ALEXANDRIA

Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

Raciocínio Matemático Apoiado por Tarefas Exploratórias e Ações de Professores

Mathematical Reasoning Supported by Exploratory Tasks and Teacher Actions

Eliane Maria de Oliveira Araman[a]; André Luis Trevisan[b]; Bruna Angelis de Paula[a]

a Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil - elianearaman@utfpr.edu.br, brunangelis@hotmail.com
b Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil - andreluistrevisan@gmail.com

Palavras-chave:
Raciocínio matemático.
Tarefas exploratórias.
Ações docentes.
Processos de raciocínio.

Resumo: Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa de característica qualitativa e interpretativa e tem como tema as Tarefas Exploratórias e o Raciocínio Matemático. O objetivo foi analisar os processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio, ao resolverem uma tarefa matemática de caráter exploratório, e ações da professora diante desta tarefa. Para isso, realizamos uma discussão teórica a respeito do raciocínio matemático e dos processos relacionados a ele, sobre ações de professores que apoiam o raciocínio matemático e sobre tarefas de natureza exploratória, tendo como embasamento estudos realizados por diversos autores. Os dados que compõe o corpus de análise dessa pesquisa foram coletados por registros de áudio e vídeo, durante a realização da tarefa exploratória na respectiva turma. Os resultados apontam que as ações da professora contribuem para os processos de identificação de padrões, formulação de conjecturas, justificação e generalização, evidenciando o potencial que as ações docentes podem ter no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Keywords:
Mathematical reasoning.
Exploratory tasks.
Teacher's actions.
Reasoning processes.

Abstract: This qualitative and interpretative research has the theme of Exploratory Tasks and Mathematical Reasoning. The objective is to analyze the mathematical reasoning processes mobilized by students of a 2nd year high school class when solving an exploratory mathematical task and actions of the teacher in the face of this task. To this end, in this study we conducted a theoretical discussion about mathematical reasoning and the processes related to it, about the actions of teachers who support mathematical reasoning and about tasks of an exploratory nature, based on studies carried out by several authors. The data that make up the corpus of analysis of this research were collected by audio and video records, during the performance of the exploratory task in the respective class. The results show that the teacher's actions contribute to the process of identifying patterns, formulating conjectures, justification, and generalization, highlighting the potential that teaching actions can have in the development of students' mathematical reasoning.

Introdução

O desenvolvimento do raciocínio matemático deveria ser um dos grandes objetivos da disciplina de Matemática nos diferentes níveis da escolaridade, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, STYLIANIDES, 2009). Em especial, nos documentos curriculares como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCN (BRASIL, 2002) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), o raciocínio é apresentado como relevante no processo de escolarização.

De acordo com Oliveira (2008), a expressão raciocínio matemático denomina um conjunto de processos mentais complexos por meio dos quais se obtêm novas afirmações (conhecimento novo) a partir de afirmações conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio). Ao se falar sobre raciocínio matemático, temos que considerar os processos centrais desse raciocínio, ou seja, a conjectura, a generalização e a justificação (PONTE et al., 2020). Assim, é essencial desenvolver oportunidades de ensino que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio matemático e, assim, da aprendizagem matemática.

Os alunos não desenvolvem a capacidade de raciocinar apenas pela memorização de conceitos e procedimentos; é preciso estabelecer um ambiente de aprendizagem desafiadora em que os discentes possam utilizar diferentes estratégias na resolução das tarefas. A resolução de problemas e o trabalho com tarefas exploratórias e investigativas apresentam potencial para o desenvolvimento de processos de raciocínio que envolvem a concepção de uma conjectura baseada numa razão e a definição de uma estratégia de teste dessa conjectura (PONTE, 2010). É fundamental que o professor selecione boas tarefas exploratórias, questionando o estudante sobre o que ele fez, e como fez (WOOD, 1997), levando-o a apresentar justificativas para suas escolhas e, com isso, proporcionando a aprendizagem matemática.

Nesse contexto, este artigo tem por finalidade discutir processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 2°ano do Ensino Médio durante a resolução de uma tarefa de natureza exploratória, envolvendo padrão e regularidades, bem como as ações desenvolvidas pela professora durante a discussão da tarefa em dois grupos de alunos. Os dados foram recolhidos por meio de registros de áudios e vídeos e analisados à luz da fundamentação teórica estudada.

Raciocínio matemático e seus processos

Sabemos que o desenvolvimento do raciocínio matemático "é um dos grandes objetivos da matemática escolar" (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p. 782). Trata-se de um processo central na aprendizagem matemática (BRUNHEIRA; PONTE, 2019), que envolve o estabelecimento de relações matemáticas e é decisivo para desenvolver uma compreensão mais profunda dessa disciplina (JEANNOTE; KIERAN, 2017).

Para Stylianides (2009), o raciocínio matemático é um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. De forma similar, Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 728) definem-no como o "processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões". Na mesma direção, Morais et al. (2018) destacam que o raciocínio matemático é obtido por meio de um conjunto de ideias já conhecida e, partir dessas ideias, criam-se novos conceitos complexos para obter assim um novo conhecimento. Para esses últimos autores, o raciocínio matemático se desenvolve a partir um conjunto de informações já adquiridas e que resulta em novas conclusões.

Ellis et al. (2018, p. 2), por sua vez, definem o raciocínio matemático como "um processo de inferência que inclui procurar semelhanças ou diferenças, validar e exemplificar". Desde modo, raciocinar é criar inferências, ou seja, usar conhecimento adquirido para alcançar novas conclusões.

Jeannotte e Kieran (2017) apontam que o raciocínio matemático pode ser analisado com base em dois aspectos que, apesar de diferentes, se completam: o estrutural e o processual, tendo o primeiro um caráter abstrato e, o segundo, um caráter mais prático e temporal. Os modelos mais citados do aspecto estrutural são a dedução, a indução e a abdução. Já com relação ao processual, Jeannotte e Kieran (2017) identificam oito processos do raciocínio matemático divididos em duas categorias – validação (justificação, a prova e a prova formal), e busca por semelhanças e diferenças (formulação de conjecturas, generalização, identificação de padrões, comparação e classificação) –, e um nono processo, o de exemplificar, que dá suporte aos processos dessas duas categorias.

