan para saciar sus necesidades o para realizar ciertas ocupaciones, es por ello que la demanda no solo es dependiente de quien requiere hacer el análisis, sino también del horario. Por otro lado, también se necesita tener en cuenta el elemento del comportamiento humano, el cual ubica la aleatoriedad e incertidumbre en el proceso de elección de rutas.

La elección de una representación correcta de la demanda de transporte se apoya en un trueque entre la dificultad del modelo y de la precisión de los datos. Por un lado, el número total de viajes en el área de interés, podrá utilizarse como un indicador de la demanda de transporte, no obstante, la utilización práctica de esa información es reducida.

Por otro lado, una descripción de cada viaje, incluyendo los principios, el destino, cada una de las paradas intermedias, la hora precisa, el propósito del viaje, etcétera., proporcionar la información suficientemente completa, también la viabilidad de recoger dichos datos es bastante dudosa, en especial para monumentales áreas de análisis, inclusive si estuviese disponible toda esta información, será difícil manejarla y posiblemente no será aceptable la amplitud de los errores de medición, por consiguiente, una representación razonable de la demanda debería estar entre dichos dos extremos.

### El modelo básico sin congestión

El propósito del modelo es reducir la era total anhelado de viaje y se hace como una suma ponderada del tiempo de espera más la época de viaje más la era de caminata. En el modelo básico el grupo de cada una de las tácticas factibles es el grupo de elección de los viajeros, además, se estima que cada elemento de viaje incluye un tiempo constante de viaje a bordo de un vehículo, así como una distribución de tiempos de espera. Anterior a edificar dicho modelo introducimos la siguiente notación:

$A_i^+$ ($A_i^-$ ): Conjunto de aristas de salida (entrada) desde el nodo $i \in N$.

$t_a \geq 0$: Tiempo de viaje sobre la arista $a$.

$G_a$: Función de distribución del tiempo de espera, es decir:

$G_a(x) = probabilidad$ {tiempo de espera sobre la arista $a \leq x$}

$W(A_i^+)$: Tiempo de espera promedio para el arribo del primer vehículo que sirve cualquiera de las aristas $a \in A_i^+$. A este se le denomina el tiempo de espera combinado de las aristas a $a \in A_i^+$.

$P_a(A_i^+)$: Probabilidad de que la arista $a \in A_i^+$ sea servida primero (de entre las aristas $A_i^+$). Por conveniencia se define $P_a(A_i^+) = 0 \; si \; a \in A - A_i^+$

$\bar{A}$: Conjunto de aristas $a \in A_i^+$ que definen una estrategia.

$v_a$: Volumen esperado de pasajeros sobre la arista $a \in A_i^+$.

$v_i$: Volumen esperado de pasajeros en el nodo $i \in N$.

$g_i$: Demanda de pasajeros del nodo $i \in N - \{q\}$ al nodo q.

Retomado la construcción del modelo básico, obsérvese que dada un plan $\bar{A}$ y las solicitudes$g_i$, se hace una asignación en la red dando sitio a los volúmenes de arista (arco) $v_a$. Sin embargo, el volumen de pasajeros $v_i$ en un nodo $i \in N$ es la suma de los volúmenes en cada una de las aristas de llegada y de la demanda en aquel nodo. O sea, se sacia la siguiente relación de balance de flujos:

$$v_i = \sum_{a \in A_i^-} v_a + g_i, \qquad \forall i \in N$$

El volumen $v_i$ de viajeros acumulados en el nodo $i$ se distribuye sobre las aristas salientes según sus probabilidades de arista bajo la táctica $\bar{A}$:

$$v_a = P_a(A_i^+) v_i, \qquad a \in A_i^+, \qquad i \in N$$

Una estrategia óptima $\bar{A}^*$ minimiza la suma del tiempo total de viaje sobre las aristas más la época total de espera sobre los nodos. Considerando esto y la relación de balance de flujo, el modelo de optimización general toma la siguiente forma:

$$\begin{gathered} \text{mín} \sum_{a \in A} t_a v_a + \sum_{i \in N} W(\bar{A}_i^+) v_i \\ \text{sujeta a: } v_i \geq 0, \end{gathered}$$

