Conocimientos antecedentes al Teorema de Pitágoras: ¿qué saben los alumnos?

EDVCATIO PHYSICORVM
SIC ITVR AD ASTRA
QVO NON ASCENDAM?

ISSN 1870-9095

Alejandro Rosas Mendoza[1], Lilyana Keiko Amador Téllez[1]
[1]CICATA-Legaria, Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694, Miguel Hidalgo, CP 11500, Ciudad de México

E-mail: alerosas@ipn.mx

(Recibido el 28 de junio 2022, aceptado el 29 de julio de 2022)

Resumen

En este artículo presentamos un estudio exploratorio sobre los conocimientos previos que deben tener los alumnos de segundo año de secundaria (edad 13 años), para poder aprender el Teorema de Pitágoras mediante actividades didácticas basadas en modelación. 13 estudiantes respondieron un cuestionario diseñado para detectar qué es lo que sabían acerca de las características de triángulos rectángulos y cuadrados, al igual que los nombres de partes de esas figuras geométricas, y finalmente el cálculo de áreas y perímetros. Entre los resultados que se obtuvieron está que los alumnos confunden el área con el perímetro de una figura geométrica, también se encontró que no todos los alumnos conocen las características definitorias de un triángulo rectángulo.

Palabras clave: Características definitorias de figuras geométricas, conocimientos previos al Teorema de Pitágoras.

Abstract

In this paper we present an exploratory study on the prior knowledge that second-year high school students (age 13) must have, to learn the Pythagorean Theorem through didactic activities based on modeling. 13 students answered a questionnaire designed to detect what they knew about the characteristics of right and square triangles, as well as the names of parts of these geometric figures, and finally the calculation of areas and perimeters. Among the results obtained is that students confuse the area with the perimeter of a geometric figure, it was also found that not all students know the defining characteristics of a right triangle.

Keywords: Defining characteristics of geometric figures, knowledge prior to the Pythagorean Theorem

I. INTRODUCCIÓN

El profesor tiene muchos roles dentro del proceso educativo, uno de ellos es ser investigador, muy parecido a lo que hace un científico. La curiosidad, la capacidad de observar y de hacer una reflexión crítica permiten que mejore la enseñanza de su disciplina.

En este sentido, se realizó una observación general de la escuela y sus distintas características para recopilar elementos que ayudaran al diseño de la propuesta. El proceso de enseñanza-aprendizaje puede verse beneficiado si el docente encuentra una problemática y crea los elementos necesarios para subsanarla.

Elegimos una escuela secundaria general pública de la Ciudad de México, perteneciente a una zona cuya población de 3 a 24 años de edad está escolarizada. Sin embargo, el nivel de escolarización disminuye conforme aumenta el rango de edad (a partir de los 20 años). El nivel socioeconómico es bajo y medio, en algunos casos se observa pobreza extrema.

II. Origen del Problema

Albertí [1] menciona "Mediante la realización de actividades académicas sobre situaciones de la vida cotidiana que tarde o temprano acabarán viviendo, pueden aprender a responsabilizarse y a ser conscientes de lo que valen las cosas, de que hay que planificar y organizar las tareas, de anticipar y tomar decisiones que no siempre obedecen los aspectos de su gusto personal, sino racional" (p. 11). Desde hace mucho tiempo las matemáticas han sido incluidas en el currículo escolar buscando desarrollar el pensamiento matemático del estudiante; tradicionalmente, el contenido que se aborda en el aula es explicado por el profesor y al alumno en ocasiones se le presentan problemas de aplicación, la mayoría de las veces problemas inventados y alejados de la realidad. Estos problemas generan una falta de vínculo entre lo que se aprende y la utilidad que el alumno le puede dar, lo que provoca que el alumno pierda interés y motivación, lo que puede provocar que el conocimiento no sea aprendido o internalizado de manera estructurada y significativa, evitando se ponga en práctica a través de la resolución de problemas.

Los contenidos son trabajados de manera rigurosa, mecánica, memorística o procedimental; por lo que el alumno tiene dificultades para construir su propio aprendizaje, que sea significativo y que les permita trasferir estos conocimientos a otros aspectos de su vida. Farias y Pérez [2] consideran que la motivación es necesaria pues no basta con que el profesor explique bien el tema. Entonces, cultivar esta motivación a través de las actividades que llevamos al aula, con las herramientas apropiadas y que les permita hacer uso de sus sentidos, ayudará a minorizar las dificultades al abordar contenidos matemáticos.