Embora a literatura defina todos esses processos, para este artigo discutimos apenas a formulação de conjecturas, a generalização, a identificação de padrões e a justificação, pois foram estes que emergiram na análise dos dados.

A formulação de conjecturas pode ser compreendida pela "busca de semelhanças e diferenças, inferindo numa narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico provável que tem o potencial para teorização matemática (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10). Trata-se de "uma introdução ao raciocínio matemático", "o desenvolvimento das con jecturas requisitando a verificação ou refutação das declarações" (LANNIN et al.,, 2011, p. 16). Para Jeannotte e Kieran (2017) conjecturar leva a uma ampliação do discurso pela construção de narrativas prováveis, a partir da busca por semelhanças e diferenças. Neste processo de elaborar conjecturas observando características comuns entre diversos fatos, o aluno desenvolve generalizações, que o induz a manusear e esclarecer o significado de conceitos, símbolos e representações (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012). Deste modo, uma conjectura pode ser ou não ser uma generalização, ou seja, conjecturar é visto como estabelecer um conjunto de afirmações gerais e a generalização é destacada por “identificar pontos comuns em casos diferentes e estender uma afirmação além do domínio em que foi originada” (BRUNHEIRA; PONTE, 2019, p. 90). Assim, generalizar “envolve a identificação da aplicação da generalização através do reconhecimento do domínio relevante” (LANNIN et al., 2011, p. 12), constituindo uma particularidade significativa na formulação de conjecturas.

A generalização, enquanto conjectura com características específicas, tem uma função fundamental na concepção da Matemática, pois “formular uma generalização matemática envolve uma afirmação sobre uma propriedade, conceito ou procedimento que se pretende válido para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012, p. 12). No âmbito escolar, os alunos apontam afirmações comuns entre vários casos, desenvolvendo generalizações que conduzem a usar e esclarecer os significados matemáticos de conceitos, símbolos e representações.

Na sala de aula de Matemática, “os alunos desenvolvem conjecturas, sejam elas faladas ou imagens mentais, a respeito de conceitos e partida para a atividade matemática e para o raciocínio matemático” (LANNIN et al., 2011, p. 13). A Matemática baseia-se em afirmações gerais sobre uma grande classe de objetos, e em função disso a generalização constitui uma modalidade particularmente importante de formulação de conjecturas. Consequentemente, a elaboração de conjecturas e as generalizações aparecem como processos centrais na aprendizagem matemática, pois, à medida que os alunos as validam ou refutam, eles frequentemente introduzem termos que precisam ser esclarecidos (LANNIN et al., 2011).

Um aspecto importante para a produção de uma generalização é a identificação de padrões. Para Stylianides (2009), a identificação de padrões pode ser vista como parte da atividade mais ampla de generalizar. Esse autor define padrão como “uma relação matemática geral que serve, ou se ajusta, a um determinado conjunto de dados” (STYLIANIDES, 2009, p. 263). Jeannotte e Kieran (2017) definem a identificação de padrões como “um processo do raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10).

Sobre a justificação, Lo et al., (2007) tomam esse processo como sinônimo de certificar o porquê de executar uma série de estratégias. De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12) “uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas”. Morais et al., (2018) discutem a importância de os alunos reconhecerem a necessidade de justificar o que fazem, sendo capacitados a recusar afirmações simplesmente embasadas na autoridade de um livro ou professor. Eles precisam elaborar justificativas para "convencer" a si mesmos e aos outros por que uma afirmação própria é verdadeira, fornecendo "uma sequência lógica de afirmações, cada uma delas baseada em afirmações, ideias ou entendimentos, para chegar a uma conclusão" (LANNIN et al.,2011, p.35).

É pouco provável que os alunos justifiquem sem a intervenção do professor, e questões como "Por que pensa que esta afirmação é verdadeira? Algum aluno tem outra ideia diferente, por quê? Por que isso ocorre? ", sugeridas pelo NCTM (2007, p. 61), precisam ser apresentadas com frequência, pois criam hábitos de justificação que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Ações para o desenvolvimento do raciocínio em aulas de Matemática

Para desenvolver o raciocínio matemático, a forma como o professor organiza o ensino é relevante e deve ser coerente com o que se almeja, indo além dos métodos de ensino tradicionais. Nesta perspectiva, a escolha de tarefas e o modo de aplicá-las são de suma importância para que possam proporcionar aos estudantes o desenvolvimento do raciocínio matemático. Para que o aluno possa raciocinar matematicamente é "necessária uma melhor compreensão sobre como podem as tarefas ser direcionadas para esse efeito, como devem ser apresentadas aos alunos, como é feita a sua discussão e quais as suas implicações para a compreensão da Matemática" (MATA-PEREIRA, 2012, p. 03). Estudos apontam que a resolução de problemas e as tarefas de natureza exploratórias ou investigativas, levam o aluno a desenvolver o raciocínio em sala de aula de Matemática (AZEVEDO, 2009; FRANCISCO; MAHER, 2011; HENRIQUES, 2010; PONTE et al., 2020).

As tarefas propostas devem proporcionar diferentes maneiras de chegar a uma conclusão verdadeira, em atividades de aprendizagem diversificadas e significativas, propiciando a resolução de problemas, o estabelecimento de conexões matemáticas, a comunicação matemática e a argumentação (BOA VIDA *et al.*, 2008), oferecendo aos alunos "oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar" (BRODIE, 2010).

Além de propor tarefas com essas características, o professor deve proporcionar uma interação em sala de aula, incentivar o aluno a explorar, apresentar e discutir suas soluções, mobilizando diferentes processos de raciocínio. No que se refere ao papel do professor, tem-se dado ênfase às condições relacionadas com a "seleção das tarefas e a comunicação na sala de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer" (PONTE et al., 2013, p. 55).

