DOI: http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i3

Ciencias Matemáticas
Artículo de Investigación

Interpretación de las funciones vectoriales en tres dimensiones como intersección de superficies cilíndricas

Interpretation of vector functions in three dimensions as intersection of cylindrical surfaces

Interpretação de funções vetoriais em três dimensões como interseção de superfícies cilíndricas

Romel Manolo Insuast-Castelo [I]
rinsuasti@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-3946-9643

Javier Roberto Mendoza-Castillo [II]
jmendoza@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-5352-1547

Andrea Damaris Hernández-Allauca [III]
andrea.hernandez@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-5214-1761

Correspondencia: rinsuasti@espoch.edu.ec

***Recibido:** 29 de mayo del 2022 ***Aceptado:** 06 de junio de 2022 *** Publicado:** 01 de julio de 2022

I. Magíster en Matemática Básica, Ingeniero Mecánico, Docente en la Carrera de Ingeniería Automotriz, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
II. Magíster en Matemática Básica, Ingeniero Mecánico, Docente en la Carrera de Ingeniería Forestal, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
III. Magíster en Ciencias de la Educación Aprendizaje de la Matemática, Licenciada en Ciencias de la Educación Profesora de Ciencias Exactas, Docente en la Facultad de Recursos Naturales, Grupo de Investigación y Transferencia de Tecnologías en Recursos Hídricos (GITRH) y Grupo de Investigación en Turismo (GITUR), Riobamba, Ecuador.

Resumen

En el estudio de Análisis Matemático es fundamental la comprensión de las funciones y de su representación gráfica, muy relacionadas en la solución de problemas físicos reales, estas gráficas deben interpretarse de la mejor manera para poder calcular lo que se desea, más aún cuando estas curvas se encuentran graficadas en tres dimensiones, que de por si necesitan de cierta habilidad para interpretarlas y poder considerarlas en la solución de problemas reales. La habilidad de interpretación depende de cómo se han conceptualizado dichas curvas, las cuales al ser graficadas como funciones vectoriales que representan una curva no se logra una comprensión total, por esta razón se propone interpretarlas como la intersección de superficies cilíndricas las cuales se obtienen de dichas funciones vectoriales en tres dimensiones, de las cuales se puede obtener las funciones cartesianas teniendo en cuenta el criterio en el que hay que eliminar el valor del parámetro, obteniendo en ocasiones por lo menos dos ecuaciones que representa superficies cilíndricas donde la intersección de estas representa la curva en tres dimensiones, permitiendo la interpretación con facilidad y por ende la conceptualización de la curva, los valores para la gráfica son de fácil evaluación a partir de las ecuaciones cartesianas.

Palabras Claves: funciones vectoriales; curvas en 3D; intersección de superficies cilíndricas.

Abstract

In the study of Mathematical Analysis it is essential to understand the functions and their graphical representation, closely related to the solution of real physical problems, these graphs must be interpreted in the best way to be able to calculate what is desired, even more so when these curves they are graphed in three dimensions, which in itself require a certain ability to interpret them and be able to consider them in the solution of real problems. The interpretation ability depends on how these curves have been conceptualized, which when graphed as vector functions that represent a curve, a full understanding is not achieved, for this reason it is proposed to interpret them as the intersection of cylindrical surfaces which are obtained from said curves. vector functions in three dimensions, from which the Cartesian functions can be obtained taking into account the criterion in which the value of the parameter must be eliminated, sometimes obtaining at least two equations that represent cylindrical surfaces where the intersection of these represents the curve in three dimensions, allowing easy interpretation and therefore the conceptualization of the curve, the values for the graph are easily evaluated from the Cartesian equations.

Keywords: vector functions; 3D curves; intersection of cylindrical surfaces.

Resumo

No estudo da Análise Matemática é fundamental entender as funções e sua representação gráfica, intimamente relacionada à solução de problemas físicos reais, esses gráficos devem ser interpretados da melhor forma para poder calcular o que se deseja, ainda mais quando essas curvas são representadas graficamente em três dimensões, o que por si só exige uma certa habilidade para interpretá-las e poder considerá-las na solução de problemas reais. A capacidade de interpretação depende de como essas curvas foram conceituadas, que quando representadas graficamente como funções vetoriais que representam uma curva, não se alcança um entendimento completo, por isso se propõe interpretá-las como a interseção de superfícies cilíndricas que são obtidas a partir das referidas curvas. curvas. funções vetoriais em três dimensões, a partir das quais as funções cartesianas podem ser obtidas levando em consideração o critério em que o valor do parâmetro deve ser eliminado, às vezes obtendo pelo menos duas equações que representam superfícies cilíndricas onde a interseção destas representa a curva em três dimensões, permitindo fácil interpretação e, portanto, a conceituação da curva, os valores para o gráfico são facilmente avaliados a partir das equações cartesianas.