El Teorema de Pitágoras es un contenido matemático que se aborda en el eje *Forma, Espacio y Medida* de tercer grado de educación secundaria de acuerdo al plan de estudios vigente [3], en el que se espera que los alumnos cumplan el aprendizaje de formular, justificar y usar el teorema. Se ha observado que logran deducir la relación que existe entre los cuadrados que se forman en los lados de un triángulo rectángulo, sin embargo, no logran establecer la expresión algebraica que los relaciona. Al no poder determinar la expresión, el docente debe proveerla y ayudarlos a trabajar algebraicamente con ella, por lo tanto, los estudiantes muestran dificultades y obstáculos para utilizar el teorema en la resolución de problemas contextualizados o del tipo geométrico por la falta del proceso que les permitiera aprender o internalizarlo.

En México el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) es una prueba objetiva y estandarizada utilizada para evaluar los campos disciplinares de Lenguaje y Comunicación, y Matemáticas, en alumnos de 6° grado de educación primaria y en 3° de la secundaria. A través de los resultados, permite aportar información relevante de acuerdo al logro educativo que han tenido de acuerdo a los aprendizajes claves de los Planes y Programas de Estudio.

El contenido matemático que corresponde al Teorema de Pitágoras es evaluado con un reactivo, y en los resultados de PLANEA del 2019 la escuela contaba con un 11% de alumnos en el nivel III, mayor al 8% del año 2015 [4].

TABLA 1. Porcentaje de alumnos de tercer grado de la escuela elegida y de escuelas parecidas a ésta.

	Porcentaje de alumnos en cada Nivel de Logro					
	Año	I	II	III	IV	Total**
Escuela elegida	2015	88	13	0	0	100
	2017	61	23	8	8	100
	2019	53	33	11	3	100
Escuelas parecidas a la elegida*	2015	66	24	7	3	100
	2017	67	22	8	4	100
	2019	58	25	10	7	100

* 2015 Generales Públicas de Distrito Federal en localidades de media marginación.

* 2017 Generales Públicas en el país en localidades de media marginación.

* 2019 Generales Públicas de Ciudad de México en localidades de media marginación.

** Los porcentajes están redondeados a enteros, por lo que las suma de éstos puede no ser 100.

Los reactivos relacionados con el Teorema de Pitágoras que incluía la prueba en los años 2017 y 2019, respectivamente se encuentran en las Figuras 4 y 5 [4]

El 59% de los alumnos lograron resolver correctamente el problema aplicado en 2017 y el 47% pudo encontrar la respuesta correcta en 2019 de los 48 alumnos que fueron evaluados en Matemáticas.

III. Estado del Arte

Vargas y Gamboa [5] diseñaron una estrategia metodológica con doce actividades en un grupo de noveno grado de educación secundaria en Costa Rica, compararon el nivel de razonamiento mostrado por los que trabajaron con el enfoque tradicional, presentando un estudio de corte cualitativo utilizando el modelo de Van Hiele para determinar el nivel de razonamiento logrado.

Como conclusión pudieron describir el nivel de razonamiento que mostraron los alumnos que trabajaron con GeoGebra y los que lo hicieron con el enfoque tradicional. Los que trabajan con el software, se sintieron más motivados a estudiar Matemáticas que aquellos que trabajaron de manera tradicional. También se logró que alumnos con bajas notas se animaran a participar mediante la discusión de ideas matemáticas ayudando a reafirmar la confianza en la interacción.

Guachiac [6] realizó una investigación en la que incorpora el uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas, específicamente con el tema Teorema de Pitágoras con adolescentes. El diseño fue pre experimental y se realizó con 40 estudiantes de tercero básico del instituto mixto de educación básica. Se eligió el software dinámico GeoGebra porque permite la visualización, construcción, manipulación y razonamiento de los conceptos que se necesitan para abordar el Teorema. El objetivo de la investigación fue explorar las habilidades en el desarrollo de la visualización y el razonamiento que lograban los estudiantes en las construcciones geométricas con el uso del software GeoGebra. Primero determinó el nivel de conocimiento que poseían los alumnos, en el que observó que tenían deficiencias en los conceptos básicos de geometría y álgebra, y que no podían representar algebraicamente un segmento y el área de un cuadrado.