Estes últimos autores elaboraram um modelo para as ações do professor de modo a orientar as discussões matemáticas apreciando duas dimensões, as ações referentes aos conteúdos e processos matemáticos e aquelas relacionadas com a gestão da aprendizagem, sendo que o seu modelo conceitua "sobretudo as ações relacionadas com os aspectos matemáticos" (PONTE et al., 2013, p. 59). Tais ações são organizadas em quatro categorias, a constar: convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar.

Em pesquisa mais recente, Araman et al., (2019) avançaram nos estudos sobre as ações do professor a partir deste modelo de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013). Para além das categorias, foi elaborado um quadro síntese em que os autores descrevem as ações previstas em cada categoria de ação, conforme consta no Quadro 1.

Quadro 1 – Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

CATEGORIAS	AÇÕES
Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.
Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentivaa explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476)

As ações de *convidar* abrangem os momentos em que o professor solicita ao aluno que apresente suas ideias, seja requerendo respostas a uma questão específica ou solicitando explicações de como ele resolveu uma tarefa. Por meio desta ação, o professor "desperta a vontade" dos alunos em participar da discussão, e pode observar como estão raciocinando e qual é a sua compreensão a respeito daquele conteúdo, subsidiando as próximas ações, que dão base às discussões matemáticas.

Na categoria de *guiar/apoiar*, o professor, por meio de questionamentos ou explicações, guia o pensamento do aluno para uma determinada situação ou enfatiza fatos importantes, ou ainda, fornece pistas aos alunos e os encoraja a refletir sobre suas resoluções. Nas ações de *informar/sugerir*, "o professor assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos" (PONTE et al., 2013, p. 59). Com base nas informações concedidas pelos alunos, o professor auxilia, por meio da validação ou correção de uma resposta, indicando ao aluno o que necessita aprimorar, e também fornece explicações e solicita novas estratégias para solucionar a questão apresentada.

Por fim, nas ações de *desafiar*, o professor "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (PONTE et al., 2013, p. 59). Nessas ações, o professor tenta conduzir os alunos em um ambiente desafiador de modo que busquem novas formas de representação, criem ideias e analisem-nas. Nessa categoria, o aluno é incentivado, quando possível, a elaborar generalizações e justificar os seus pensamentos, estimulando-o a avançar seus limites e encorajando-o a uma contemplação.

Metodologia

Esta é uma pesquisa qualitativa, de caráter interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e considera dados coletados em uma turma do 2° ano do Ensino Médio, em uma pequena cidade no interior do Paraná, Brasil. A aula, planejada coletivamente por um grupo de professores no âmbito de uma disciplina de Mestrado em Ensino de Matemática (TREVISAN et al., 2020), foi ministrada por uma professora mestranda do referido programa, em sua própria turma. Essa disciplina foi ministrada pelo segundo autor, que acompanhou a aula e foi responsável pela coleta dos dados.

No dia da aula estavam presentes 18 alunos que foram divididos em grupos de 3 alunos, totalizando 6 grupos. A tarefa foi sobre uma sequência de palitos (Figura 1), e tinha como objetivo explorar um modelo de crescimento linear, em que os alunos deveriam determinar um padrão, analisando como o número de palitos relacionava-se com a posição. Mais especificamente: (a) representar a 6ª e a 7ª figura desta sequência; (b) determinar o total de palitos da 12ª figura? (c) construir uma tabela que relacione a quantidade de palitos em cada figura, da 1ª até a 7ª figuras; (d) determinar o total de palitos da 29ª figura? (e) completar um esquema que relacionava algumas posições com a quantidade de palitos; (f) determinar a posição, na sequência, da figura com 101 palitos? (g) decidir, dentre dois gráficos dados (linear ou exponencial) qual melhor representa a relação entre a posição da figura e a quantidade de palitos?

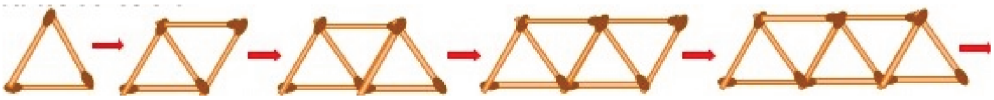

Figura 1 – Tarefa dos Palitos
Fonte: autores

Os nomes dos alunos e da professora foram alterados com a finalidade de garantir a confidencialidade. É com base nas transcrições das resoluções da tarefa de 2 grupos (alunos C, D e E; e alunos H, I e J), em que houve um maior envolvimento dos estudantes na "apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados" (RODRIGUES et al., 2018, p. 399), que se realizou a análise dos dados aqui apresentada.

Consideramos como material de análise o áudio de dois dos grupos. Para análise dos áudios, uma das pesquisadoras (terceira autora), inicialmente transcreveu integralmente a discussão das equipes. Houve uma primeira parte da discussão correspondendo ao trabalho autônomo dos alunos e, a certa altura do diálogo (foco deste artigo), a professora passa a participar. Procuramos então identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao resolverem a tarefa. Inicialmente, fizemos uma identificação inicial, em diálogo com outra pesquisadora do grupo de pesquisa, que também estava explorando essa temática em um outro conjunto de dados. Na continuidade, fizemos ajustes finais nessa categorização.

Na sequência, após separarmos as transcrições em trechos, seguiu-se uma fase de análise dos dados tendo em vista dois focos: 1) os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao resolverem a tarefa, tendo como base os processos apresentados e discutidos no referencial teórico e 2) as ações desenvolvidas pela professora durante a discussão da tarefa nos grupos, tendo como base o quadro de ações da Figura 1 (cada uma das ações está indicada nas transcrições, ao final da fala da professora).

Resultados

Os resultados estão organizados, sequencial e separadamente, para cada um dos grupos analisados.

Grupo 1 (alunos C, D e E)

> *Aluno D:* Professora? É para desenhar os palitos?
> *Professora:* Você vai ver o jeito que acha melhor representar... *(Informar/Sugerir)*
> *Aluno D:* Mais fácil desenhar então né?
> *Professora:* Não quero que vocês se prendam, o jeito que achar melhor para vocês resolverem.

