Marcela Parraguez González, Solange Roa-Fuentes,
Raúl Jiménez Alarcón, Alexander Betancur Sánchez

ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES QUE DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA MODELAN Y ARTICULAN EL APRENDIZAJE DE VALOR Y VECTOR PROPIO EN $\mathbb{R}^2$

Mental structures and mechanisms that from a geometric perspective model and articulate the learning of eigenvalue and eigenvector in $\mathbb{R}^2$

RESUMEN

Se proponen dos descomposiciones genéticas (DG's) refinadas, como resultado de la aplicación del Ciclo de investigación de APOE, que describen estructuras y mecanismos mentales para el concepto de valor y vector propio en dos casos de estudio. La primera DG_0 modela los conocimientos previos que estudiantes de secundaria (14 – 16 años) deben lograr para construir en la universidad dicho concepto en $\mathbb{R}^2$, —este modelo se sustenta en la rotación de vectores y el concepto de múltiplo escalar—. La segunda DG_1 modela en $\mathbb{R}^2$ la construcción de valor y vector propio en estudiantes universitarios de primer año y muestra cómo apoyarse en tópicos de secundaria para estructurar dicho concepto a partir de relaciones entre la transformación lineal y el vector múltiplo escalar como generador de una recta. El análisis de datos permite validar las DG's y bosquejar un camino cognitivo para el aprendizaje del concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$.

PALABRAS CLAVE:

- *Valor propio*
- *Vector propio*
- *Rotación*
- *Múltiplo escalar*
- *Teoría APOE*

ABSTRACT

Two refined genetic decompositions (DGs) are proposed, as a result of the application of the APOS Research Cycle, which describe mental structures and mechanisms for the concept of value and eigenvector in two case studies. The first DG_0 models the prior knowledge that high school students (14 – 16 years old) must achieve in $\mathbb{R}^2$ order to build this concept in the university —this model is based on vector rotation and the concept of scalar multiple—. The second DG_1 models in $\mathbb{R}^2$ the construction of eigenvalue and eigenvector in first-year university students and shows how to rely on secondary education to structure that concept from relationships between the linear transformation and the scalar multiple vector as a generator of a line. The data analysis allows to validate the DG's and outline a cognitive path for learning the concept of eigenvalue and eigenvector in $\mathbb{R}^2$.

KEY WORDS:

- *Eigenvalue,*
- *Eigenvector*
- *Rotation*
- *Scalar product*
- *APOS theory*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2022) *25* (1): 63 - 92.
Recepción: Octubre 25 2020 / Aceptación: Julio 25, 2022. DOI: 10.12802/relime.22.2513

RESUMO

Duas decomposições genéticas refinadas (DGs) são propostas, como resultado da aplicação do Ciclo de Pesquisa APOS, que descrevem estruturas mentais e mecanismos para o conceito de valor e autovetor em dois estudos de caso. O primeiro DG_0 modela o conhecimento prévio que os alunos do ensino médio (14 – 16 anos) devem adquirir para construir esse conceito na universidade em $\mathbb{R}^2$ —este modelo é baseado na rotação vetorial e no conceito de múltiplo escalar—. O segundo DG_1 modela a $\mathbb{R}^2$ construção de autovalor e autovetor em estudantes universitários do primeiro ano e mostra como contar com o ensino médio para estruturar esse conceito a partir das relações entre a transformação linear e o vetor múltiplo escalar como gerador de uma reta. A análise dos dados permite validar os GD's e traçar um caminho cognitivo para a aprendizagem do conceito de autovalor e autovetor em $\mathbb{R}^2$.

PALAVRAS CHAVE:

- *Autovalor*
- *Autovetor*
- *Rotação*
- *Produto escalar*
- *Teoria APOS*

RÉSUMÉ

Deux décompositions génétiques raffinées (DG) sont proposées, à la suite de l'application du cycle de recherche APOS, qui décrit les structures mentales et les mécanismes du concept de valeur et de vecteur propre dans deux études de cas. Le premier DG_0 modélise les connaissances préalables que les lycéens (14 – 16 ans) doivent acquérir pour construiré en $\mathbb{R}^2$ ce concept à l'université —ce modèle est basé sur la rotation vectorielle et le concept de multiple scalaire—. Le deuxième DG_1 modélise en $\mathbb{R}^2$ la construction de valeur et de vecteur propre chez les étudiants de première année d'université et montre comment utiliser le soutien de l'enseignement secondaire pour structurer ledit concept en fonction des relations entre la transformation linéaire et le vecteur multiple scalaire en tant que générateur d'une ligne. L'analyse des données permet de valider les DG's et de tracer un chemin cognitif pour apprendre le concept de valeur et de vecteur propre en $\mathbb{R}^2$.

MOTS CLÉS:

- *Valeur propre*
- *Vecteur propre*
- *Rotation*
- *Produit scalaire*
- *Théorie APOS*

1. Introducción

Los estudiantes de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, STEM (por sus siglas en inglés) precisan de un pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991) para abordar actividades interdiciplinarias y en correspondencia con las habilidades requeridas en el siglo XXI (Cook & Bush, 2018), que apuntan a profundizar la comprensión conceptual de la matemática desde la escuela.

La era de las "Matemáticas Modernas" de los años 60, que estuvo liderada por matemáticos puristas de la Escuela de Bourbaki, concebían que la enseñanza de las matemáticas y en particular el Álgebra Lineal tenía que reflejar la construcción de la lógica, dotando a este fragmento de la matemática muy abstracta y formal, lo que fue provocando fracasos y dificultades en los estudiantes.

Unos 25 años después, con la aparición de la Matemática Educativa y el uso de las Tecnologías, la enseñanza del Álgebra Lineal ha ido incorporando la visualización para ver y entender de mejor manera los tópicos que conforman el Álgebra Lineal. Algunos investigadores, como Dorier y Sierpinska (2001) no son optimistas en estos nuevos enfoques y declaran que "comunmente en las discusiones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal, los cursos de Álgebra Lineal están mal diseñados y mal enseñandos y que no importa como se enseñe, el Álgebra Lineal sigue siendo una materia cognitiva y conceptualmente díficil" (p. 258). Sin embargo, Klasa (2010), presenta actividades apoyadas en geometría dinámica y álgebra computacional para fortalecer la comprensión del Álgebra Lineal en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, finalidad que comparte la propuesta actual de este artículo para $\mathbb{R}^2$.

Para Hillel, Sierpinska & Dreyfus (1998) la comprensión de un fragmento del Álgebra Lineal se produce cuando ineractúa el pensar práctico (dado por lo geométrico) y el pensar teórico (dado por algebraico y lo estructural) de ese fragmento. Por ende abordar y atender lo geométrico de un concepto del Álgebra Lineal se torna fundamental y particular a la vez, para la comprensión de sus conceptos. Posteriores extensiones de la investigación anterior, como el trabajo de Soto (2005) muestran algunas dificultades en la conversión gráfico-algebraica de situaciones con vectores.

Sin embargo, los estudiantes que cursan Álgebra Lineal por primera vez sienten haber aterrizado en un mundo completamente nuevo (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000), no logran "ver" cómo los tópicos que se definen formalmente en la universidad se relacionan con las matemáticas de la escuela (Rensaa, Hogstad y Monaghan, 2020; Rach y Fillebrown, 2016). La brecha entre las matemáticas de la escuela y la universidad esta dibujada por la construcción sobre Objetos concretos y abstractos (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014) respectivamente, en este sentido, el uso de las representaciones geométricas es un aspecto que permite trazar puentes entre formas simples y complejas de pensamiento (Harel, 2017). Los valores y vectores propios, así como otros conceptos de Álgebra Lineal con frecuencia descuidan la comprensión conceptual (Bouhjar, Andrews-Larson, Hadier y Zandieh, 2018) y pretenden esquivar la naturaleza abstracta de conceptos como espacio vectorial y transformación lineal mediante la ejercitación de procedimientos calculatorios específicos que los estudiantes logran manipular, pero que no necesariamente logran comprender (Robinet, 1986; Moore, 1995; Parraguez y Oktaç, 2010; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016; González y Roa-Fuentes, 2017).

Particularmente, para los estudiantes los conceptos del Álgebra Lineal se construyen de manera parcial y diferentes según los dominios (físico, geométrico, numérico, algebraico, analítico u otros), lo que tributa a que la construcción de estos tópicos abstractos pueda estar afectada por desequilibrios de la generalidad a partir de situaciones geométricas concretas (Harel, 2017), que el presente artículo –como objetivo general– trata de compensar al trabajar de manera geométrica un determinado tópico del Álgebra Lineal; con base en un modelo de conocimientos previos sustentados en lo geométrico de un currículo y nivel escolar concreto.

En específico, referente a los valores y vectores propios algunos planteamientos enfatizan en el problema de la visualización y las aplicaciones de estos conceptos en áreas como Física (Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila & Albarracin, 2017; Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila & Jordán, 2017). Por otra parte, Salgado y Trigueros (2015), proponen el diseño y desarrollo de un modelo de clase inicial basado en la Teoría APOE. De manera particular, Rodríguez, Parraguez y Trigueros (2018) y González y Roa-Fuentes (2017) centran la mirada en el estudio de $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial y su representación en el plano, evidenciando que la construcción de Acciones concretas generan una mejor comprensión de *Objetos* cognitivos abstractos (Klasa, 2010).