Con un post test observó una mejora significativa en el nivel de conocimiento y de la formalización del Teorema. Concluyó que el uso del software mejora el aprendizaje de este objeto matemático, es funcional y efectivo, como método de enseñanza resultó en un aprendizaje significativo, cambió el ambiente y mostraron interés.

Pollak [7] menciona que en la década de los sesentas se comenzó a integrar las aplicaciones y la modelación en la educación matemática como parte de un movimiento conocido como las Nuevas Matemáticas. En esta vertiente, la idea es resolver un problema fuera de las matemáticas, el proceso comienza planteando una situación que se requiere entender matemáticamente hasta llegar a una imagen y a una formulación que permita obtener algunas respuestas. Zaldivar, Quiroz y Medina [8] resumen las etapas que Pollak planteó y que la conforman: primero, se identifica una cuestión basada en la realidad que se desee comprender, seguido de la sección de objetos importantes y la identificación de sus relaciones, es entonces cuando se trasladan en términos matemáticos para finalmente, formular matemáticamente una solución que permita resolver el problema.

Blum y Niss [9] definen un problema como una situación que implica una cuestión que reta de manera intelectual a un individuo que, por el momento, no posee los suficientes métodos directos, procedimientos o algoritmos para resolver dicha pregunta. Divide en dos tipos de problemas matemáticos: los que se basan en el mundo real y los que son matemáticamente puros, con sus propias soluciones dependiendo del tipo.

Lesh y Yoon [10] analizaron y reflexionaron por qué un alumno en situaciones reales lo hace bastante bien, aún cuando no ha tenido buenas notas en su vida escolar. Ellos consideran que las actividades que le permiten al alumno obtener modelos, también proporcionan la base para las actividades de exploración y aplicación de modelos, provocando que el estudiante se enfrente a la necesidad de obtener un modelo.

La modelación en la educación matemática ha sido vista como una estrategia metodológica innovadora a la enseñanza tradicional, y permite que el alumno logre desarrollar un modelo matemático a través de la movilización de sus saberes previos y las cuestiones que va planteando en el camino a éste.

De lo anterior se concluyó la necesidad de generar una actividad didáctica basada en modelación aplicando el Teorema de Pitágoras, para ser aplicada en clase. Sin embargo, nos preguntamos ¿cómo aplicar algo si no tenemos idea de lo que saben los alumnos?¿qué conocimientos previos requiere un alumno de tercer año de secundaria (14-15 años) para poder comprender y aplicar el Teorema de Pitágoras?

IV. METODOLOGÍA

Para identificar esos conocimientos previos diseñamos un cuestionario en línea utilizando Google Forms® de manera que, por medio del chat de Zoom®, los alumnos pudieran recibir la liga al cuestionario y lo contestaran al iniciar la sesión.

La escuela donde se realizó esta investigación se encuentra en una zona considerada de bajos recursos, y del total de los 24 alumnos que hay en el grupo E de tercer grado de secundaria, sólo se pudo trabajar con 18.

El cuestionario cuenta con cinco preguntas, las cuales contemplan que los conocimientos previos deseables para poder trabajar el Teorema de Pitágoras están relacionados con características básicas de figuras geométricas como el triángulo rectángulo y el cuadrado.

La primera pregunta se basa en la característica del triángulo rectángulo de tener un ángulo de 90°, y busca ver si el alumno puede identificar este ángulo en un triángulo. En la pregunta aparecen tres triángulos diferentes de acuerdo con la clasificación de sus ángulos. El primer inciso presenta un triángulo con un ángulo de 90°, el segundo triángulo tiene sus tres ángulos interiores agudos, y el último es un triángulo con un ángulo interior obtuso. Nosotros consideramos que identificar un triángulo rectángulo es clave para poder aplicar el teorema de Pitágoras.

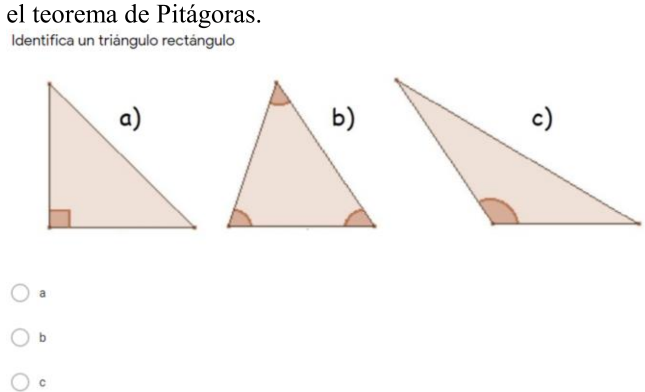

FIGURA 1. Triángulos de la primera pregunta.