Como a situação proposta na tarefa foi apresentada com desenhos, os alunos inferiram que a primeira questão teria que ser resolvida também com desenho, adotando assim um procedimento menos formal de resolução. Diante disso, nota-se que a professora validou a estratégia adotada pelo grupo, valorizando seu trabalho, e sugerindo que o grupo poderia utilizar aquela estratégia que considerasse mais adequada, visto que a questão poderia ser resolvida de várias maneiras, que não havia uma única forma de resolução (ação de Informar/Sugerir). A discussão prossegue e algum tempo depois a professora retorna ao grupo.

> *Professora:* Como vocês fizeram? *(Convidar)*
> *Aluno D:* Ah, fizemos pela lógica, tipo: sabíamos que a 5ª figura tinha 11 [palitos]. Então, descobrimos que a razão era 2, porque a figura aumentava 2 palitos. Daí nos colocamos 11+2 e depois que achamos o resultado colocamos mais 2, daí achamos o resultado. Daí, achamos o 6° e o 7° [termos]. E na “b” era para achar a 12ª figura. A gente sabia que a 6ª [figura] era 13, então 12 tinha que ser o dobro, então a gente fez 13 vezes 2, praticamente isso.

Neste trecho, pode-se observar que a professora convida os alunos a relatarem como resolveram a questão (ação de convidar). O aluno inicialmente apresenta sua ideia, com base no conhecimento matemático da razão de uma progressão aritmética (P.A.). Utiliza a 5ª figura para mostrar que, somando mais 2 palitos, daria a quantidade de palitos da próxima figura. Assim, explicita uma conjectura elaborada pelo grupo: sempre, somando 2 palitos, descobrirá a quantidade de palitos da figura seguinte. Na próxima questão, ele utilizou a resposta anterior. Assim, para determinar a quantidade de palitos na 12ª figura, usará o dobro de palitos da 6ª figura. O grupo elaborou uma nova conjectura, usando a ideia de dobrar a quantidade de palitos quanto se tem uma figura atual e se quer descobrir a quantidade de palitos da figura cuja posição é o seu dobro.

> [...] *Professora*: Aqui, é isso mesmo que acontece? Vamos visualizar a figura 2. Quantos palitos aqui? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno D:* 5.
> *Professora:* 5 *(Informar/Sugerir)*. Então você teria que pensar que a figura 4 é o dobro dessa, então o que seria o dobro disso? Quantos tem na figura 4? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno D:* Nossa, é verdade...
> *Professora:* Será que é isso que está acontecendo? Está aumentando? Pensa no jeito que vocês estão fazendo. *(Guiar/Apoiar)*

A professora continua questionando os alunos na tentativa de observar como estão pensando e qual a compreensão que eles têm a respeito do conceito matemático discutido (dobro) e da conjectura que elaboraram. As ações da professora de Guiar/Apoiar são observadas no momento que ela apresenta um questionamento para aluno, para que ele mesmo observe que o conceito de dobro não se aplica a essa situação. Para tanto, a professora leva o aluno a pensar em relacionar a 2ª figura com a 4ª figura, que seria seu dobro. Ao notar que, mesmo dobrando a posição da figura, a quantidade de palitos não dobra, a conjectura elaborada sobre o dobro é invalidada. O trecho ainda contém uma ação que se encaixa na categoria de Informar/Sugerir, quando a professora rediz a resposta correta dada pelo aluno, no sentido de validá-la. No trecho a seguir, a professora retorna ao grupo algum tempo depois e pergunta como os alunos haviam repensado a questão.

> [...] *Professora*: Conseguiram pensar nessa? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno E:* Fizemos a mesma lógica da primeira. Não nos lembrávamos da fórmula, daí fizemos igual a lógica da primeira.
> *Professora:* Não precisa de fórmula não *(Informar/sugerir)*. Que vocês pensaram aqui? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno D*: Mesma lógica, fomos aumentando em 2 e 2, até chegar no 12º [termo].

A professora questiona os alunos como haviam determinado a quantidade de palitos da figura 12, já que se equivocaram em uma das conjecturas elaboradas anteriormente. O aluno relata então terem utilizada a outra conjectura, da razão, somando de dois em dois palitos, até chegar à figura que procurava. Neste trecho, nota-se que o aluno fala sobre não se lembrarem de uma fórmula (o termo geral de uma P.A.). A ação da professora foi guiar os alunos para explicitarem suas conjecturas, e validar essa forma de solucionar a questão, sem a necessidade de uso de fórmulas.

> [...] *Professora*: E se perguntarem de uma figura muito grande você iria fazer isso? Como você conseguiria fazer sem fórmula, de outra maneira, que você precisa. Como a 49ª figura você conseguiria fazer isso? *(Desafiar)*

> *Aluno D:* 49ª [figura]?
> *Professora*: É um exemplo.

Diante da dificuldade dos alunos em encontrar uma maneira mais ágil de determinar a quantidade de palitos, visto que estavam utilizando somente a conjectura da soma de 2 em 2, a professora desafia-os a descobrir quantos palitos tem a figura 49, sem precisar ficar somando de 2 em 2, pois seria uma solução muito demorada e cansativa. No próximo trecho, os alunos resolvem a questão sobre a relação entre a variação na posição da figura e o aumento do número de palitos.

> *Aluno D*: A cada número de palitos é o dobro de posições. Porque a cada 1 posição aumenta 2.
> [...] *Aluno D*: 8 posições... dá 16 palitos....
> *Aluno E*: Dá para escrever que a cada 2 palitos aumentava uma posição, então como são 8 palitos aumenta 4 posições.

Neste trecho o grupo apresenta uma nova conjectura, de que a variação de uma 1 posição implica no aumento de 2 palitos. Assim, por exemplo, aumentando-se 8 posições, aumentam 16 palitos. No próximo trecho, os alunos tentam utilizar essa conjectura para determinar quantos palitos tem na figura 29.

> [...] *Aluno E*: Vou contar quantos palitinhos tem aqui.... Tem 31 palitos na figura 15. Na figura 17 são 35 palitos, [pois] aumentaram 4 palitos.
> *Aluno D*: Da figura 17 para 29 dá quantos [termos]? 12 [termos/posições]
> *Aluno E*: Aumentaram 12 [posições].
> *Aluno D*: Então sabemos que, na figura 17 é 35, e a figura 12 é 25. Então será a 17 com a 12. [Ou seja], 35+25? Dá 60.