Palavras-chave: funções vetoriais; curvas 3D; interseção de superfícies cilíndricas.

Introducción

Las funciones vectoriales son una muy buena opción para determinar la trayectoria de una partícula en el espacio, la cual se obtiene al evaluar la función en diferentes valores de la variable independiente lo cual resulta relativamente fácil en vista de que se puede obtener los diferentes valores las componentes x, y, z de la función vectorial, al graficar en R^3 también se puede graficar determinando los puntos en el plano cartesiano, pero esto no permite tener un conceptualización de la curva en el espacio, incluso al utilizar graficadores ésta se presenta una gráfica en R^3 que no se la puede comprender, al utilizar las ecuaciones cartesianas de dicha curva se puede entender y visualizar como se encuentra en el espacio, logrando la conceptualización deseada, que es necesario para actuar con conocimiento cierto en otros ámbitos de la matemática donde son necesarias este tipo de funciones (Edwards, B.,2016).

Desarrollo

La metodología utilizada en este estudio está basada en la utilización de graficadores en 3D (tres dimensiones), los cuales permitirán la visualización en diferentes posiciones y por ende su mejor comprensión.

Una función vectorial está definida como un conjunto de vectores en donde sus componentes son funciones reales que dependen de t.

$$R(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

Donde las componentes del vector $R(t)$, se pueden graficar en el espacio dimensional de R^3, esto es:

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$
$$z = h(t)$$

Constituyéndose estas en las ecuaciones paramétricas de la función vectorial.

Para determinar los valores que pueden tomar la función vectorial se debe analizar el dominio de cada una de estas funciones paramétricas y el dominio serán los valores comunes de dichas funciones. Es decir:

$$D_R = D_f \cap D_g \cap D_h$$

Una vez definido el dominio se puede determinar los valores de x, y, z de la función vectorial, en forma secuencial y creciente para valores de t, determinando de esta manera la trayectoria a partir de una curva en tres dimensiones (Smith, R. T., 2000). Dichos valores se constituyen en los vectores anclados al origen, que definen la trayectoria al unir los puntos finales de dichos vectores constituyéndose en la curva que representa gráficamente a la función vectorial.

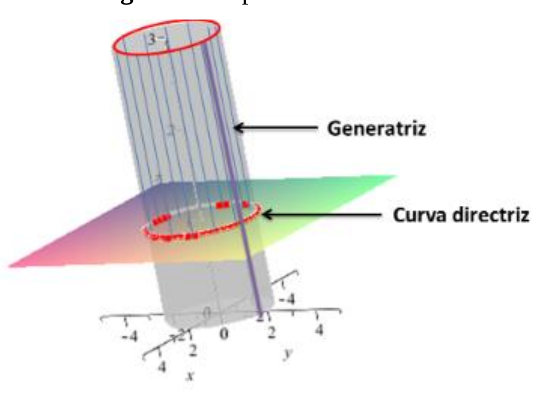
Esta curva puede ser obtenida si encontramos la ecuación cartesiana de la función vectorial bajo el criterio de eliminar el valor de t de las ecuaciones paramétricas, de lo cual se puede obtener en el mejor de los casos lo siguiente:

$$f_1(x) = f_2(y) = f_3(z)$$

En forma análoga a la ecuación simétrica de la recta en tres dimensiones, se entiende que la ecuación anterior representa en realidad tres ecuaciones, cada una de ellas son superficies cilíndricas que al intersecarse determinan la curva que se obtiene al graficar la función vectorial. En ocasiones dependiendo de las expresiones de las ecuaciones paramétricas no se pueden expresar en forma de esta doble igualdad, siendo necesario e imprescindible expresar por lo menos dos ecuaciones, pues con estas se podrá determinar la curva de la función vectorial como intersección de estas dos superficies encontradas (Stewart, J. (2012).