Esta investigación se direcciona en plantear desde una perspectiva geométrica un análisis teórico del concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. Específicamente en describir, por un lado, los conocimientos previos de secundaria que se precisan para construir dicho concepto y por otro, mostrar estructuras geométricas sobre los cuales puede apoyarse un estudiante universitario de primer año para interpretar algebraica y geométricamente el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$.

Los valores y vectores propios de acuerdo con varios libros de texto (Poole, 2011; Lay, 2007; entre otros) se definen como:

> Si A es cualquier matriz numérica cuadrada con coeficientes en los números reales, de tamaño $n \times n$, entonces:
> (1) Un valor propio de la matriz A, denominado λ, es un escalar, que para un vector v distinto del vector nulo, se cumple la siguiente condición: $Av = \lambda v$.
> (2) El vector v se llama vector propio de A, asociado al valor propio λ.

La definición formal del concepto puede pasar a segundo plano, cuando se realza la fuerza visual de las interpretaciones geométricas de los conceptos definidos en $\mathbb{R}^2$. De acuerdo con esto, el aprendizaje de los estudiantes no se debe limitar solo a la aplicación de propiedades de matrices sobre expresiones algebraicas, como la que sugiere, el paso de la expresión $Ax=\lambda x$ a la expresión $(A-\lambda I)x=0$ (Thomas y Stewart, 2011).

El proceso de rotación de vectores propios, en general está relacionado con el endomorfismo $T_\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde θ es el ángulo de rotación y se llama operador rotación. En la presente investigación, se analizan resultados para el caso n=2 dado que se utilizan evidencias de estudiantes tanto de enseñanza secundaria como de primer año universitario y que es, a juicio de los autores, los niveles que reportan mayores dificultades. El operador T_θ puede representarse matricialmente respecto de la base canónica $B=\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, mediante la matriz $[\mathrm{A}]_{T_\theta} = \begin{bmatrix} cos0 & -sen0 \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$. Por ejemplo, si θ = 90°, esta matriz no puede tener vectores propios en $\mathbb{R}^2$, ya que ningún vector es transformado en un múltiplo de si mismo y por lo tanto no puede tener valores propios reales. De hecho, su polinomio característico está dado por el polinomio $p(\lambda)=\lambda^2+1$ con raíces $\lambda=i$ y $\lambda=-i$ con valores propios sobre $\mathbb{C}^2$ dados por $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ respectivamente. En general, los valores propios de la matriz $[\mathrm{A}]_{T_\theta}$ están dados por los números $\lambda=r(cos\theta \pm isen\theta)=re^{\pm i\theta}$. Si asumimos que un vector propio asociado lo podemos escribir de la forma $v_1=r_1e^{i\theta_1}$, en la igualdad $Av_1=\lambda v_1$, el producto $\lambda v_1=re^{\pm i\theta}r_1e^{i\theta_1}=rr_1e^{i(\theta_1\pm\theta)}$ nos muestra que el vector propio v_1 es escalado (dilatado o contraído) y sufre una rotación. Esto establece que valores propios complejos, modifican la magnitud y orientación del vector propio.

Para efectos de esta investigación y para focalizarnos en un problema recurrente sobre el proceso de rotación, consideraremos el caso de valores y vectores propios reales, de donde en la igualdad $\lambda=r(cos+isen)=0$ la única posibilidad que sean reales es si se cumple que $sen\theta=0$. Por tanto, los valores propios son reales para $\theta=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, esto es, por ejemplo, rotaciones en 180°.

Los valores y vectores propios pertenecen a los tópicos de mayor aplicación del Álgebra Lineal; entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz, de Cadenas de Markov y crecimiento poblacional, de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y de sistemas lineales discretos (Poole, 2011), el movimiento de masas unido a una cuerda (Yáñez, 2015). Particularmente este último se modela y resuelve a partir de los conceptos de valor y vector propio y el uso de ecuaciones diferenciales.

Un acercamiento más intuitivo de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$, se presenta en la Figura 1. En ella se puede apreciar, que la transformación deforma el copo de nieve de tal manera que los vectores rojo $(1,-1)$ y rosado $(1, 1)$ son vectores propios de la transformación con valores propios 1 y 3 respectivamente.

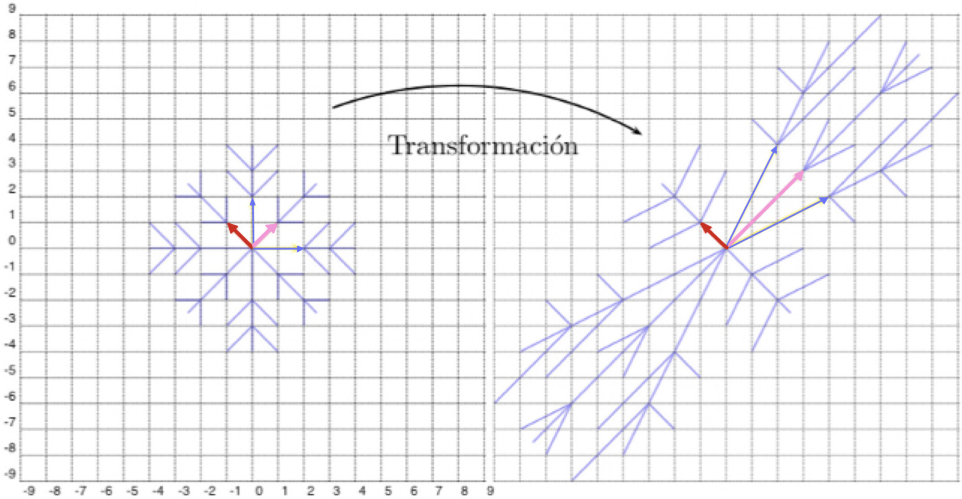


Figura 1. Transformación del copo de nieve

El vector rojo mantiene su dirección y sentido $T(1,-1) = 1(1,-1)$ por tanto su valor propio correspondiente es 1; mientras que el vector rosado mantiene su dirección pero no su longitud, $T(1,\ 1) = 3(1,\ 1)$, en este caso 3 es su valor propio correspondiente. Todos los vectores en la misma dirección y sentido de los vectores rojo y rosado son vectores propios, al valor propio respectivo; éstos forman los espacios propios $S_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda v\}$ definidos por el valor propio λ, en este caso S_1 y S_3.

Las preguntas de investigación que surgen con base a la presentación de los apartados anteriores, son, desde la matemática: ¿Qué prerrequisitos son necesarios para el aprendizaje de los valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$? y desde la cognición y la didáctica: ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción de los conceptos valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$? Esta investigación se sitúa en un escenario con estudiantes de secundaria y primer año de universidad, utilizando como marco teórico la teoría APOE. Esta teoría es pertinente dado que justamente se aboca al análisis de la construcción de conceptos matemáticos y proporciona una metodología que permite el diseño de instrumentos y el análisis de los datos de forma congruente con la propuesta teórica (Arnon et al., 2014). Es decir, permite analizar las estrategias, que los estudiantes utilizan cuando resuelven problemas específicos, en los cuales ponen en juego sus concepciones sobre conceptos matemáticos (Oktaç, 2019).

2. Fundamentación teórica: estructuras y mecanismos mentales de la Teoría APOE

La teoría APOE explica la construcción de conocimiento matemático, con base en el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget (Dubinsky, 1991); este se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación, reversión, entre otros, que dan paso a las estructuras que definen su nombre: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (Arnon et al., 2014).

Como se señala en Arnon et al., (2014) la construcción de un concepto puede iniciar con la aplicación de Acciones sobre Objetos construidos previamente. Así un estudiante muestra una concepción[1] *Acción* si realiza paso a paso un tipo de transformación, obedeciendo a estímulos externos; estas Acciones se han relacionado en un nivel básico con la aplicación de algoritmos. Las Acciones pueden ser interiorizadas en un *Proceso* si el estudiante puede realizar esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente realizar todos los pasos específicos o en orden.

Por otra parte, dos o más *Procesos* pueden coordinarse para construir un nuevo *Proceso*; el mecanismo de coordinación es fundamental en la construcción de muchos conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014), dado que permite poner dos o más *Procesos* juntos y dar paso a la encapsulación. Si el estudiante considera un *Proceso* como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se afirma que ha *encapsulado* el *Proceso* en un *Objeto.* Desde la perspectiva de la teoría APOE, las dificultades de los estudiantes con el simbolismo matemático provienen de tratar de aplicar rótulos antes de que los objetos hayan sido construidos vía encapsulación. Una vez que el objeto existe en la mente, es fácil asignarle un rótulo. Por otra parte, haber alcanzado la construcción Objeto, conlleva la posibilidad de desencapsular el Objeto en el Proceso que lo formó (Dubinsky et al., 2005, p. 340), de este modo se favorece la interpretación de una representación simbólica.