O aluno E observou que, da figura 15 até a figura 17, aumentam duas posições e, assim, aumentaram 4 palitos, aplicando a conjectura elaborada por eles no trecho anterior. O aluno D começou então a elaborar uma nova conjectura para descobrir quantos palitos tem a figura 29. Sabendo quantos palitos há na figura 12 e quantos há na figura 17, poderia determinar o total de palitos da 29ª figura somando essas duas quantidades.

> [...] *Professora*: Como vocês pensaram na 29ª [figura]? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno D:* Aqui a gente sabe que na figura 17 são 35 palitos, e a figura 15 são 31. Se aumenta 4 palitos são 35. E aqui [item b da tarefa] a gente sabe que a figura 12 tem 25 palitos, então se a gente somar os dois dá 29, iria dar a quantidade de palitos da figura 29. Da figura 17 mais a figura 12 daria 29... A gente não sabe se dá o mesmo resultado...
> *Aluno E:* Tenho certeza disso.
> *Professora:* Vocês acham que 60 é número razoável por ser a quantidade de palitos ou... *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno E:* Acho que não é, por causa da sequência sempre chega uma parte que dá 21 [por exemplo, referindo-se ao fato de o número ser ímpar]. Então, no caso seria 61...
> *Aluno D:* Nunca tem um número par na sequência, por isso que não pode ser 60...
> *Aluno E:* A gente sabe que vai ter uma figura que vai chegar que vai dar 101, então provavelmente vai ter um 11, 21, 31, 41...
> *Aluno D:* Então a gente não tinha pensado nisso, não tem número par. Porque, pelo fato que a 1ª figura começa com 3, é a única que vai ter 3, as outras sempre vai aumentar 2.

Neste trecho a professora questiona como os alunos chegaram ao resultado (ação de Guiar/Apoiar). Eles explicitam então sua conjectura, e detalham como ela foi utilizada para chegar a um resultado. Após a explicação, a professora incentiva o grupo a pensar se o número 60 seria a resposta correta. Observa-se que a professora direciona os alunos a refletirem sobre a conjectura criada, sem dizer se o resultado estava ou não correto, mais sim se a quantidade era razoável.

Motivado por esse questionamento, o aluno E percebe então um padrão referente à quantidade de palitos de cada figura, que ela nunca termina em número par, sempre em números ímpares. Justifica que a 1ª figura tem 3 palitos e, se aumenta 2 palitos em cada figura (conjectura de 2 em 2), logo a quantidade será um número ímpar. Também utiliza o fato de que uma das questões da própria tarefa afirma haver uma posição em que a quantidade de palitos é 101. Assim, apresentam a conjectura de que 61 seria o resultado mais plausível, por estar mais próximo de 60.

> *Professora*: Será que isso que vocês estão pensando, isso não pode mudar um pouquinho para chegar então? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno D:* É a gente sabe que vai ser em torno de 60, provavelmente vai ser 61. O número mais próximo.
> *Aluno E:* Mais próximo.
> *Professora:* Por que não 63 ou 59? (Desafiar)
> *Aluno E:* Pera aí, a gente sabe que a figura 17 é 35, e a figura 18 são 37, a figura 19 são 39. Então é 59.
> *Aluno D:* É 59...
> *Aluno E:* Tipo se a figura 19 são 39, a figura 29...
> *Aluno D:* Vai ser 59.... Porque aumentou 20 posições...
> *Aluno E:* É 10 né?

Neste trecho a professora encoraja os alunos reelaborarem suas respostas, ação que se enquadra na categoria Guiar/Apoiar. Os alunos sabem que o resultado será próximo de 60, então a professora parte dessa ideia e os desafia, questionando por que não seria 63 ou 59, já que esses números são próximos de 60 também. O grupo então observou que a figura 19 tem 39 palitos e que, para chegar na figura 29 aumentaram 10 posições. Como eles já sabiam que cada posição aumenta 2 palitos (conjectura já validada anteriormente), da figura 19 até a figura 29, irão aumentar 20 palitos. Concluem então que a figura 29 tem 59 palitos. Aqui, os alunos utilizaram a conjectura que tinham elaborado anteriormente, incorporando-a à questão atual e ampliando-a, conseguindo chegar à resposta correta. Esse processo de validação da conjectura possibilitou que o grupo elaborasse uma generalização.

No próximo trecho, a professora convida o grupo a verbalizar essa generalização, explicando para toda turma, no momento de discussão coletiva, como havia determinado o número de palitos da 29ª figura.

> [...] *Professora*: Iremos começar com as discussões das atividades. Vamos começar com o grupo do Aluno E, pois, eles fizeram um raciocínio diferente. Aluno E, queria que você falasse como você fez para descobrir qual a quantidade de palitos na 29ª figura. *(Convidar)*
> *Aluno E:* Então, a gente sabia que a figura 17 tinha um total de 35 palitos. Então, a figura 19 tinha que dar mais 4 palitos, então daria 39. Sabemos que na figura 19 seriam 39 palitos. Então se a gente aumenta 10 posições aumenta 20 palitos. Que cada posição que aumenta, aumenta 2 palitos.

> [...]*Professora:* Você tinha pensado nisso desde início? Ou pensaram em algo diferente? *(Guiar/Apoiar)*
> Aluno E: A gente pensou assim desde o começo. Então a figura 29, será a figura 19 mais 10 posições, então se 10 posições são 20 palitos, então seria 39 mais 20 palitos. Por isso, 59.

A professora inicialmente convidou o grupo do aluno E a apresentar suas soluções, pois haviam resolvido de uma forma que ela considerou diferente do restante da turma. O aluno então apresentou as conjecturas que haviam utilizado para resolver o item f. A professora, numa ação de Guiar/Apoiar, questiona aos alunos se pensaram da mesma forma desde o início da resolução, pois ela gostaria que as outras conjecturas (mesmo que incorretas) fossem compartilhadas com todos. Entretanto, o aluno responde que sim (ou porque não reconheceu a intenção da professora, ou porque não se sentiu à vontade naquele momento em apresentar algo que estava "errado").