Que se complementa con las limitaciones. Como caso particular, se puede tener en cuenta una distribución de tiempos de espera para cada arista como un parámetro positivo $f_a$ nombrado la frecuencia de la arista. Con esta suposición, se derivan expresiones para el tiempo promedio de espera combinado y las probabilidades de arista:

$$W(\bar{A}_i^+) = \frac{\alpha}{\sum_{a\in\bar{A}_i^+} f_a}, \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

$$P_a(\bar{A}_i^+) = \frac{f_a}{\sum_{b\in\bar{A}_i^+} f_b}, \qquad a \in \bar{A}_i^+$$

La expresión para el tiempo de espera se basa en evidencia que se obtuvo de simulaciones. Para los diferentes valores de $\alpha$ se consideran los siguientes casos:

$\alpha = 1$: Corresponde a una distribución exponencial de tiempos de inter-arribo de vehículos, con media $\frac{1}{f_a}$, además de una tasa uniforme de arribo de pasajeros en los nodos.

$\alpha = \frac{1}{2}$: Corresponde a un servicio regular (tiempos de interarribo de vehículos constante) donde el cliente espera aproximadamente medio tiempo de interarribo de los vehículos.

$0{,}5 < \alpha < 1$: Se estará modelando el tiempo de espera de un servicio irregular, cuando el vehículo tarda más tiempo de lo esperado.

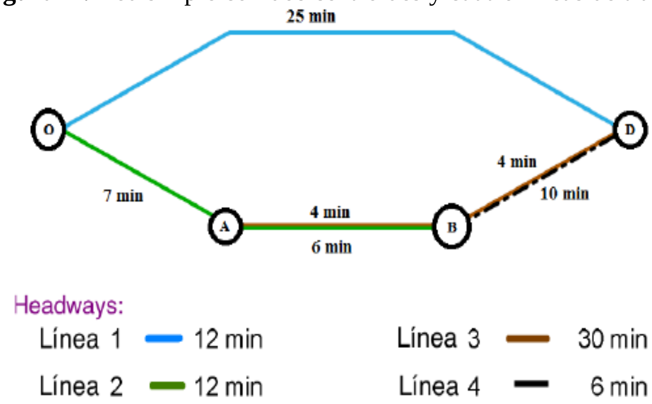
$\alpha < 0{,}5$: Corresponde a un modelo donde los usuarios conocen los tiempos de interarribo de los vehículos y por lo tanto arriban al nodo al mismo tiempo que los vehículos.

Como las probabilidades de arista son independientes de las unidades en que se especifica $f_a$, es viable escalar la frecuencia por el componente $\frac{1}{f_a}$. Por consiguiente, sin pérdida de generalidad, se puede dar por sentado que $\alpha = 1$ para edificar el modelo.

$$\omega_i = \frac{v_i}{\sum_{a\in A_i^+} \chi_a f_a}$$

Para fijar de una mejor manera las ideas, considérese el siguiente ejemplo:
Una red de transporte con cuatro nodos, donde dos de ellos son centroides. El flujo pasa en una sola dirección, del nodo O al nodo D. La red de la figura 1cuenta con cuatro líneas de transporte y se conocen los headways de todas ellas, así como su tiempo de viaje. Se busca reducir la época de viaje del nodo O al nodo D.