Finalmente, un *Esquema* es una colección de *Acciones*, *Procesos*, *Objeto* y otros *Esquemas* que el estudiante organiza de forma coherente en su mente. Un esquema esta siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo *Objeto* para aplicar nuevas *Acciones*; en tal caso, se dice que el *Esquema* se ha *tematizado.*

---

1 Una concepción difiere de estructura, en el sentido en que la primera es propia del sujeto, y la segunda es consenso de la comunidad matemática (McDonald, Mathews & Strobel, 2000).

Para operacionalizar la teoría APOE como marco de investigación se requiere del diseño de un modelo predictivo, llamado descomposición genética (DG). Este es un modelo hipotético que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante comprenda un concepto matemático (Arnon et al., 2014). En el caso de esta investigación interesa el diseño de dos DG´s que describan la construcción mental de los conocimientos previos que subyacen en la educación secundaria y las estructuras y mecanismos mentales que tributan para el aprendizaje de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ por estudiantes universitarios.

3. Método

Para determinar las construcciones y mecanismos mentales que subyacen a la construcción y prerrequisitos de los valores y vectores propios en estudiantes de los niveles escolares señalados, se diseñaron dos DG's que se presentan más adelante. También, se elaboraron instrumentos, basados en las DG's, con la finalidad de realizar un análisis de las producciones escritas de los estudiantes. Para analizar sus procedimientos, se consideró que una aproximación adecuada es el estudio de Casos (Stake, 2010), ya que se presta para analizar una situación a profundidad en un periodo de tiempo acotado.

3.1. *Participantes*

En esta investigación participan doce estudiantes chilenos de dos instituciones de distinto nivel educativo: secundaria y universitaria. Los casos de estudio se justifican en la necesidad de delimitar con precisión las construcciones mentales previas que los participantes ponen en juego cuando trabajan con conocimientos asociados a los valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$. Además, se busca analizar las estructuras y mecanismos mentales que los participantes construyen cuando abordan situaciones que involucran el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. Los casos de estudio permiten explicitar y describir las estructuras y los mecanismos mentales identificados mediante los instrumentos de investigación aplicados. Además, la heterogeneidad en la formación de los estudiantes de distintos niveles de formación permite explicitar las construcciones y los mecanismos mentales que son comunes y disimiles en la construcción de valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica.

El procedimiento seguido en la selección de los casos de estudio se basó en la consideración de las siguientes categorías.

Caso 1: Corresponde a seis estudiantes de secundaria (14 – 16 años, etiquetados como E1, E2, E3, E4, E5, E6), que durante un trimestre y una vez por semana se han reunido voluntariamente para dar respuesta a 12 actividades, entre ellas las preguntas del cuestionario que se reportan en este escrito. En los cursos de matemáticas, que han llevado estos estudiantes, se incluyen el estudio de transformaciones isométricas.

Caso 2: Corresponden a seis estudiantes de Pedagogía en Matemáticas etiquetados como E7, E8, E9, E10, E11 y E12 que han finalizado y aprobado un primer curso de Álgebra Lineal. En este curso se abordaron los conceptos de espacio vectorial, transformación lineal, valor y vector propio con un enfoque algebraico.

3.2. *Ciclo de investigación*

El ciclo de investigación inicia con un análisis teórico sobre los conceptos básicos ligados a los valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$. Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición de los conceptos matemáticos a estudiar a través de dos DG's: una DG_0 para modelar los conocimientos previos a la construcción de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$ y otra DG_1, con la finalidad de modelar su construcción en $\mathbb{R}^2$ para estudiantes universitarios.

En la segunda etapa de la investigación una vez constituidas las DG's hipotéticas es necesario documentarlas. Es decir, tener alguna certeza de la viabilidad de los caminos señalados en ellas. Para esto se diseñan y aplican instrumentos que permitan validar las estructuras mencionadas en las DG's (ver Tabla I) o bien incorporar aquellas estructuras que no hayan sido consideradas en las DG's hipotéticas. El carácter cualitativo y descriptivo de esta investigación, permite analizar las concepciones de los estudiantes como elemento de primordial importancia ya que se busca hacerlas lo más explícitas posible.

TABLA I

Resumen y recolección de información por casos de estudio

Fuente	*Caso 1* Estudiantes de Secundaria E1, …, E6	*Caso 2* Estudiantes Universitarios E7, …, E12
Técnica de Recogida de datos	Aplicación de las preguntas 1, 2, 3 y 4 del cuestionario	Aplicación de las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 del cuestionario
Análisis y Verificación de Datos	Analizados desde la DG_0	Analizados desde la DG_1
Objetivo	Validar y/o Refinar DG_0	Validar y/o Refinar DG_1

En la tercera etapa Análisis y verificación de datos, los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos son analizados desde las DG`s hipotéticas, detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se evidencian en el trabajo de los estudiantes. En general el análisis tiene que ser realizado con nitidez, es decir, ejemplos de estudiantes quienes parecen comprender esto y otros que no lo hacen, y luego discutir que la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción o mecanismo mental en particular que aparece en las DG`s. Solamente entonces se puede llegar a la conclusión de que los datos soportan esta construcción mental particular en las DG`s. Esto es realizado para todas las estructuras mentales específicas que se explicitan en el Análisis teórico.

3.3. *Análisis teórico*

El análisis teórico en esta investigación se materializa en el diseño de dos DG`s validadas o refinadas a través de dos casos de estudio. Para la primera DG_0 hemos situado su validación o refinación en la enseñanza secundaria –Caso 1–; y en educación superior –Caso 2– para DG_1.

3.3.1. *Modelo cognitivo hipotético de los conocimientos geométricos previos para la construcción de los valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$:* DG_0

El modelo cognitivo hipotético de los conocimientos previos y sus relaciones para la construcción de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ toma como estructuras iniciales: el múltiplo escalar y la rotación de 180º alrededor del origen, como *Acciones*. Como se presenta en la Figura 2, el múltiplo escalar inicia su construcción con la aplicación de las *Acciones 1 y 2* sobre formas geométricas o algebraicas de los vectores. La transformación de vectores específicos en $\mathbb{R}^2$ mediante escalares c en $\mathbb{R}$, determinados por la función $f(a, b) = (ca, cb)$ puede generar la reflexión de los estudiantes sobre el múltiplo escalar y dar paso a la construcción del *Proceso 1.*

Por otra parte, analizando la Figura 2 por la derecha, se tienen el *Proceso* de rotación de 180° con centro en el origen. Dicho *Proceso* resulta de la interiorización de la *Acción* de seleccionar vectores específicos y graficarlos con sus respectivas rotaciones. La estructura *Proceso* se caracteriza por anticipar la relación geométrica entre un vector y su rotación ya sea de forma geométrica o algebraica. La coordinación entre el *Proceso* de la función $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ (Proceso 2) con el *Proceso* de rotación de 180° con centro en el origen permite la construcción del *Proceso* múltiplo escalar de un vector como se muestra en la Figura 2. Esta estructura permite describir la transformación que se aplica a cualquier vector al ser multiplicado por un escalar, es decir, es posible establecer intervalos para los valores del escalar donde el efecto geométrico que se aplica a cualquier vector es él mismo. En relación con esto último es posible definir para cada vector $v \in \mathbb{R}^2$, la función $g_v(\lambda) = \lambda v$, en donde si $\lambda > 0$, se mantiene el sentido del vector, mientras que si $\lambda < 0$, el sentido del vector es opuesto, generando una rotación en 180°.

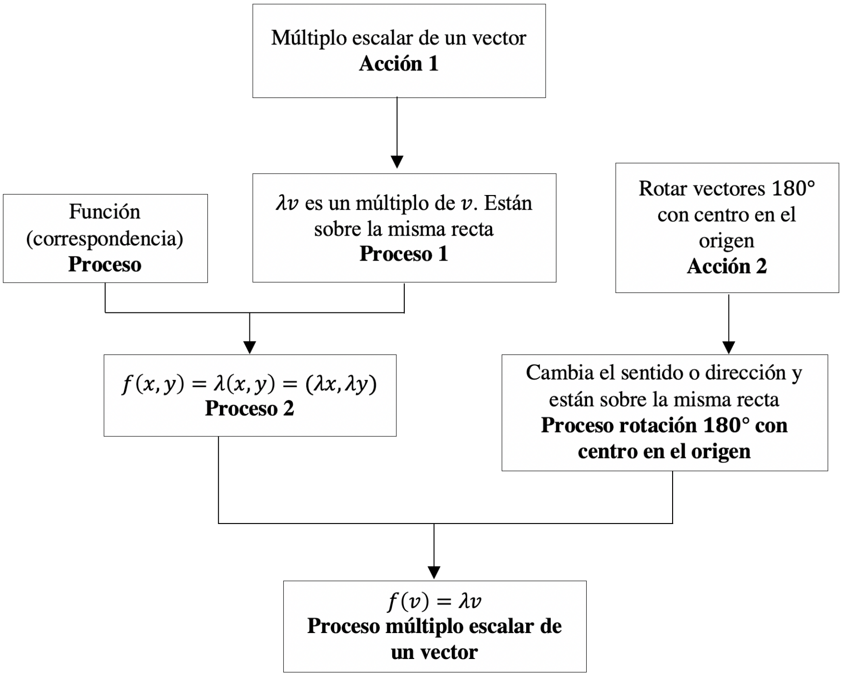


Figura 2. DG_0 hipotética de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$: Interiorización de Acciones y coordinación de Procesos