No trecho final a seguir a professora optou por ela mesma explicitar a primeira conjectura que eles haviam elaborado, buscando valorizar outras formas de pensar que, mesmo incorretas, foram gradativamente refinadas e ampliadas, até chegar a algo "correto".

> *Professora*: Qual posição vocês somaram para chegar à posição 29? (Guiar/Apoiar). Você tinha pensado assim, que tinham me falado, pegaram a figura 17 e somaram com a figura 12, não era isso que vocês tinham feito para descobrir a figura 29? *(Informar/Sugerir)*
> *Aluno E:* Que a gente sabia que a figura 17 tinha 35 palitos...
> *Professora:* Na posição 12 tinha quantos palitos? Vocês acharam na posição 12? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno E:* Ah, 25...
> *Professora:* 35+25 daria quantos? *(Guiar/Apoiar)*. O primeiro raciocínio deles era pegar a figura da posição 17 e somar com a figura da posição 12 que tinha na primeira folha [referindo-se ao item (b) da tarefa]. Como 17+12 daria a posição da figura 29, pegaram lá 35 palitos da figura 17 e 25 palitos da posição 12, somando daria quantos? *(Informar/Sugerir)*
> *Aluno E*: 60.
> *Professora*: Por que vocês viram que não era 60? *(Desafiar)*
> *Aluno E*: Porque a progressão sempre tinha números ímpares e não números pares.
> *Professora*: Perceberam que eram ímpares, como 60 é par perceberam que não poderia ter feito daquele jeito. *(Informar/Sugerir)*

Neste último trecho o objetivo da professora foi mostrar que os alunos elaboraram outras conjecturas e que, ao tentar validá-las, perceberam que não estavam corretas. Logo, precisaram criar novas conjecturas e validá-las. Nesse trecho da discussão, ela mobiliza ações da categoria Guiar/Apoiar, ao realizar questionamentos pontuais, da categoria Informar/Sugerir, ao relatar algumas conjecturas do grupo, e de Desafiar, ao questionar por que o 60 não era um valor válido, solicitando deles uma justificativa.

Grupo 2: alunos H, I e J

Inicialmente, apresentamos um trecho da discussão ocorrida neste grupo, na qual uma primeira conjectura foi elaborada.

> [...] *Aluno I*: Aumenta 2 fósforos cada vez.
> *Aluno H*: Qual a fórmula da PA mesmo?

> *Aluno J*: Não necessariamente precisa ser PA, ela [a professora, durante a apresentação da tarefa] disse que não tem fórmula [referindo-se ao fato de que os alunos poderiam elaborar suas próprias estratégias de resolução]. Aqui começa com 3 depois aumenta 2.

No primeiro contato com a tarefa os alunos observaram que aumentam 2 palitos a cada figura, elaborando assim uma conjectura, de que a sequência era uma P.A. Logo, eles começaram a analisar o que ocorria de uma figura para outra.

> [...] *Professora*: Alguém me explica como pensou aqui? *(Convidar)*
> *Aluno J*: Como já tem 3 na 1ª [figura] e depois só aumenta 2, daí vai aumentando cada um, pega o último resultado da última e aumenta mais 2.
> *Professora*: Entendi. Mas vocês conseguem pensar como poderia chegar, por exemplo, na 7ª [figura] sem ficar usando as outras? *(Desafiar)*

Neste trecho, o grupo explicita para a professora a conjectura que haviam elaborado, de que, para descobrir quantos palitos existe na figura, é só utilizar a figura anterior e somar 2 palitos. Aqui, a professora inicialmente convidou o grupo a explicar como conseguiram resolver, e desafia o grupo a pensar uma possibilidade, sem fazer uso da figura imediatamente anterior. Isso ocorreu no momento em que o grupo pôs-se a resolver o item (c) da tarefa.

> [...] *Aluno J*: Para completar aqui. Aumentou 2 palitos aumentou 1 posição né? Aqui aumentou 8...
> *Aluno H*: Aumentou 8 palitos aumenta 4 posições. Se a cada 2 palitos aumenta 1, então tem que aumentar 4.
> *Aluno J*: Sim.

Neste trecho os alunos ampliam sua conjectura inicial, reconhecendo que, a cada aumento de 2 palitos, corresponde a variação de uma posição. Assim, concluem que, se aumentaram 8 palitos no esquema apresentado no item (c) da tarefa, é porque havia aumentado 4 posições na sequência de palitos.

> [...] *Professora*: E aí, que vocês escreveram? Como vocês pensaram? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno J*: Toda vez que o muda a posição aumenta 2 palitos. Como aqui aumentou 8 temos 16 palitos.
> *Professora*: Certo. E vocês acham que essa ideia ajuda vocês naquilo que eu tinha perguntado antes? Sem precisar ficar fazendo de 1 em 1. Vocês conseguem pensar como calcularia a posição 12, por exemplo? *(Desafiar)*

Neste trecho, a professora inicialmente solicita ao grupo que expliquem como fizeram para resolver a questão do item (c) (ação de Guiar/Apoiar). O aluno apresenta então a conjectura que haviam elaborado sobre relação entre variação na posição e na quantidade de palitos. A professora então desafia o grupo a retomar sua questão anterior (como determinar o total de palitos de uma posição qualquer, de um forma não-recursiva). Tal reflexão faz-se necessária para que a conjectura possa levar a uma generalização. Nesse momento, porém, o grupo não foi capaz de responder. A professora então explora um pouco mais o esquema presente no item (c) da tarefa.

> [...] *Professora*: Na figura 17 tem um ponto de interrogação aqui para vocês completarem, vocês chegaram a completar? Quantos palitos vão ter na figura 17? *(Guiar/ Apoiar)*
> *Aluno J*: Teria 35...

> *Professora*: Como é que você sabe que dá 35? (Guiar/Apoiar)
> *Aluno J*: Por que fomos contando na figura 15...
> *Professora*: Ah, vocês foram contando da figura 15 e aí como você chegam na 17? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno J*: Aumentamos 4 palitos.
> *Aluno H*: Aqui seria 31 palitos total. E na figura 17 terá 35.
> *Professora*: Tá.