**Figura 1.** Red simple con dos centroides y cuatro líneas de tránsito




**Fuente:** Autores

El conjunto de estrategias que se tienen para esta pequeña red es el siguiente:

**Tabla 1.** Conjunto de 48 líneas estrategias

| Nodo | Líneas atractivas (Línea → Nodo de salida) | Tiempo de espera (minutos) | Probabilidades de Línea 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O | 1→D | 6.0 | 1.00 | – | – | – |
| O | 2 → A | 6.0 | – | 1.00 | – | – |
| O | 2 → B | 6.0 | 1.00 | – | – | – |
| O | 1 → D, 2 → A | 3.0 | 0.50 | 0.50 | – | – |
| O | 1 → D, 2 → B | 3.0 | 0.50 | 0.50 | – | – |
| A | 2 → B | 6.0 | – | 1.00 | – | – |
| A | 3 → B | 15.0 | – | – | 1.00 | – |
| A | 3 → D | 15.0 | – | – | 1.00 | – |
| A | 2 → B, 3 → B | 4.3 | – | 0.71 | 0.29 | – |
| A | 2 → B, 3 → D | 4.3 | – | 0.71 | 0.29 | – |
| B | 3 → D | 15.0 | – | – | 1.00 | – |
| B | 4 → D | 3.0 | – | – | – | 1.00 |
| B | 3→D, 4→D | 2.5 | – | – | 0.17 | 0.83 |

**Fuente:** Autores

Una forma de solucionar el problema es encontrando la ruta más corta, en esta situación la solución será tomar la línea 1 en O y bajarse en D, la cual tiene un precio de 31 min (25 min de viaje + 6 min de espera). Es viable hallar un menor tiempo de viaje si se distribuyen los viajeros en las diversas líneas de transporte.

Ejemplificando, que en el nodo O la mitad de los pasajeros tomen la línea azul para descender en el nodo D y la otra mitad tome la línea 2 para descender en el nodo B; asimismo, los pasajeros que llegan al nodo B se distribuyen de la siguiente forma para seguir su recorrido: el 8% toma la línea 3 y el otro 42% toma la línea 4. Entonces, en esta situación la era de tránsito puede calcularse de la siguiente forma:

- El tiempo de espera en los nodos se calcula usando la suma de las frecuencias de las líneas atractivas que pasan por aquel nodo:

$$t_O = \frac{1/2}{1/12+1/12} = 3 \qquad \text{Tiempo de espera en el nodo } O$$

$$t_B = \frac{1/2}{1/30+1/6} = \frac{5}{2} \qquad \text{Tiempo de espera en el nodo } B$$

- El tiempo de viaje es sencillamente la era a bordo de cada vehículo, en esta situación, los tiempos para cada línea están marcados en la figura 1.
- La posibilidad de renunciar a el nodo i usando cierta línea se calcula dividiendo la frecuencia de dicha línea entre la frecuencia combinada de las líneas atractivas en aquel nodo.

$$\pi_1^O = \frac{1/12}{1/12+1/12} = \frac{1}{2} \qquad \text{Probabilidad de abandonar el nodo } O \text{ tomando la línea 1.}$$

$$\pi_2^O = \frac{1/12}{1/12+1/12} = \frac{1}{2} \qquad \text{Probabilidad de abandonar el nodo } O \text{ tomando la línea 2.}$$

$$\pi_3^B = \frac{1/30}{1/30+1/6} = \frac{1}{6} \qquad \text{Probabilidad de abandonar el nodo } B \text{ tomando la línea 3.}$$

$$\pi_4^B = \frac{1/6}{1/30+1/6} = \frac{5}{6} \qquad \text{Probabilidad de abandonar el nodo } O \text{ tomando la línea 1.}$$

Entonces, el tiempo de viaje será la suma del tiempo a bordo por la posibilidad de línea, por el volumen de pasajeros en cada arco:

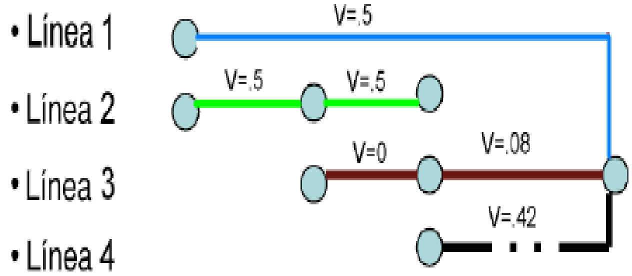
$$t = 25\frac{1}{2}\frac{100}{100} + (7+6)\frac{1}{2}\frac{100}{100} + 4\frac{1}{6}\frac{50}{100} + 10\frac{5}{6}\frac{50}{100} = 23.5$$

El tiempo total se calcula sumando los tiempos de espera multiplicados por el volumen de pasajeros en cada nodo, más la época de viaje, dando como consecuencia:

$$T = t_{espera} + t_{viaje} = \left(3\frac{100}{100} + 2.5\frac{50}{100}\right) + 23.5 = 4.25 + 23.5 = 27.75$$

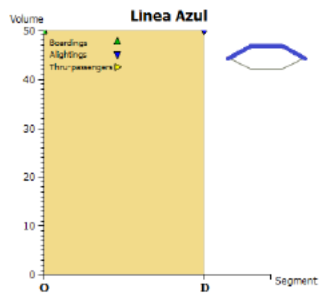
Por consiguiente, la era de viaje es de 27,75 minutos, el cual es menor que el encontrado con la ruta más corta. Esta táctica se ilustra en la figura 2.

**Figura 2.** Estrategia óptima. Tiempo esperado de viaje 27,75 minutos

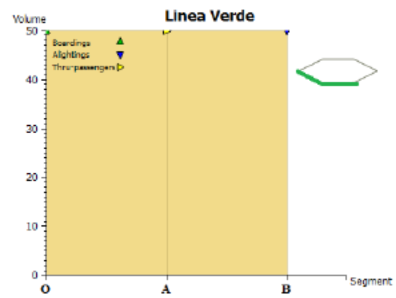



**Fuente:** Autores

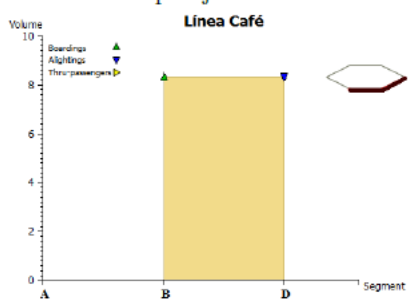
**Figura 3.** Volumen de pasajeros sobre cada segmento de tránsito



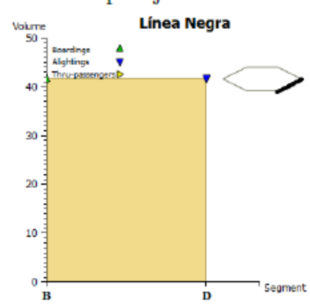

Volumen de pasajeros en la línea 1.




Volumen de pasajeros en la línea 2.




Volumen de pasajeros en la línea 3.




Volumen de pasajeros en la línea 4.

**Fuente:** Autores

## Algoritmo de asignación para una red simple

**Etapa 1.** Cálculo de la estrategia óptima.

1. Inicio

$$u_i = \infty, \qquad i \in N - D \qquad u_D := 0;$$
$$f_i := 0, \qquad i \in N;$$
$$S = A; \qquad \bar{A} = \emptyset.$$

2. Iteraciones. Obtención del siguiente arco.

Si $S = \emptyset$, parar e ir al paso 4.
En caso contrario, encontrar la arista $a = (i, j) \in S$ que satisfaga:

$$u_j + t_a \leq u_{j'} + t_{a'}, \qquad a' = (i', j')$$

Hacer $S := S - \{a\}$

3. Actualizar etiquetas de nodo.

Si $u_i > u_j + t_a$, entonces:

$$u_i := \frac{f_i u_i + f_a(u_j - t_a)}{f_i + f_a}$$

$$f_i := f_i + f_a, \qquad \bar{A} = \bar{A} + \{a\};$$

4. Fin

**Etapa 2.** Asignación de la demanda.

1. Inicio

$$v_p = g_{pq}, pq \in PQ;$$

2. Iteraciones. Asignación de viajes. Para cada arco a 2 A hacer en orden decreciente de ($u_j$ + $t_a$):

Si $a \in \bar{A}$, entonces $v_a := \frac{f_a}{f_i} v_i, \qquad v_j = v_j + v_a$, en caso contrario $v_a := 0$.
Si $A := \emptyset$ ir al paso 3.