3.3.2. *Modelo cognitivo hipotético para la construcción de los valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$:* DG_1

En esencia el concepto protagónico a nivel universitario para el aprendizaje de valores y vectores propios es el concepto de transformación lineal. La Figura 3 en la parte derecha muestra las *Acciones* que debe realizar un estudiante, y que se han considerado esenciales para iniciar la construcción de valor y vector propio. La

Acción 3 corresponde al producto matriz-vector, su interiorización se evidencia al reconocer tal producto como una transformación de vectores, de manera que sin realizar cálculos es posible imaginar el efecto geométrico que produce la matriz en el vector. Las *Acción 4 y 5* están relacionadas con las propiedades de linealidad de la transformación lineal. Sobre la interiorización de las *Acciones 4 y 5* y la coordinación de los *Procesos* relacionados a dichas *Acciones (Procesos 4 y 5)* se muestran más detalles en Roa-Fuentes y Oktaç (2010). La coordinación del *Proceso 3* con el *Proceso* de transformación lineal es producto de la comparación de igualdad entre $T(v)$ y $A_T v$ considerando la matriz $A_T = [T(e_1)\ T(e_2)]$, llamada matriz asociada a la transformación T respecto de la base $B = \{e_1, e_2\}$. González y Roa-Fuentes (2017) consideran que la interpretación matricial de la transformación lineal involucra la elección de una base, que para este caso es la canónica de $\mathbb{R}^2$. Finalmente, la comparación mediante la igualdad entre $T(v)$ o $A_T v$ con λv permite reconocer que se produce un mismo efecto en el vector, aunque sean operaciones diferentes. De esta manera se puede rotular al vector y al escalar como valor y vector propio, respectivamente.

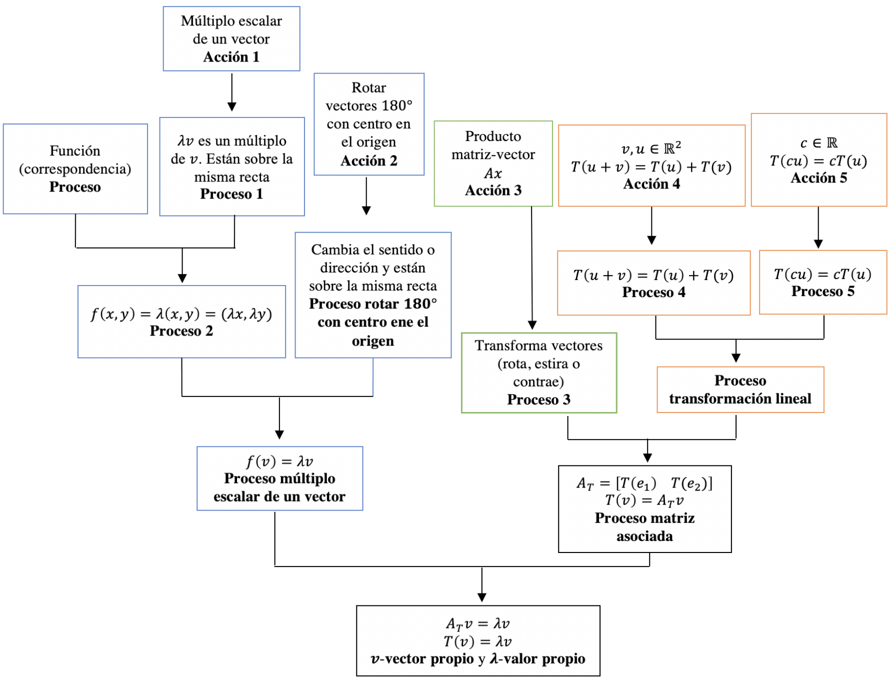


Figura 3. DG_1 hipotética de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$: Interiorización de Acciones y Coordinación de Procesos

Con base en los dos modelos cognitivos descritos, se da paso a la recolección y análisis de datos. En esta etapa se pueden evidenciar o refinar las estructuras y mecanismos planteados en DG_0 y en DG_1 o bien, pueden emerger producto del análisis nuevas construcciones y mecanismos, como resultado del trabajo real de los estudiantes derivado de la aplicación de los instrumentos de investigación diseñados.

3.4. *Instrumento*

Una vez diseñados los análisis teóricos para DG_0 y DG_1 fue necesario validarlos, esto es, tener certeza de su viabilidad como modelo de construcción de las estructuras previas (conocimientos previos) situadas en enseñanza secundaria y del concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ situados en enseñanza universitaria, respectivamente. Para ello se diseñaron dos cuestionarios uno para cada Caso de estudio. Para cada una de las preguntas de los cuestionarios se realizó un análisis a priori y otro a posteriori. Ambos análisis fueron profusamente discutidos entre los investigadores y las discrepancias se negociaron, hasta alcanzar un acuerdo que se presenta más adelante como el análisis a priori de las preguntas, y posteriormente como el análisis de los datos obtenidos en la investigación.

3.4.1. *Análisis a priori de las preguntas*

El análisis a priori se realiza para cada una de las preguntas del cuestionario diseñado para cada Caso de estudio. Estos instrumentos tienen una componente epistemológica ya que se basan en las DG's, además, su intención es promover la reflexión de los estudiantes para apoyar la construcción de conocimiento asociado a los valores y vectores propios. Los instrumentos además, toman en cuenta las mallas curriculares y/o programas de matemáticas de los estudiantes de ambos casos.

Caso 1: Estudiantes de enseñanza secundaria. Para este caso se analizan las preguntas P1, P2, P3 y P4 del cuestionario.

Pregunta 1: A continuación se presenta una función T que tiene el siguiente efecto al aplicarla a un vector v de $\mathbb{R}^2$, $T(v)=\lambda v$, donde λ es un número real.

a) ¿Qué efecto geométrico ejerce T? Explique.
b) Si λ toma los valores 2 y –2, ¿Qué forma toma $T(v)$? Explique.
c) Suponga que se tienen los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$: $v_1=(1,1)$, $v_2=(-1,-2)$, $v_3=(-2,4)$ y $v_4=(3,-1)$.

Si λ es igual a 2, ¿Qué sucede con cada uno de los vectores anteriores cuando se les aplica T? y ¿Si λ es igual a −2 que sucede con ellos? Explique.

d) Explique qué sucede si los valores de λ son positivos o negativos, grafique los vectores finales cuando se aplica T a los vectores $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-1, -2)$, $v_3 = (-2, 4)$ y $v_4 = (3, -1)$. ¿Qué relación tienen con cada uno de los vectores iniciales?

Esta pregunta busca conocer las interpretaciones verbales, geométricas o algebraicas sobre el múltiplo escalar. La pregunta demanda describir el efecto sobre vectores particulares y generales. Cada ítem se caracteriza por preguntar de forma diferente sobre el múltiplo escalar. En el ítem b) se muestran valores específicos del escalar y se espera que el estudiante pueda pensar en vectores generales o particulares. Por otra parte, el ítem d) requiere formas de pensamiento generales sobre escalares y vectores, al mismo tiempo. A partir de las respuestas de los estudiantes se busca tener evidencias sobre cómo conciben la transformación T. La noción subyacente en esto es la idea de múltiplo. Para casos particulares se puede evidenciar una contracción de los vectores si $0 < \lambda < 1$, y dilatación si $\lambda > 1$. Más aún, los mismos efectos, pero en sentido opuesto si $\lambda = -1$ y si $-1 < \lambda < 0$. Un caso donde se puede observar un aspecto geométrico conocido es para $\lambda = -1$, pues este corresponde a la rotación en 180º con centro en el origen para vectores en $\mathbb{R}^2$.

Pregunta 2: ¿Qué efecto ejercen las transformaciones que corresponden a multiplicar por un escalar un vector $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$?

El diseño de esta pregunta busca una descripción a nivel funcional de las transformaciones que equivalen a multiplicar por un escalar. Es decir, dada una determinada condición sobre el escalar, a este le asocia un efecto geométrico, ya sea contracción, dilatación, nulidad o cambio de sentido de algún vector. Se espera que los estudiantes piensen en otro tipo de transformaciones que pueden ser descritas mediante el múltiplo escalar.

Pregunta 3: Sea R la rotación 180º con centro en el origen ¿qué les sucede a los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$ si se aplica dicha transformación? Dibuje los vectores resultantes y explique sus procedimientos.

$$v = (2, 3); \quad w = (-1, -2); \quad t = (2, 4); \quad u = (3, -1)$$

¿Qué puede concluir de aplicar una rotación de 180º con centro en el origen a un vector k de $\mathbb{R}^2$?

Esta pregunta permite evidenciar las concepciones de los estudiantes sobre la rotación de un vector en $\mathbb{R}^2$ respecto al origen y su relación con el producto por un escalar; por tanto, es necesario que previamente haya construido el concepto de rotación de un vector con un punto de referencia y un ángulo de rotación en grados (concepción Acción). Así el estudiante puede aplicar *Acciones* determinando geométricamente cada vector solicitado o plantear una forma general que le permita encontrar los casos particulares. La interpretación de la función rotación 180º de un vector (x, y) como $-1(x, y)$ es evidencia de una estructura *Proceso* de la función rotación 180º.