A professora incentiva o aluno a explicar como determinaram o total de palitos da figura 17, e o que eles utilizaram para chegar até a resposta e, para isso, faz alguns questionamentos. Estas ações correspondem à categoria Guiar/Apoiar. Os alunos utilizaram a conjectura de que, se aumentaram 4 palitos, aumentaram 2 posições. O grupo então prossegue para o item seguinte, que solicitava o total de palitos da 29ª figura.

> [...] *Aluno J*: Vai precisar da fórmula.
> *Aluno H*: 29ª figura... Seriam 57 palitos?
> *Aluno J*: Eu não sei...
> *Aluno H*: A quantidade de palitos da 29ª é 29 + 29 = 58.
> *Aluno J*: Sim.
> *Aluno H*: Então tira 1 por causa que na 1ª figura tem palito a mais, daí tira 1 daí ficaria 57.

Os alunos discutem como determinar quantos palitos tem a figura 29. Um dos alunos elabora uma nova conjectura, aparentemente sem relação com aquelas exploradas anteriormente: ele somou a posição com ela mesma e depois subtraiu 1, pois notou que tem "um palito a mais" na 1ª figura. Para o grupo, sua conjectura parecia correta.

> *Aluno J*: Tô pensando... Vamos pegar 2 x 12 + 1 = 25.
> *Aluno H*: Hã?
> *Aluno J*: Pensa assim como aumenta 2 para cada então seria 2x+1. Então na 29 seria 2x29 + 1 = 59.

Nesse trecho, os alunos invalidam a conjectura anterior, de que deveriam subtrair 1, e a substituem por somar 1. A nova conjectura é de que, para descobrir quantos palitos tem na figura, é necessário multiplicar a posição por 2, e somar 1. Ela parece ter sido validada pelo grupo pelo fato de que, de uma figura para outra, aumentam 2 palitos. Então, criaram um padrão, multiplicando por 2 a posição da figura e somando 1 ao resultado. Assim, descobrem quantos palitos possui na figura que procuram. Finalizando, explicitam à professora esse modo de pensar, como detalhado no trecho a seguir.

> [...] *Professora*: Diga aí como vocês resolveram. *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno J*: Então, pensamos na fórmula.
> *Professora*: Que fórmula?
> *Aluno J*: Descobrimos que sempre ia aumentado o dobro mais 1.
> *Professora*: Como que vocês descobriram isso? *(Guiar/ Apoiar)*
> *Aluno J*: Aqui na 1ª figura é 3, sempre será esse 1 diferente. Então, fizemos 2x em que x seria a figura, mais 1.
> *Professora*: Beleza, essa fórmula vocês acham que tem a ver com essa sequência aí? *(Guiar/Apoiar)*
> *Aluno J*: Sim.

A professora executa ações de Guiar/Apoiar com a finalidade de que o grupo explique como fizeram. O grupo apresenta a conjectura que elaborou para determinar a quantidade de palitos de uma figura. Note-se que, apesar de ter elaborado anteriormente outras conjecturas corretas, que exploravam a relação entre a variação de posições e a variação dos palitos, esse grupo optou por um pensamento por correspondência, elaborando uma fórmula que servia para resolver todos os itens da tarefa. Destaca-se que as ações da professora, ao longo dos vários trechos de diálogo com esse grupo, auxiliaram-no a reelaborar, refutar e/ou validar suas diversas conjecturas, conduzindo-os a elaborar uma fórmula geral que representa uma generalização.

Discussão e considerações finais

Nesta pesquisa, assumimos que o desenvolvimento do raciocínio matemático é essencial para aprendizagem matemática nos vários níveis de escolaridade. Dessa maneira, mostra-se promissor, no âmbito da pesquisa em Educação Matemática, discutir o papel desempenhado pelos professores na promoção do raciocínio, especificamente as suas ações durante as discussões que ocorrem em pequenos grupos, ou durante uma plenário, no trabalho com tarefas de natureza exploratória. Para isso, nesta pesquisa, assumimos as ações docentes discutidas por Ponte et al (2013), categorizadas e sintetizadas no modelo de análise apresentado por Araman, Serrazina e Ponte (2019).

Os resultados do presente estudo apontaram que os questionamentos realizados pela professora estão distribuídos pelas quatro categorias de ação. Discutimos as ações desempenhadas pela professora, referentes a cada uma das categorias, ao longo de cada um dos trechos analisados, juntamente com os processos de raciocínio mobilizados pelos alunos durante a resolução, vários deles decorrentes dessas ações.

As ações da professora, no diálogo com cada um dos grupos, iniciaram sempre na categoria convidar, o que é natural, pois essa categoria tem a função de iniciar os alunos na discussão (PONTE et al., 2013). Gradativamente, foram substituídas por ações de Guiar/Apoiar, seja por meio de questionamentos que conduziram o pensamento dos alunos, seja chamando a atenção para fatos importantes ou, ainda, solicitando que os alunos explicassem como fizeram. Por exemplo, no trecho 3 do grupo alunos C, D, E, ações da professora de Guiar/Apoiar são observadas no momento que ela conduz o questionamento para aluno, para que ele observe que a conjectura de dobro não se aplica àquela situação, elaborando diversos questionamentos que juntos conduziram o pensamento do aluno, possibilitando que sua conjectura fosse invalidada e, depois, reformulada.

Nas ações de Informar/Sugerir, a professora, por diversas vezes, redisse as respostas corretas dos alunos, e também solicitou que eles reavaliassem algum ponto ou mesmo fornecessem explicações e informações. Essas ações foram importantes, pois validaram os pensamentos corretos dos alunos, auxiliando-os a reelaborarem outros que não estavam corretos. Por exemplo, tais ações conduziram os alunos a elaborarem diversas conjecturas, como no trecho 1 do grupo alunos C, D, E, em que a professora sugeriu para o aluno utilizar outras formas de resolver a questão, informando que a mesma questão poderia ser resolvida de várias maneiras e motivando-os a pensar em estratégias variadas para chegar a uma solução.