3. Fin

En suma, se recibe lo cual ya se había ilustrado en la Figura 4, es decir, se asigna el 50% de pasajeros a la línea 1 en el nodo O los cuales continúan su viaje en dicha línea hasta llegar al nodo destino D. El otro 50% de pasajeros ha sido asignado a la línea 2, la cual pasa por los nodos A y B, ningún pasajero desciende en A y todos llegan al nodo B. La línea 3 que va de A a D pasando por B, no lleva pasajeros en su primer segmento en lo que, en el segundo, se asigna el 8% de los pasajeros. A la línea 4, en su único segmento, se le asigna el 42% de los pasajeros.

Dom. Cien., ISSN: 2477-8818
Vol 7, núm. 2, Abril-Junio 2022, pp. 867-885



**Figura 4.** Resultados de una asignación de tránsito estándar.

**Standard transit assignment**

**Summary for all zones**

| total demand | assigned demand | not assigned demand | total boardings |
|---|---|---|---|
| 100.0 | 100.0 | 0.0 | 150.0 |

| avg lines per passenger | mean time | cpu time |
|---|---|---|
| 1.5 | 27.75 | 0.01 |

**Summary statistics per zone**


**Fuente:** Autores

## Modelo de asignación con congestionamiento

En esta parte se toma presente como la congestión perjudica los tiempos de espera promedio y los tiempos de viaje y, por consiguiente, los flujos (distribución de los volúmenes de pasajeros sobre los arcos). El modelo permite laborar con tiempos de viaje dependientes del flujo y es una generalización de modelos de equilibrio en redes de tránsito basados en tácticas. El enfoque posibilita obtener un algoritmo que se ha aplicado con éxito en redes de tránsito de enorme tamaño.

La congestión sobre los arcos se modela introduciendo funcionalidades (de congestión) que se modelan como la suma de un precio fijo $t_a^0$ más una función de demora da (va), o sea:

$$t_a(v_a) = t_a^0[1 + d_a(v_a)], \qquad \text{con } d_a(0) = 0$$

Las funcionalidades de demora $d_a(x)$ son funcionalidades no negativas, sucesivas y crecientes que modelan la incomodad en vehículos congestionados. Los tipos de funcionalidades más usados son: funcionalidades BPR (*Bureau of Public Roads*) y las funcionalidades cónicas. Ya que los precios de viaje están sujetas a los volúmenes, los modelos resultantes por el momento no tienen la posibilidad de ser lineales y solo es viable apelar a ciertos principios para el planteamiento de los inconvenientes como el inicio de *Wardrop*, el cual arma que, para todos los pares origen-destino las tácticas que llevan flujo son de precio generalizado mínimo y las que no llevan flujo son de precio más grande o igual al mínimo.

Sin embargo, una demanda desmesurada puede ocasionar que ciertos pasajeros decidan no abordar el primer vehículo gracias a la capacidad reducida de los mismos. Acorde los segmentos de tránsito se congestionan los niveles de tranquilidad reducen y los tiempos de espera incrementan. En esta clase de situaciones los tiempos de espera tienen la posibilidad de modelarse con fórmulas de colas de estado estacionario que toman presente la capacidad residual de los vehículos, así como el número de abordajes y de descensos. Una forma de modelar este fenómeno es multiplicar el headway original, sin congestionamiento, por un componente para obtener un headway percibido o ajustado:

$$headway_{percibido} = headway_{original} \frac{1}{1 - \left(\frac{\text{subidas}}{\text{capacidad residual}}\right)^{\beta}}$$