Caso 2: Estudiantes universitarios de primer año, que en un primer curso de Álgebra Lineal abordaron el concepto de valor y vector propio con un enfoque algebraico. El instrumento para este caso estaba conformado por las preguntas del caso anterior y adicionalmente P5 y P6. Dicho cuestionario fue analizado para mostrar evidencias de las principales estructuras mentales de los estudiantes durante la investigación.

Pregunta 4: Suponga que tiene un vector de la forma $v=(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ dibuje y explique qué sucede en cada situación: si se pondera por 3, por $\frac{1}{3}$, por 0, por -1 y por -3. Describe todos los procedimientos. Con base en lo realizado, ¿qué le sucede al vector si se pondera por un escalar λ cualquiera?

Con esta pregunta, se busca que el estudiante dé cuenta del múltiplo escalar en un contexto algebraico, geométrico y funcional. Es decir, aquí el *Proceso* de estirar y encoger vectores es coordinado con la noción de función como correspondencia, lo que le permite dar cuenta de un nuevo *Proceso* $f(x, y)=(\lambda x, \lambda y)$ que transforma vectores de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. En cada ítem se presentan las distintas posibilidades en donde los vectores se pueden dilatar, contraer, anular, y cambiar de sentido (Representación geométrica y algebraica). La finalidad es que el estudiante de cuenta de un rótulo algebraico y geométrico para cada uno de los casos que se proponen en los ítems, esto puede ser evidencia de la construcción del *Proceso* de múltiplo escalar. Por otro lado, puede que los estudiantes den cuenta de una explicación parcial, solo geométrica o puramente algebraica sin lograr una conexión entre ambas, esto indicaría que persiste una estructura *Acción* del múltiplo escalar, por sobre el *Proceso*.

Pregunta 5: Escriba de forma matricial el efecto de transformación de la ponderación escalar de un vector $v=(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Explique dicha relación de forma geométrica.

La comprensión del múltiplo escalar como una relación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, puede promover su construcción en términos matriciales. Previo a la formulación de esta pregunta, los estudiantes han determinado el producto de una matriz A con vectores específicos, además han analizado el efecto geométrico. Mediante la interiorización de la *Acción* producto de una matriz por un vector el estudiante puede imaginar o describir sin realizar explícitamente los cálculos, la transformación que realiza determinada matriz. La coordinación entre la *Acción* anterior interiorizada y el *Proceso* de imagen de una transformación a partir de la comparación, les permite a los estudiantes asociar matrices a ciertos tipos de transformaciones o efectos geométricos. Particularmente pueden asociar la matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ a la transformación de multiplicar un vector por el escalar λ.

> *Pregunta 6:* Escriba de forma matricial la transformación de rotar un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ en 180° respecto al origen. ¿Qué relación existe con la ponderación por un escalar?

Esta pregunta fue diseñada con el propósito de evidenciar si los estudiantes reconocen la transformación de rotar vectores 180° en términos de una matriz y su relación con la matriz de producto por un escalar λ. Se espera que los estudiantes mediante la comparación del resultado de multiplicar un vector por dicha matriz y multiplicar el vector por el escalar –1 construyan la igualdad. Consideramos que los estudiantes que pueden hacer dicha comparación de igualdad, pueden reconocer que se tiene el mismo efecto, aunque la operación realizada sea de diferente naturaleza.

4. Análisis de datos

El análisis de las respuestas de los estudiantes, conjuntamente con los comentarios que ellos hicieron en estas respuestas, permitió identificar las construcciones mencionadas en los modelos cognitivos descritos en la sección anterior.

Se analizaron los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento por los investigadores, quienes los negociaron en términos de las estructuras y mecanismos descritos en los modelos hipotéticos DG_0 y DG_1.

4.1. *Caso 1: Estructuras y mecanismos evidenciados por estudiantes de enseñanza secundaria respecto a los conceptos previos*

Multiplicación por un escalar como una transformación que estira y contrae vectores: en las respuestas de algunos estudiantes aparecen con frecuencia los términos: estirar, alargar, aumenta su longitud, encoger, achicar y disminuir su longitud, como una interpretación del múltiplo escalar. En la pregunta 1, E2 hace el dibujo presentado en la Figura 4 y escribe "*Es el doble del vector original, es como estirar sobre la misma recta una vez más".* Lo anterior aparece como argumento, cuando E2 trata de explicar lo que sucede para el caso de $\lambda = 2$ en la pregunta 1.

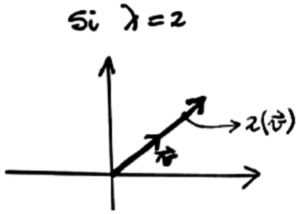
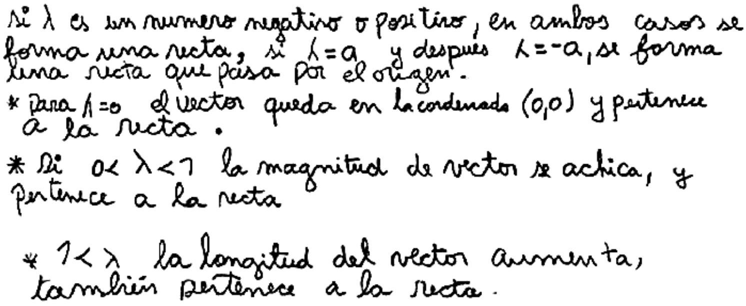


Figura 4. E2 interpretando el múltiplo escalar de un vector *v*

En la pregunta 2, E4 se refiere al múltiplo escalar de un vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ como: *"En algunos casos aumenta la longitud, también puede disminuir o cambiar de sentido"*. Esta forma de pensar de E4, le permite centrar su atención en ciertos intervalos, de tal manera, que pueden precisar condiciones parciales de λ asociadas a efectos geométricos de estirar o encoger. La Figura 5 muestra evidencia de un establecimiento parcial de las condiciones relacionadas con el múltiplo escalar. E4 reconoce que al tomar un vector y aplicarle diferentes valores de λ en la multiplicación por un escalar, los vectores resultantes están sobre la misma recta que pasa por el origen. Aunque E4, piensa en valores negativos para el escalar, no menciona explícitamente que la transformación múltiplo escalar en este caso cambia el sentido del vector resultante. Sin embargo, E4 puede establecer explícitamente los intervalos para valores de $\lambda > 0$ tal que los vectores resultantes *"achica(n) su magnitud"* o *"aumenta(n) su magnitud"*.



si λ es un numero negativo o positivo, en ambos casos se forma una recta, si $\lambda=a$ y despues $\lambda=-a$, se forma una recta que pasa por el origen.

* para $\lambda=0$ el vector queda en la cordenada (0,0) y pertenece a la recta.

* si $0<\lambda<1$ la magnitud de vector se achica, y pertenece a la recta

* $1<\lambda$ la longitud del vector aumenta, también pertenece a la recta.

Figura 5. E4 estableciendo condiciones sobre el múltiplo escalar de un vector *v* de $\mathbb{R}^2$

Concepción Proceso de la Rotación 180º con centro en el origen: la aplicación de la *Acción* rotar 180° con centro en el origen sobre la interpretación geométrica, permite que los estudiantes reflexionen sobre las características generales de la Rotación 180º. Por ejemplo, E3 escribe: "*En los planos se observa que los vectores cambian de cuadrante y cambia su sentido. Esto es como aplicar una rotación 180º"*. La concepción *Proceso* de la rotación 180º, permite que E3 le asigne a un vector *v* el vector –*v* y lo rotule para que describa una relación funcional desde la interpretación geométrica presentada. E3 escribe: “*Si el vector que se rota es de la forma* (*x, y*) *este al ser rotado 180º quedará de la forma* (–*x,* –*y*)”. La conclusión general es que E3 construye y evidencia la estructura *Proceso* de Rotación, que se muestra en la Figura 6.

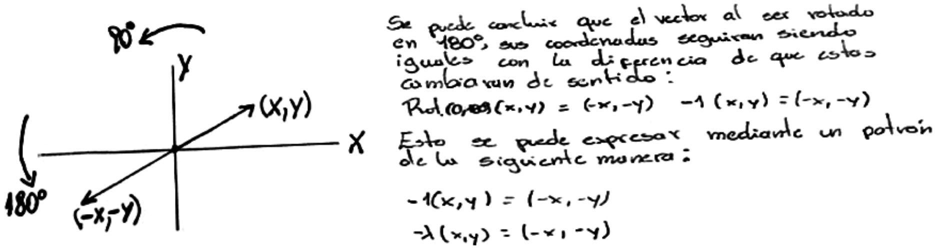


Figura 6. E3 determinando vectores a través de una Rotación en 180º

Algunos de los estudiantes muestran no haber construido el *Proceso* de rotación y la razón de esto parece estar asociada con no poder relacionar a (*x*, *y*) con su inverso aditivo, lo que implicaba la construcción de una relación funcional de correspondencia.