As ações das categorias Guiar/Apoiar e Informar/Sugerir, juntas, conduziram os alunos a validarem ou não as conjecturas que elaboraram ou, ainda, a refinarem as mesmas. Essas ações da professora contribuem para o que está estabelecido na literatura que define raciocínio matemático como a capacidade de usar informações já conhecidas para obter, de forma justificada, novas conclusões (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018).

De forma complementar, com as ações de desafiar, a professora conseguiu que os alunos refletissem e reavaliassem suas formas de pensar, levando-os a tentar generalizar a conjectura, em geral "testando-a" em outro exemplo, e também a apresentarem algumas justificativas para o que fizeram. Por exemplo, no trecho 5 do grupo de alunos C, D, E, a professora observou a dificuldade em pensar uma estratégia mais fácil de determinar a quantidade de palitos, para além de somente utilizar a soma de 2 em 2. A professora desafiou-os a descobrir quantos palitos havia na figura 49, sem precisar ficar somando de 2 em 2, pois seria uma solução muito demorada e cansativa. Segundo Ponte et al. (2013), tal ação coloca o aluno na situação de avançar em seu entendimento por meio da formação de conexões, da argumentação e da avaliação.

Em relação ao raciocínio matemático, destacamos que as ações desenvolvidas pela professora durante a condução da tarefa auxiliaram em alguns processos e raciocínio, como por exemplo, identificação de padrões, formulação de conjecturas, justificação e generalização. Ao questionar constantemente o que acontecia de uma figura para outra, os alunos puderam identificar um padrão, de que sempre aumentava de dois em dois, e gradativamente refiná-lo, estabelecendo um modo de se determinar o total de palitos em várias posições (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

De acordo com Lannin et al. (2011), uma justificação é válida quando composta por uma sequência lógica de afirmações que se baseiam em outros conhecimentos já determinados e encaminham a uma conclusão. Por exemplo, os alunos partiram de conhecimentos já existentes que, mediados pelas ações da professora, os conduziram à conclusão de que "*descobrimos que sempre ia aumentado o dobro mais 1*". Observa-se que, nesse caso, as ações da professora auxiliaram esse grupo a elaborar e validar suas conjecturas, conduzindo-o a elaborar uma fórmula geral que se constitui numa possibilidade de generalização.

Finalizando, destaca-se que a tarefa apresentou potencial para o raciocínio matemático, uma vez que os alunos desenvolveram alguns processos de raciocínio: elaboaram conjecturas, fizeram validação das mesmas, abandonaram as que consideram erradas e elaboraram outras, ou mesmo refinaram algumas. Num primeiro momento, eles recorreram somente à relação recursiva e, com o apoio das ações desempenhadas pela professora, conseguiram avançar na resolução da tarefa.

Além disso, procuraram justificar suas formas de pensar e avançaram no sentido de organizar uma fórmula geral, ainda que a testassem apenas nos exemplos dados, numa tentativa de generalização. Assim, além do potencial da tarefa exploratória, as ações da professora ao discutir ideias matemáticas com os alunos se mostram fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático, como afirma Araman et al. (2020).

Referências

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 466–490, 2019.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático nos primeiros anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. *Bolema*, Rio Claro, v.34, n.67, p.441-461, 2020.

AZEVEDO, A. *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções*. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação, especialização Didáctica da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2009.

BOAVIDA, A. M.; PAIVA, A. L.; CEBOLA, G.; VALE, I.; PIMENTEL, T. *A experiência matemática no ensino básico*: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico Lisboa: DGIDC-ME, 2008.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRODIE, K. *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. 1. ed. New York, NY: Springer, 2010.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos. *Bolema*, v. 33, n. 63, p. 88- 108, 2019.

ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, v. 30, n. 2, p. 1-26, 2018.

FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Teachers attending to students' mathematical reasoning: Lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 14, n. 1, p. 49-66, 2011.

HENRIQUES, A. *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação***.** 2010. 446 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didáctica da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

JEANNOTTE, D; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 96, n. 1, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston***,** VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

LO, J. J., GRANT, T. J.; FLOWERS, J. Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 11, n. 1, p. 5-22, 2008.

MATA-PEREIRA, J.; O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações. 2012. 163 f. *Dissertação (Mestrado em Educação)* – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, J., PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, n. 2, v. 96, p. 169-186, out. 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, v. XXI, n. 2, p. 81-110, 2012.

MATA-PEREIRA, J. PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, v. 32, n. 62, 2018.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostered) Transformations of Rational Number Representations. *Acta Scientiae*, Canoas (RS), v. 20, n. 4, p. 552-570, 2018.

NCTM. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar***.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2007.

OLIVEIRA, P. *A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica*. (Dissertação de Mestrado), Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2002.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, 100, p. 3-9, 2008.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005. ,p. 11-34,

PONTE, J. P**.** Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**.** In: PONTE, J. P. (org). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa**,** 2005.

PONTE, J. P. Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. *Únion: Revista Iberoamericana de Investigación Matemática*, n. 21, p. 13-30, 2010.

PONTE, J. P., MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, n. 22, v. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa*, v. 7, n. 2, p. 355-377, 2012.

STEEN, L. Twenty questions about mathematical reasoning. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics. 1999. p. 270–285,

STYLIANIDES, G. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinkingand Learning*, v. 11, n.4, p. 258-288, 2009.

TREVISAN, A. L.; RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, v. 15, p. 1-14, 2020.

WOOD, T. Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond “natural teaching”. In: ABRANTES, P.; PORFÍRIO, J.; BAÍA, M. (Org.). *The interactions in the mathematics classroom*: proceedings of the CIEAEM 49. Setúbal: Escola Superior de Educação, 1997. p. 34-43.

SOBRE OS AUTORES

ELIANE MARIA DE OLIVEIRA ARAMAN. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio/PR, e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

ANDRÉ LUIS TREVISAN. Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina/PR, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, e do Doutorado em Ensino e Tecnologia.

BRUNA ANGELIS DE PAULA. Licenciada em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio/PR.

Recebido: 21 de julho de 2021.

Revisado: 17 de março de 2022.

Aceito: 09 de abril de 2022.