Donde $\beta$ es un parámetro positivo menor que uno. Dichos headways proporcionan sitio a frecuencias de línea, denominadas frecuencias efectivas, que dependen del volumen en los arcos. En esta situación la decisión optima de un pasajero podría ser afectada por las elecciones de otros, por lo cual es viable que haya más de un plan optima; se alarga el modelo de equilibrio de tránsito para integrar tanto el congestionamiento en los vehículos como los tiempos de espera crecientes. En esta versión del modelo asignación de tránsito, la caracterización de equilibrio en términos de las condiciones de Wardrop genera un problema mucho más difícil. En especial, se demuestra que un flujo de tránsito es de equilibrio si este minimiza la siguiente función:

$$Gap(v) = \sum_{q \in Q} \left[ \sum_{a \in A} t_a(v) v_a + \sum_{i \in N} \omega_i - \sum_{i \in N} g_i u_i \right]$$

Complementada con restricciones análogas a las del modelo lineal, y cuyo mínimo global es cero. Es decir, el tiempo total de tránsito menos el tiempo sobre las estrategias más cortas es igual a cero en el óptimo. Este es un problema considerablemente más difícil, debido a que no tiene una formulación equivalente en términos de un problema diferenciable de optimización convexa. Por esta razón, se utiliza el algoritmo de promedios sucesivos, el cual es un algoritmo iterativo de tipo heurístico que permite acercase al optimo mediante la solución de un problema lineal en cada iteración y el promediado de las soluciones sucesivas obtenidas. La función *Gap* permite monitorear el acercamiento al óptimo global y sirve como criterio de paro.

**Modelos para estimación de matrices**

Hay formas de hacer uso de la información obtenida años anteriormente, combinándola con información más presente y tal tener una mejor aproximación de la matriz de demanda presente. Una de estas posibilidades es el balance de matrices, en el que se estima el número total de pasajeros que inician y terminan su viaje en todas las regiones, el método se basa en descubrir parámetros, tales que, al multiplicarlos por la matriz de demanda anterior, se haga una totalmente nueva matriz de demanda que coincida con los conteos en las regiones donde se origina y finaliza el tránsito. Ciertos de dichos modelos de ajuste de demanda de transporte se han derivado de las leyes de la física, de los cuales los mejor conocidos son el modelo gravitacional y el modelo de la entropía.

**Modelo gravitacional**

Considérese el grupo de orígenes, denotado por $P$, y el grupo de destinos, denotado por $Q$. El ingreso de la matriz correspondiente a la *p-ésima* la ($p \in P$) y la *q-ésima* columna ($q \in Q$) se denota por $g_{pq}$. Se implica que se conocen estimaciones anteriores de la matriz O-D desde trabajo de campo y que este grupo de datos se usa para conformar la matriz a priori $G$. El número total de viajes que salen de procedencia $p$ se denota por $O_p$, mientras tanto que el número total de los viajes que llegan al destino q se denota por $D_q$.

El modelo gravitacional se hace utilizando una analogía a la ley de gravitación mundial de Newton, en el que se implica que el número de viajes $g_{pq}$ entre los principios p y el destino q es proporcional al número $O_p$ de individuos que abandonan $p$ y al número de individuos $D_q$ que llegan a $q$, y que es inversamente proporcional al cuadrado del precio generalizado $C_{pq}$ al viajar de $p$ a $q$, esto es:

$$g_{pq} = \alpha \frac{O_p D_q}{c_{pq}^2}, \qquad p \in P \quad q \in Q$$

Este modelo se puede generalizar introduciendo una función que depende del costo:

$$g_{pq} = \alpha O_p D_q f(c_{pq}) \qquad p \in P \quad q \in Q$$

En donde la función de disuasión $f_{(C_{pq})}$ puede tener las siguientes formas:

- Exponencial: $f_{(C_{pq})= e^{-\beta C_{pq}}}$.
- Polinomial: $f_{(C_{pq})= C_{pq}^{-n}}$.
- Combinación de funciones: $f_{(C_{pq})= C_{pq}^{n}\, e^{-\beta C_{pq}}}$.