Concepción Proceso de la función $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ *vectores que se estiran y contraen (Proceso P2)*: la construcción de este *Proceso* implica que los estudiantes logren construir una relación funcional asociada al múltiplo escalar, es decir, deben ser consciente de todos los valores reales que puede tomar el escalar λ y que puede ser multiplicada por cualquier vector $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$. La reflexión sobre la correspondencia entre un escalar y un vector con el vector resultante, generan la construcción del *Proceso* como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

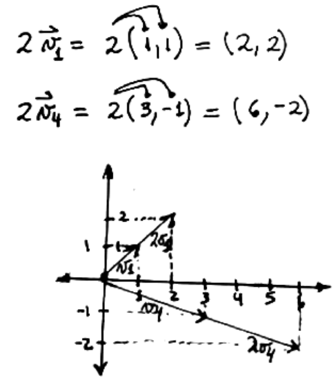


Figura 7. E3 generando la construcción de vectores que se estiran y contraen, como una función.

Las *Acciones* que realiza el estudiante E3 en la Figura 7 están asociadas con la pregunta 1. Después de analizar y resolver la pregunta 4 plantea la siguiente reflexión:

> E3: Si consideramos un vector $\vec{s}$, donde sus coordenadas son (x, y). Entonces:
>
> $$f(\vec{s}) = \lambda\,(\vec{s}) = \lambda\,(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$
>
> Donde λ multiplica a cada coordenada y puede disminuir o aumentar la magnitud del vector.

El trabajo realizado por el estudiante E3, muestra la relación que establece entre las diferentes interpretaciones de la construcción de la función *f*, la concepción *Proceso* de dicha función le permite a E3 dar paso a la construcción *Proceso* de múltiplo escalar.

Coordinación entre Proceso P2 y Proceso de rotación de 180° *con centro en el origen*: E5 al igual que E3 muestra haber construido el *Proceso* de la función *f*, sin embargo, adicionalmente evidencia una estructura *Proceso* de rotación de 180° y la coordinación entre dichos *Procesos*. En relación con esto último, las reflexiones presentadas por E5 en la pregunta 4, muestran que puede coordinar esos *Procesos* y describir de forma más clara el múltiplo escalar. A continuación, se muestra lo que escribe E5 en sus conclusiones.

> E5: En conclusión, tenemos que cuando ponderamos, modificamos las magnitudes del vector, –o sea sus coordenadas–. Esto se expresa como una función: si tenemos un vector $\vec{v}$ como coordenadas (x, y) entonces $f(\vec{v}) = (\lambda x, \lambda y)$.
>
> Donde si el valor de λ está entre $0 < \lambda < 1$ el vector disminuye su magnitud.
>
> Donde si el valor de λ es mayor a 1 el vector aumenta su magnitud.
>
> Donde si el valor de λ es negativo el vector rota en 180º y puede aumentar o disminuir su magnitud.
>
> Se puede concluir que la ponderación nos entrega los múltiplos de un vector.

El mecanismo de coordinación que evidencia E5 en sus conclusiones pone juntos los *Procesos P2* y la rotación de 180° en uno *Proceso* único, definido como el *Proceso* múltiplo escalar de un vector.

En general el trabajo realizado por los estudiantes del Caso 1, muestra la importancia del mecanismo de *coordinación* para evidenciar características geométricas, analíticas y algebraicas del múltiplo escalar como *Proceso*. En algunas respuestas de los estudiantes no se identificaron evidencias de una concepción *Proceso* de múltiplo escalar y esto parece estar relacionado con el dominio de conjuntos numéricos. En la medida que los estudiantes piensen y reflexionen en escalares más allá de los números enteros, pondrán estructurar cómo actúa la función múltiplo escalar para valores en el conjunto de los números reales. Desde la enseñanza secundaria, esto último lo hemos considerado un avance hacia la comprensión integral de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ en el primer año de universidad.

4.2. *Caso 2: Estructuras y mecanismos evidenciados por estudiantes de primer año de universidad*

Concepción Proceso de multiplicación por un escalar como "generador" de rectas con parámetro λ: En general, la ecuación vectorial de la recta en el plano que pasa por el punto P_0 y tiene la dirección del vector v, se puede escribir $r=P_0+tv$, $t\in\mathbb{R}$. En particular, si consideramos una recta que pasa por el punto $\mathrm{P}_0=(0, 0)$, la ecuación se reduce a $r=tv$. Esto último desde el punto de vista del Álgebra Lineal es un tipo de combinación lineal (con $v\neq 0$), en la cual el conjunto $\{tv\colon t\in\mathbb{R}\}$ representa el conjunto de combinaciones lineales del vector v, conocido como espacio generado por v, que en este caso corresponde a una recta. En este escenario la construcción del producto de un valor propio λ por un vector propio v se interpreta entonces, como la generación de una recta con vector director v, siendo asimilada como copias re-escaladas del mismo vector v.

Esta interpretación se destaca en el trabajo realizado por los estudiantes universitarios. De hecho, en las conclusiones de la pregunta 4, E7 (ver Figura 8) relaciona el múltiplo escalar con la idea de "generador" de una recta. Mediante la imagen presentada en la Figura 8, E7 evidencia al escalar λ como un parámetro, que al asignarle distintos valores reales multiplica cierto vector v generando una recta que pasa por el origen y coincide con ambos sentidos del vector. E7 al ubicar el vector inicial v en el primer cuadrante, encuentra una semirrecta con valores positivos de λ cuyo sentido está dado por el vector v y para los negativos una semirrecta con valores negativos de λ, cuyo sentido está dado por una rotación de 180° del vector v. Como se muestra en la Figura 8, E7 a estos los define como "Recta" en el primer y tercer cuadrante, E7 explica: "estos vectores generan una recta". Esta explicación dada por E7 permite reconocer que su forma de pensamiento es dinámica, esto es, E7 puede imaginar que cualquier múltiplo escalar de un vector v está contenido en una misma recta.

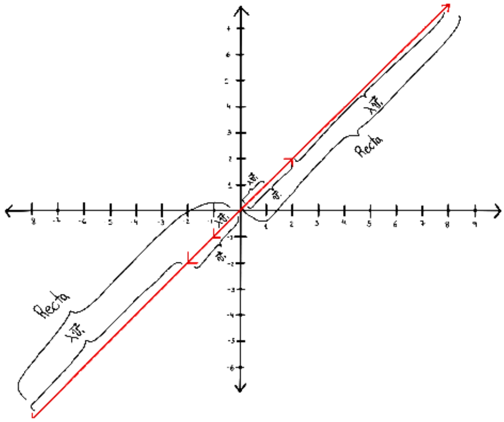


Figura 8. E7 generando una recta a partir de un vector

Coordinación del Proceso *multiplicación por un escalar y* Proceso *de producto de una matriz-vector* (Proceso 3): las respuestas de la pregunta 5 y 6 solo provienen de los estudiantes de primer año de universidad y sus explicaciones permitieron identificar otros conceptos característicos de un primer curso de Álgebra Lineal. En relación con esto último, E8 muestra haber construido el *Proceso* de la función múltiplo escalar, como se muestra en la primera línea de la Figura 9, E8 puede expresar el efecto de transformación para cualquier vector *v*. E8 muestra la relación que ha estructurado entre la forma funcional de la transformación múltiplo escalar y la matriz que describe dicho efecto. En la línea 2 de la Figura 9, E8 continua su desarrollo lógico de izquierda-derecha y de arriba-abajo. E8 reconoce que la transformación identidad tiene asociada la matriz identidad, $\lambda(x,y)=\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. Al finalizar sus procedimientos escribe: “La forma matricial estará dada por la matriz $\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}$”. Todo esto evidencia que E8 ha construido el *Proceso* producto matriz-vector dado que puede pensar en dicha operación como una transformación de vectores. Gracias al mecanismo de coordinación bajo la relación de igualdad, E8 puede expresar (en figura 9) la equivalencia del efecto de transformación entre el producto matriz-vector y el múltiplo escalar.

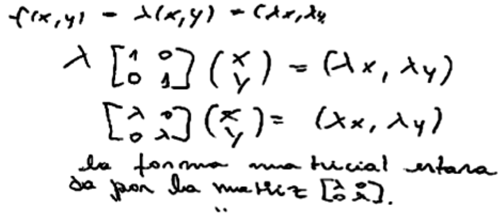


Figura 9. Razonamiento de E8 para describir el efecto de la multiplicación por un escalar mediante una matriz.

Coordinación del Proceso *rotación 180º y el* Proceso *matriz-vector* (Proceso 3): Ahora E8 muestra evidencia de haber construido el *Proceso* de rotación de 180° dado que puede pensar en dicha transformación mediante su representación funcional, como se muestra en la primera línea de la Figura 10.

$$f(x,y) = -1(x,y) = (-x,-y)$$

$$-1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (-x,-y)$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (-x,-y)$$

$$A_{\substack{\text{rotación}\\ 180°}}\, V_e = \overrightarrow{V_{\text{rotado}}}$$

$A_{\substack{\text{rot}\\ 180°}} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ es la matriz que representa la rotación en 180° con respecto al origen de dos variables.