Superficie cilíndrica, es la superficie generada por una recta que se mueve paralela a un eje fijo y pasa por una curva plana llamada directriz, la recta se llama generatriz, y cualquier recta se denomina reglada, también se puede entender como superficie cilíndrica aquella superficie que presenta la misma sección a lo largo de un eje fijo, como se muestra en el siguiente gráfico.

Figura 1. Superficie Cilíndrica



Elaborado: Autores

Discusión

Partiendo de una función vectorial en tres dimensiones se propone graficarla, siempre determinando el dominio de dicha función, para lo que se determinará un intervalo de valores para el parámetro t en el dominio de la función vectorial. Posteriormente se encontrarán las ecuaciones cartesianas graficándolas en tres dimensiones para observar la curva de intersección y comparar con la curva de la función vectorial, las cuales deben ser las misma sin discusión alguna.

Dada la función vectorial $\boldsymbol{R(t) = (1+t)i + \frac{t^2}{\sqrt{2}}j + \frac{t^3}{3}k}$, determinar la gráfica de la función vectorial.

Primero determinamos el dominio de la función vectorial.

$$D_f: t \in R$$

$$D_g: t \in R$$

$$D_h: t \in R$$

Por lo tanto, el $D_R = D_f \cap D_g \cap D_h$, en consecuencia $D_R: t \in R$

Si evaluamos para valores de $-5 \leq t \leq 5$ se tiene la siguiente información:

Tabla 1. Función Vectorial

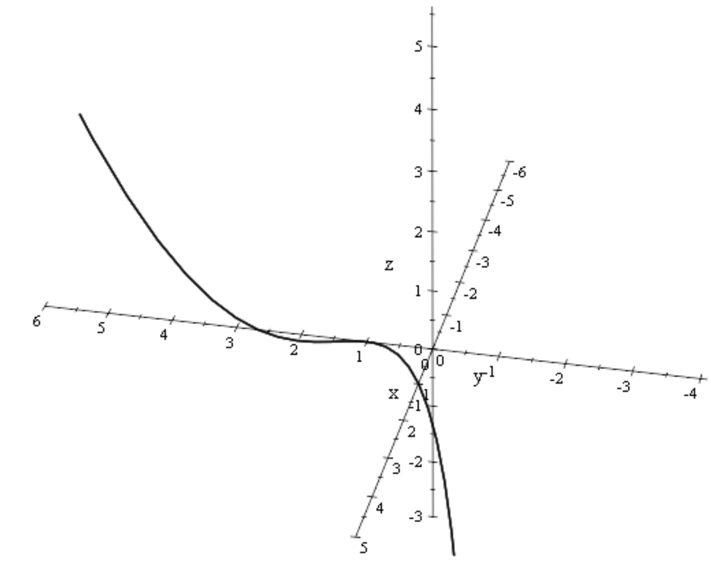
t	$\boldsymbol{x = (1+t)}$	$\boldsymbol{y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}}$	$\boldsymbol{z = \frac{t^3}{3}}$
-5	-4	17.678	-41.667
-4	-3	11.314	-21.333
-3	-2	6.364	-9.000
-2	-1	2.828	-2.667
-1	0	0.707	-0.333
0	1	0.000	0.000
1	2	0.707	0.333
2	3	2.828	2.667

3	4	6.364	9.000
4	5	11.314	21.333
5	6	17.678	41.667
-5	-4	17.678	-41.667

Elaborado: Autores

Los valores nos permiten graficar de la siguiente manera:

Figura 2. Gráfica de la Función Vectorial



Elaborado: Autores

Como se puede observar la posición de la curva en R^3y depende de la posición de los ejes, posición que debe seleccionarse para tener una vista que permita observarla de la mejor manera. La conceptualización en la mente de la posición de la curva no es tan fácil, para esto se necesitaría tener la posibilidad de rotar la gráfica para comprender como está la gráfica, que algunos graficadores si lo pueden hacer, pero aun así no se puede tener una idea completa de cómo está la curva en el espacio.