En dichas funciones los parámetros $\beta$ y $n$ deberán ser calculados dependiendo del contexto.

## Resultados

### Aplicación del método de balance biproporcional

Supóngase que la matriz $M_1$ es desconocida, y que en su sitio se tiene una matriz $M_2$ popular a priori, la cual se obtuvo de sacudir estocásticamente la matriz $M_1$ para obtener entre el 70 y 100% del costo inicial en todas sus entradas. Supóngase que se conocen también el total de viajes que se originan en el nodo $p$ y el total de viajes que poseen como destino el nodo $q$, $O_p$ y $D_q$, dichos totales corresponden a la suma de renglones y columnas de la matriz $M_1$, respectivamente. Por lo anterior es entendible que la matriz $M_2$ no está equilibrada en relación a los $O_p$ y $D_q$ conocidos, es por ello que se le aplicara el método biproporcional de matrices para balancearla, esperando recobrar la matriz $M_1$.

La dispersión de demanda inicial es la siguiente:

1. Inicio

Asignar $B_q^0 = 1$ para $q \in Q$ y $k = 1$.

2. Balance de orígenes

Para cada origen $p \in P$ calcular

$$a_p^k = \frac{O_p}{\sum_{q\in Q} b_q^{k-1} G_{pq}}$$

3. Balance de destinos

Para cada destino $q \in Q$ calcular

$$b_q^k = \frac{D_q}{\sum_{p\in P} a_p^k G_{pq}}$$

4. Criterio de paro

Si $||a^k - a^{k-1}|| + ||b^k - b^{k-1}|| < \varepsilon_1$ , ir al paso 5, de lo contrario hacer $k = k + 1$ y regresar al paso 2.

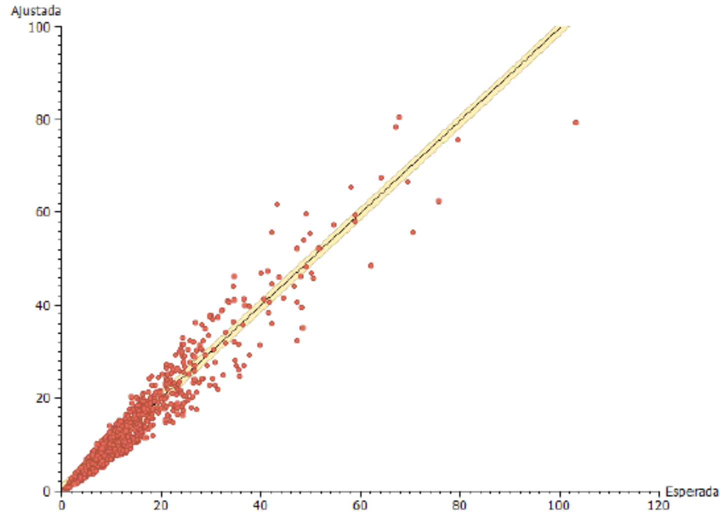
5. Calcular la solución del problema primal

$$g_{pq} = a_p^k b_q^k G_{pq}$$

6. Fin

Al aplicar el algoritmo de balance biproporcional, después de 5 iteraciones se obtiene la siguiente grafica de dispersión para la matriz balanceada:

**Figura 5.** Demanda esperada vs demanda balanceada, 5 iteraciones




$A = 0.011 \quad B = 0.997 \quad R^2 = 0.960 \quad RMSE = 1.400$

**Fuente:** Autores

Como se puede observar en la figura 5, la bondad del ajuste es de un 96 %. Esto para el caso en el que se conocen las sumas sobre los orígenes y los destinos, si se considerasen como datos conocidos los volúmenes de arco o de segmento, entonces convendría aplicar un método de descenso.