Figura 10. E8 identifica el *Proceso* rotación en 180º con una matriz

El razonamiento de E8 en sus respuestas a P5 y P6 evidencia que ha interiorizado la *Acción* de multiplicar una matriz por un vector y asociar este *Proceso* con representaciones funcionales de transformaciones lineales. Aunque el estudiante E8 no hace uso del concepto de base, muestra indicios de relacionar las transformaciones geométricas con las matrices. Los estudiantes del Caso 2, evidencian la construcción de *Procesos* asociados a los conceptos de valor y vector propio de $\mathbb{R}^2$ desde la interpretación de transformación lineal como función y como matriz. La reflexión sobre las *Acciones* múltiplo escalar y producto matriz-vector son fundamentales en la construcción del concepto de valor propio de $\mathbb{R}^2$. En la medida que los estudiantes construyan los *Procesos* asociados a estas *Acciones*, pueden comparar mediante la igualdad las transformaciones generadas y entender que, aunque son transformaciones de diferente naturaleza existen casos en los cuales la transformación realizada a un vector es la misma.

Un aspecto para destacar en esta investigación es el rol articulador que muestra ser la geometría en un acercamiento a la construcción de los valores y vectores propios. Como se modela en las DG`s propuestas, ellas inician la construcción con la aplicación de *Acciones* sobre *Objetos* geométricos, y en los casos de estudio analizados, los estudiantes con base en esas construcciones geométricas iniciales muestran desarrollar construcciones más complejas.

5. Discusión y conclusiones

Los resultados de esta investigación muestran las construcciones y mecanismos mentales que modelan el aprendizaje de los valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$, desde un primer acercamiento con estudiantes de educación secundaria DG_0, hacia uno de enseñanza universitaria de primer año DG_1. En el primer modelo se destaca la rotación 180º con centro en el origen como un *Proceso* que permite obtener el inverso aditivo de un vector y el *Proceso* de múltiplo escalar, como una construcción importante para iniciar con el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ en estudiantes universitarios de primer año. En el segundo modelo, se ponen de relive la transformación lineal como *Proceso* y el efecto geométrico que ciertas matrices tienen sobre vectores de $\mathbb{R}^2$.

A continuación se muestran los modelos cognitivos refinados –por eso la R como subíndice– DG_{R0} y DG_{R1}, que dan cuenta del trabajo realizado por los estudiantes y por tanto se constituyen en DG´s refinadas que validan las estructuras y mecanismos mentales en la construcción de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$.

5.1. *DG_0 Refinada:* $\mathrm{DG}_{\mathrm{R0}}$

Los conocimientos previos para iniciar la construcción de los conceptos de valor y vector propio de $\mathbb{R}^2$ en la enseñanza secundaria son: la rotación de 180° con centro en el origen, la multiplicación por un escalar de vectores y su efecto geométrico para vectores en $\mathbb{R}^2$. Las estructuras y los mecanismos que los estudiantes en educación secundaria deben desarrollar sobre dichos conceptos, se muestran en la Figura 11 y se describen sintéticamente en la misma.

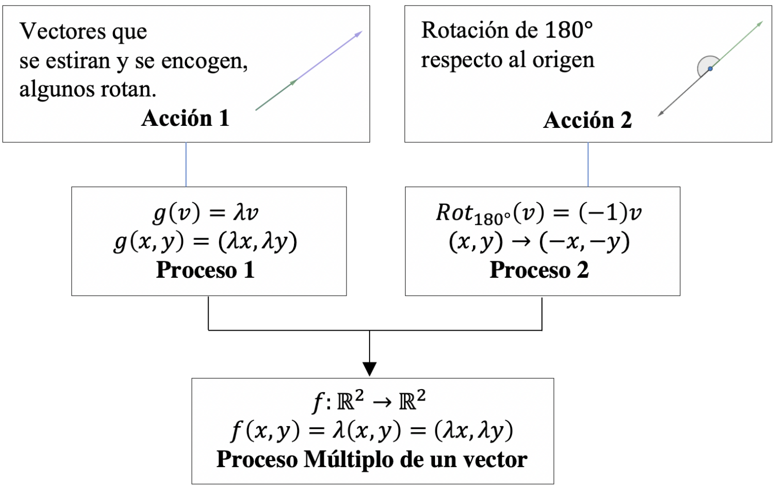


Figura 11. DG_{R0} de los conocimientos previos para la construcción del concepto valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$: Interiorización de Acciones y coordinación de Procesos.

La construcción de los conceptos previos comienza con la *Acción* encontrar múltiplos escalares de vectores específicos, sin embargo, la reflexión sobre dicha *Acción* acompañada de una noción estable de número real permite la interiorización en el *Proceso 1*. Esta estructura se evidencia cuando se establece una correspondencia entre intervalos de valores para el escalar y el efecto geométrico que sufren. Por otra parte, la *Acción 2* interiorizada *(Proceso 2)* de rotar un vector v de $\mathbb{R}^2$ en 180° respecto al origen, implica reconocer dicho efecto como una transformación que asocia a cada vector su inverso aditivo, esto es $v \to (-1)v$ como una función $Rot_{180}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Rot_{180}(v) = (-1)v$.

En la figura 11 se muestra que el *Proceso* múltiplo escalar resulta de la coordinación entre el *Proceso 1* y el *Proceso* rotación 180° con centro en el origen (*Proceso 2)*. Dicha coordinación permite entender todos los casos en los cuales el múltiplo escalar de un vector tiene una transformación particular, es decir, reconocer que λ está condicionado: si $\lambda = 1$ el vector se mantiene igual; si $\lambda = -1$ el vector rota un ángulo de 180º; si $0 < \lambda < 1$ el vector se contrae un valor λ; si $-1 < \lambda < 0$ el vector se contrae un valor λ y gira un ángulo de 180º; si $\lambda > 1$ el vector se estira; y si $\lambda < -1$ el vector se estira y rota 180º. Con base en las evidencias mostradas por los Casos de estudio, la interiorización de las *Acciones 1* y *2*, permite que los estudiantes estructuren la ponderación por un escalar de un vector v como un parámetro λ que determina una recta y que contiene al vector v que pasa por el origen. En relación con esto último, una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen puede ser entendida como el espacio generado por un vector $v \in \mathbb{R}^2$.

5.2. *DG_1 Refinada:* $\mathrm{DG}_{\mathrm{R1}}$

Se presenta un modelo cognitivo que busca explicar cómo estudiantes universitarios de primer año pueden construir desde una perspectiva geométrica el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. En la Figura 12 se muestra que la construcción comienza con la realización de las *Acciones 1, 2* y *3* pero en correspondencia con la transformación lineal y el producto matriz-vector. La interiorización de la *Acción 1* permite reconocer que tal producto transforma vectores en vectores, a veces rotándolos y otras estirándolos o comprimiéndolos. De las evidencias mostradas por los Casos de estudio, se obtuvo que la interiorización de las *Acciones 1* y *2* se torna fundamental para que el estudiante pueda caracterizar las transformaciones con base a sus conocimientos previos; es decir, identificar aquellas transformaciones que verifican las condiciones de linealidad y las que no. El *Proceso* de transformación lineal en este contexto le permite al estudiante discriminar y diferenciar la transformación de desplazamiento y rotación, la primera no es lineal y la segunda sí. Las transformaciones lineales que se identificaron pueden compararse con la transformación que genera el producto matriz-vector, es decir, mediante la igualdad es posible coordinar el *Proceso* de transformación lineal y el *Proceso* de producto matriz-vector a través de la matriz $A=[T(1,0)\ T(0,1)]$. El estudiante puede relacionar cada transformación lineal con una matriz, que describe el mismo efecto.

El *Proceso* de matriz asociada implica entender que ciertos valores en las entradas de una matriz $A \in M_{2\times 2}$ determinan efectos geométricos al multiplicar vectores con dicha matriz. Por ejemplo, la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ rota un vector de $\mathbb{R}^2$ en un ángulo $\frac{\pi}{2}$ y en sentido horario. Por otra parte, el *Proceso* de múltiplo escalar se relaciona con identificar la colinealidad entre el vector y su transformación. Ahora, mediante la comparación por la igualdad es posible identificar algunos casos en los cuales la deformación de vectores bajo una matriz o una transformación lineal coincide con el efecto de multiplicar por un escalar. Tales escalares con sus respectivos vectores que verifican la igualdad pueden denominarse e identificarse como valores y vectores propios de una transformación lineal o de la matriz asociada a ella en $\mathbb{R}^2$.