Se puede encontrar las gráficas cartesianas, en forma análoga a las ecuaciones simétricas de la recta, utilizando el mismo concepto que se emplea en esta, que es la de eliminar el parámetro t de las ecuaciones paramétricas, de estas solo se requieren dos de las tres ecuaciones que se forma y las cuales generalmente son cilindros que se alinean alguno de los ejes del sistema ordenado. De la ecuación de ejemplo podemos encontrar las siguientes igualdades, de las ecuaciones paramétricas:

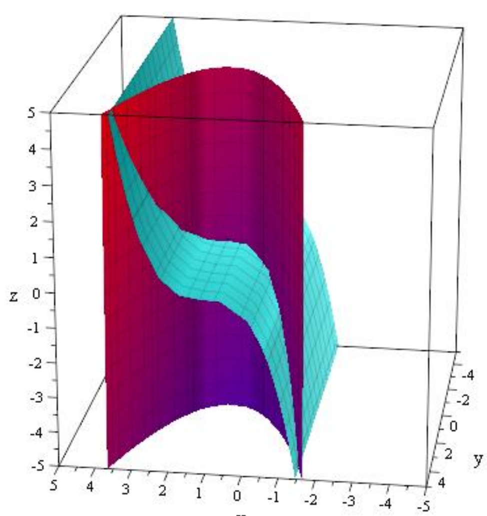
$$t = x - 1$$

Por lo tanto: $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{2}}$

$$z = \frac{(x-1)^3}{3}$$

Las ecuaciones obtenidas son ecuaciones que deben ser graficadas en R^3, siendo estos dos cilindros que al intersecarse en el espacio, generan la curva correspondiente a la función vectorial, observándose claramente que la curva de la función vectorial es la curva de la intersección de estas dos superficies. Lo que permite conceptualizar o entender de mejor manera la curva en 3D. Como se puede observar en el siguiente gráfico:

Figura 3. Gráfica de la Curva en 3D



Elaborado: Autores

El manejo de este criterio permite mejorar la interpretación de las curvas en tres dimensiones desarrollando la inteligencia espacial, necesaria en las carreras de ingeniería y otras de carácter técnico. Además, se puede observar que la curva intersección es parte de las dos superficies cilíndricas.

Los valores de las componentes x, y, z, en estas ecuaciones cartesianas se las puede calcular a partir de las ecuaciones encontradas que corresponden a las superficies cilíndricas teniendo en cuenta que los valores deben ser comunes para las dos o tres ecuaciones según el caso, como se indica en la siguiente tabla:

Tabla 2. Cálculo de las componentes

x	$y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{2}}$	$z = \frac{(x-1)^3}{3}$
-4	17.678	-41.667
-3	11.314	-21.333
-2	6.364	-9.000
-1	2.828	-2.667
0	0.707	-0.333
1	0.000	0.000
2	0.707	0.333
3	2.828	2.667
4	6.364	9.000
5	11.314	21.333
6	17.678	41.667

Elaborado: Autores

Como se puede observar los valores de x, y, z corresponden a los calculados mediante la función vectorial, en consecuencia, son parte de la curva.

Conclusiones

- La aplicación de la propuesta nos permite comparar la curva que se obtiene al graficar la función vectorial en tres dimensiones y la curva de intersección de las superficies cilíndricas que se obtienen de las ecuaciones cartesianas, siendo estas la misma.
- La grafica de la curva en tres dimensiones a partir de la intersección de dos superficies cilíndricas nos permite conceptualizar de mejor manera.

La curva al ser parte de las superficies cilíndricas nos permite tener una concepción real por donde está ubicada la curva en tres dimensiones, pues las superficies contienen la curva en mención.

Referencias

1. B. P. Demidovich. (1993). Problemas y ejercicios de análisis matemático (Edición en español), Paraninfo, 11a. Ed.
2. Edwards, B. H., Larson, R. (2016). Cálculo, Tomo II. Cengage.
3. G. B. Thomas (2000). R. L. Finney, M. D. Weir, F. R. Giordano, Thomas' Calculus, Addison-Wesley, 10a. Ed.
4. J. Marsden, A. (1988). Tromba, Cálculo vectorial, 4a. Ed., Addison-Wesley.
5. J. Stewart. (2008). Calculus Early Transcendentals, 6a. Ed., Brooks-Cole/Cengage Learning.
6. Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. H. (2002). Cálculo, Vol. 2. Madrid: Pirámide.
7. Marsden, J. E., Tromba, A. (1998). Cálculo vectorial. México: Addison Wesley Longman.
8. Smith, R. T., Minton, R. (2000). Cálculo. Tomo 2. Santafe de Bogotá: McGraw-Hill.
9. Stewart, J. (2012). Cálculo de varias variables y trascendentes tempranas. México: Cengage.
10. T. M. Apóstol (1988). Calculus, 2a. Ed., Reverté, S.A.