## Conclusiones

- Uno de los modelos más básicos y utilizados es el de balance biproporcional, en el cual se sabe una matriz de demanda a priori y los totales marginales de la matriz de demanda que se espera obtener, este método converge en escasas interacciones para redes pequeñas.
- Podría ser subjetivamente fácil obtener el número total de viajes que se originan o que terminan en cierta área, es dependiente de la infraestructura de la red y de los vehículos de transporte, no se debería de perder de vista que los resultados logrados serán un indicador de la demanda y no la demanda como tal, es por ello que se ha investigado cada vez más sobre métodos alternativos que faciliten información más descriptiva de todos los viajes, como esos en los cuales se piensan conteos en los arcos.
- El asunto central de este trabajo fue el análisis de los modelos de demanda que se fundamentan en el conteo de volúmenes sobre un grupo establecido de arcos de la red.

- En modelos un poco más sofisticados se añade la diferencia entre el matriz origen {destino que se desea estimar y la popular a priori. Ya que la apariencia central es la minimización de la distancia entre la matriz famosa a priori y la matriz desconocida, en donde la diferencia de volúmenes medidos y los reales se añade en la función objetivo con un parámetro de penalización, en lugar de la ponderación promediada de los dos términos.
- El impacto de penalizar la diferencia de volúmenes disminuye aún más el número de iteraciones, producen un método más eficiente para estimar la demanda desconocida desde la medición de volúmenes sobre un grupo definido de arcos o segmentos de la red de transporte.

## Referencias

1. Bacharach M. *Estimating Nonnegative Matrices from Marginal Data, International Economic* Review, Vol. 6, No. 3, pp. 294{310, 1965.
2. Beckmann M. J., McGuire C. B. and Winsten C. B. *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, Conn, 1956.
3. Bierlaire M. Mathematical *Models for Transportation Demand Analysis*, Ph.D. Thesis, Facultes Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur, Faculte des Sciences, Department de Mathématique, 1995.
4. Casey H. J. *Applications to Trac Engineering of the Law of Retail Gravitation*, TracQuaterly IX (1): 23-35, 1955.
5. Cepeda M., Cominetti R., Florian M. A *Frequency-Based Assignment Model for Congested Transit Networks with Strict Capacity Constraints: Characterization and Computation of Equilibria, Transportation* Research Part B 40,437-459, 2006.
6. Cominetti R., Correa J. *Common-Lines and Passenger Assignment in Congested Transit Networks*, Transportation Science 35 (3), 250-267, 2001.
7. Deming W. E., Stephan F. F. On a *Least Squares Adjustment of a Sampled Frequency Table when the Expected Marginal Totals are Known, Annals of Mathematical Statistics*, XI, 4427-444, 1940.
8. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis,* John Wiley and Sons, 3a. Ed., 1998.
9. Feller W. *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Limusa, Vol. I, 1975.

10. Fernáandez A. G. *Modelos Matemáticos de Asignación de Tránsito. Aplicación a la Red Metropolitana del Valle de México y sus Efectos en el STC-Metro*, Tesis de Maestría en Ciencias, Departamento de Matemáticas Aplicadas e Industriales, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 2013.
11. Romero D. *Easy Transportation-Like Problems of K-Dimentional Arrays*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 66, No. 1, 1990.
12. Spiess H. Contributions a la Théorie et Aux Outilsde Planification des Réseaux de Transport Urbain., Ph.D. thesis. Département d Informatique et de Recherche Operationnelle, Universite de Montreal, Quebec, 1984.
13. Spiess H. *Technical Note, Conical Volume- Delay Functions*, Transportation Science, 24[2], pp. 153-158, 1990.