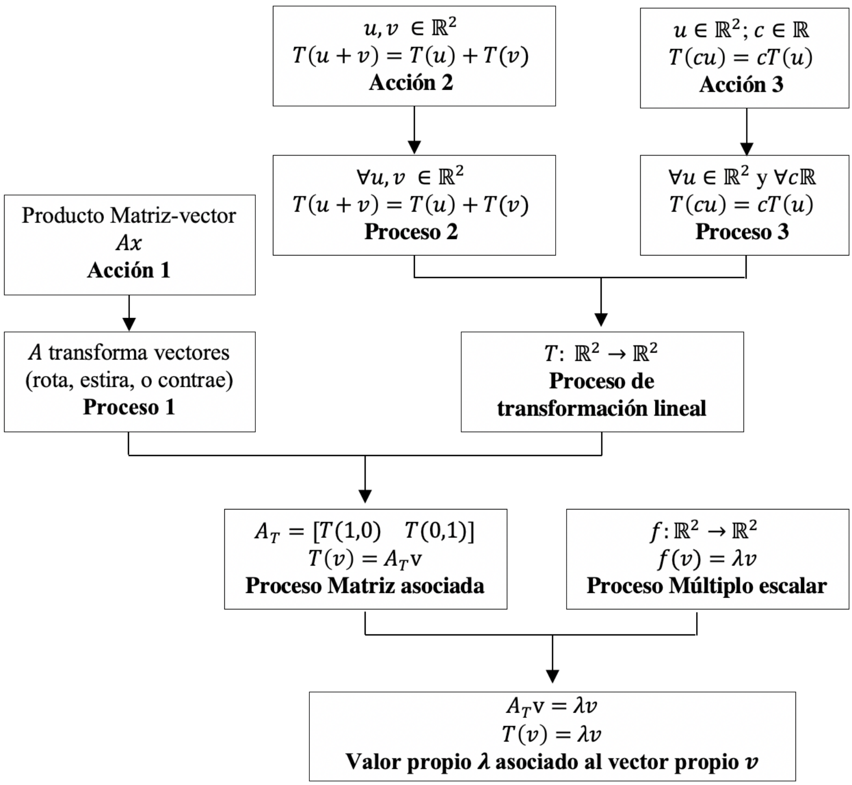


Figura 12. DG_{R1} un modelo cognitivo de la construcción de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$.

5.3. *Reflexiones finales*

Los modelos cognitivos descritos en las Figuras 11 y 12, son el resultado de la aplicación del Ciclo de Investigación planteado por la teoría APOE en el nivel de secundaria para DG_0 y en nivel universitario (estudiantes de Pedagogía en Matemáticas de primer año) para DG_1. El diseño permanente de actividades para la clase y su validación permitió determinar los elementos expuestos en ambos modelos y sus relaciones.

El análisis de los resultados muestra que los estudiantes que logran la construcción del concepto previo rotación de 180º respecto al origen como un *Proceso 2* en DG_0, logran estructurar el *Proceso de* Múltiplo de un vector en $\mathbb{R}^2$. Las estructuras *Proceso rotación en 180º* y *Proceso de* Múltiplo de un vector en $\mathbb{R}^2$, resultan fundamentales para que los estudiantes de primer año de universidad construyan el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. Estas pueden fundamentar la construcción abstracta del concepto para transformaciones lineales definidas de un espacio vectorial de dimensión finita en él mismo.

Como resultado de esta investigación, se proponen los modelos DG_{R0} y DG_{R1} a la comunidad interesada en el aprendizaje del concepto de valor y vector propio. Estos modelos de acuerdo con las evidencias presentadas, representan una ruta cognitiva viable, desde la enseñanza secundaria hasta la universitaria, con base en una perspectiva geométrica que fomenta la construcción de formas más abstractas desde la visualización, tal como lo señala para la Transformación Lineal Oktaç, (2018), lo que tributa a proporcionar recomendaciones didácticas para superar dificultades que han sido expuestas en la literatura (Hillel, Sierpinska & Dreyfus, 1998; Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000; Dorier y Sierpinska, 2001; Soto, 2005; Klasa, 2010; Parraguez y Oktaç, 2010; Rensaa, Hogstad y Monaghan, 2020; Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014; Rach y Fillebrown, 2016; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016; Harel, 2017; González y Roa-Fuentes, 2017; Bouhjar, Andrews-Larson, Hadier y Zandieh, 2018; Oktaç, 2019) de cómo se construyen y aprenden los conceptos del Álgebra Lineal. Sumado a lo anterior, para los propósitos de Educación STEM, que apuntan a profundizar la comprensión conceptual de la matemática, el manejo de la concepción geométrica de los conceptos se torna fundamental, para ampliar su comprensión a través de su uso social y contextos STEM culturalmente relevantes (Roehrig, Moore, Wang and Park, 2012).

Los resultados de este estudio, sin embargo, van más allá de la validación o refinación de los modelos cognitivos expuestos. Se puede señalar el estudio de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$ desde la rotación en 180º y la homotecia (Multiplicación por un escalar). Además, se ponen de relieve las construcciones que resultan indispensables: la construcción *Proceso* de la rotación en 180º con centro en el origen como una función (que dado un vector v entrega por resultado el vector $-v$) y de la multiplicación por un escalar con su efecto geométrico. Estas construcciones muestran la importancia del *Proceso T*, el rol de *T* como función (pegunta 2) y su desempeño en la construcción *Proceso* de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$, como paso fundamental para su comprensión. Esta investigación proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los estudiantes y a sus estrategias, para construir conceptos matemáticos.

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1180468.

Al Proyecto *C-2018-01* y el Programa de movilidad de la *Vicerrectoría de Investigación y Extensión* (VIE–UIS) de la *Universidad Industrial de Santander* (Colombia).

Los autores agradecen la buena disposición de los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer. Doi: 10.1007/978-1-4614-7966-6.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. y Albarracin, L. (2017). Emphasizing visualization and physical *applications* in the study of eigevectors and eigenvalors. *Teaching Mathematics and its applications* 36, 123- 135. Doi: 10.1093/teamat/hrw018.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. y Jordán, E. (2017). A teaching proposal for the study of eigevectors *and* eigenvalors. Jour*nal of Technology and Science Education 7*(1), 100 - 113. Doi: 10.3926/jotse.260.

Bouhjar K., Andrews-Larson C., Haider M. y Zandieh M. (2018). Examining Students' Procedural and *Conceptual* Understanding of Eigenvectors and Eigenvalues in the Context of Inquiry-Oriented Instruction. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. *ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. Doi:10.1007/978-3-319-66811-6_9.

Cook, K.L. & Bush, S. B. (2018). Design thinking in integrated STEAM learning: Surveying the landscape and exploring exemplars in elementary grades. *School Science and Mathematics*, *118*(3-4), pp. 93-103. 2018. ISSN: 1949-8594. DOI:10.1111/ ssm.12268.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (2000) The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra, in: D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Linear Algebra at University Level*, on ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001, pp. 255–274.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part I. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335-359.

González, D. y Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos *abstractos* a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias 35*(2), 89 - 107. Doi: 10.5565/rev/ensciencias.2150.

Harel, G. (2017) The learning and teaching of linear algebra: observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69–95. Doi: 10.1016/j.jmathb.2017.02.007.

Hillel, J., Sierpinska, A., & Dreyfus, T. (1998). *Investigating linear transformations with Cabri*. In Proceedings of the International Conference on the Teaching of Tertiary Mathematics.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, *432*(8), 2100-2111.

Lay, D. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (3ª Ed.). México: Pearson educación.

McDonald, M., Mathews, D. y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. Research in Collegiate mathematics education IV. *CBMS issues in mathematics education* (Vol. 8, pp. 77–102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.

Oktaç, A. (2018). *Understanding and Visualizing Linear Transformations*. In: Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E., Xu, B. (eds) Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_26

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM.* Doi: 10.1007/s1185-019-01037-9.

Parraguez M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del *teorema* de cambio base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(2), 129-150. Doi: 10.5565/rev/ensciencias.1950.

Parraguez, M., y Oktaç, A., (2010). Construction of the vector space concept from the view point of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2112-2124. DOI: 10.1016/j.laa.2009.06.034.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Rash, A. y Fillebrown, S. (2016). Courses on the Beauty of Mathematics: Our Version of General Education Mathematics Courses, *PRIMUS*, 26:9, 824-836. Doi: 10.1080/10511970.2016.1191572.

Rensaa, R., Hogstad, N. y Monaghan, J. (2020). Perspectives and reflections on teaching linear algebra, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, hraa002. DOI: 10.1093/teamat/hraa002.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *13*(1),89-112.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modeles en ont les éléves? *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.

Rodríguez, M., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2018). Construcción Cognitiva del Espacio Vectorial R^2. RELIME: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 57-86.

Roehrig, G., Moore, T., Wang. H. H. & Park, M. S. (2012). Is Adding the E Enough? Investigating the Impact of K-12 Engineering Standards on the Implementation of STEM Integration. *School Science and Mathematics*, 112(1), 31-44. ISSN: 1949-8594. DOI: 10.1111/j.1949-8594.2011.00112.x.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100–120. Doi: 10.1016/j.jmathb.2015.06.005.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Soto, J. L. (2005). Algunas dificultades en la conversión gráfico-algebraica de situaciones de vectores. En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 193-199).

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Kluwer Academic Publisher: Dordrecht/Boston/London.

Thomas, M. O. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 275-296.

Yáñez, A. (2015). *Construcción de los conceptos de valores y vectores propios en* R^2 *y* R^3 *desde la teoría APOE.* Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Autores

Marcela Parraguez González. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.
0000-0002-6164-3056 marcela.parraguez@pucv.cl

Solange Roa-Fuentes. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
0000-0001-8580-2763 sroa@matematicas.uis.edu.co

Raúl Jiménez Alarcón. Universidad Católica del Norte, Chile.
0000-0001-6429-9820 rjimen@ucn.cl

Alexander Betancur Sánchez. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
0000-0003-2404-289X albetsan@correo.uis.edu.co