La segunda pregunta aborda el conocimiento de los nombres de los lados de un triángulo. Estos nombres le permiten al alumno obtener resultados correctos al sustituir los lados de manera numérica en la fórmula del Teorema de Pitágoras, y llegar al resultado.

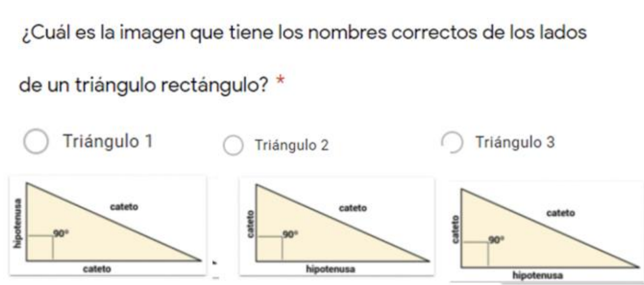

FIGURA 2. Triángulos con los nombres de sus lados de la segunda pregunta.

Debido a que la representación geométrica del Teorema de Pitágoras involucra cuadrados, es necesario que los estudiantes identifiquen que sus cuatro lados deben medir lo mismo.

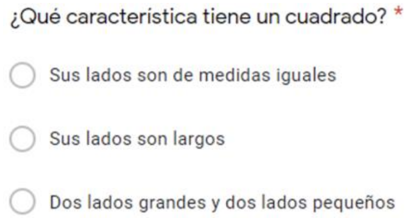

FIGURA 3. Característica de un cuadrado.

Nuevamente en la representación geométrica, se requiere conocer la forma de calcular el área de un cuadrado; por lo que en la tercera pregunta, el alumno debe escribir una expresión que él usaría para calcular el área de un cuadrado conociendo la longitud de un lado.

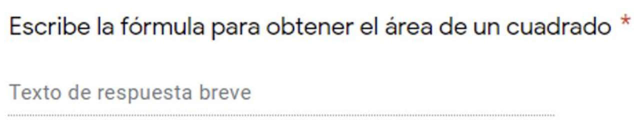

FIGURA 4. Pregunta abierta sobre una fórmula para calcular el área de un cuadrado.

Las dos preguntas finales aplican el conocimiento del cálculo de área del cuadrado porque es muy común que los alumnos confundan la fórmula para calcular el perímetro y el área. La cuarta pregunta presenta un cuadrado de lado 4cm, las opciones presentadas buscan conocer si el alumno confunde perímetro con área, por lo que deben elegir entre los posibles resultados cuya diferencia son las unidades. El segundo problema, presenta un cuadrado de lado 5 cm, si los alumnos confunden las fórmulas, obtendrán 20 cm en lugar del valor correcto de 25 cm^2.

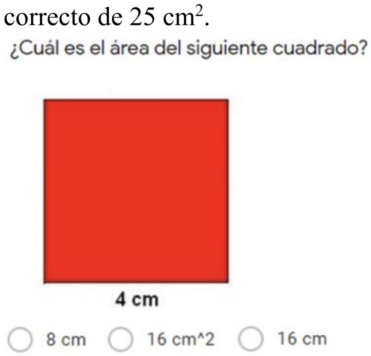

FIGURA 5. Pregunta de área de un cuadrado para detectar confusión entre área y perímetro.

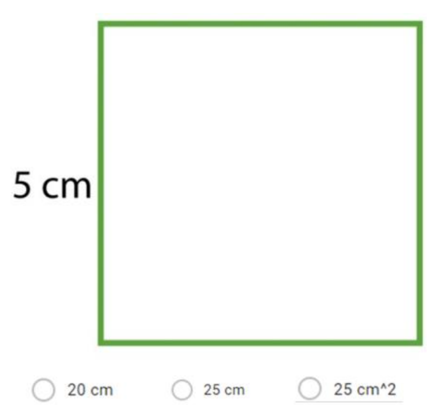

FIGURA 6. Pregunta de área de un cuadrado para detectar confusión entre área y perímetro.

V. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Buisán y Marín (citado por Arriaga [11]), conceptualizan la evaluación diagnóstica como “un proceso que trata de describir, clasificar, predecir y explicar el comportamiento de un sujeto dentro del marco escolar. Incluyen un conjunto de actividades de medición y evaluación de un sujeto (o grupo de sujetos) o de una institución con el fin de dar una orientación.” (p. 65). Por esta razón es necesario tomar en cuenta los conocimientos matemáticos previos que el alumno posee y que sirven de base para comprender el nuevo contenido. Buisán y Marín consideran el proceso diagnóstico “como una actividad de orientación con tres funciones básicas: preventiva, predictiva y correctiva, de esta manera, los resultados sirven para definir el desarrollo futuro y la marcha del aprendizaje del objeto de estudio” (p. 65).

Según Vinner y Hershkowitz “adquirir un concepto significa, entre otras cosas, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal como éste está concebido por la comunidad matemática” (como lo citaron Jaime Pastor, Chapa Aguilera y Gutiérrez Rodríguez [12], p.52). Vinner propone una diferencia entre un concepto y una imagen conceptual, es decir, entre el objeto matemático determinado por una definición formal y la representación operativa de ese concepto en la mente de una persona. Los conceptos que vaya adquiriendo el alumno poseerán propiedades necesarias y relevantes para ir formando prototipos propios, ejemplos concretos que se aprendan antes o vengan a la mente primero. Indagar sobre los conceptos necesarios para abordar un nuevo objeto de estudio y los prototipos que han formado, permitirá tomar decisiones durante la implementación.

VI. RESULTADOS

Aunque la muestra estaba planeada en 18 alumnos, únicamente 13 contestaron la evaluación. En la primera pregunta, se pretendió que, de un conjunto de tres triángulos, el alumno identificara el triángulo rectángulo. Se mostraron tres posibles respuestas, en el inciso a se trata de un triángulo que tiene un ángulo recto, el inciso b, un triángulo de 3 ángulos agudos y en el inciso c, un ángulo obtuso. 8 alumnos (62%) identifican correctamente la característica propia de un triángulo rectángulo de poseer un ángulo de 90°. Dos alumnos eligieron un triángulo acutángulo y tres alumnos, seleccionaron el triángulo obtusángulo.

Para lograr formular una definición formal se necesita que el alumno utilice la mayoría de los atributos relevantes del concepto a definir. En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos, y al lado opuesto se le nombra hipotenusa. En la segunda pregunta, nosotros considerábamos que los alumnos tenían los conocimientos previos porque ya que se había trabajado con triángulos rectángulos en sesiones anteriores. En los triángulos 1 y 2, el nombre hipotenusa se le colocó a un cateto por lo que son respuestas incorrectas. 7 alumnos (54%), eligieron la respuesta correcta, mientras que 6 alumnos tuvieron dificultades para ubicar la hipotenusa como el lado más grande y que se encuentra frente al ángulo recto.

Las siguientes cuatro preguntas estuvieron dirigidas a indagar sobre los conocimientos que los alumnos tienen sobre las características principales de los cuadrados y la obtención del área delimitada por uno. La tercera pregunta del cuestionario trata sobre la principal característica de un cuadrado. De acuerdo con el diccionario de geometría [13], un cuadrado es un paralelogramo que tiene los 4 lados iguales y los 4 ángulos rectos, por lo que se colocó entre las respuestas "sus lados son de medidas iguales". En cuarto grado de primaria el contenido de cuadriláteros se aborda en el tema "Clasificación de cuadriláteros con base en sus características", ahí es donde se comparan los ángulos de los cuadriláteros, se identifica los ángulos rectos y se indican los que son rectos, también se ven las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. 11 alumnos (85%) contestaron correctamente y 2 alumnos eligieron la opción de que la característica de un cuadrado es tener dos lados grandes y dos lados pequeños.

Para ver la formalización algebraica que han logrado los alumnos de tercer grado de secundaria, y con la intención de observar las distintas expresiones y fórmulas que ellos podían escribir, se decidió que la siguiente pregunta fuera abierta y que escribieran una fórmula para obtener el área de un cuadrado. Diez alumnos lograron escribir de alguna manera una expresión para lograr dicho cometido, pudimos observar expresiones algebraicas con literales en seis casos, como LxL que es la expresión estereotipada para trabajar áreas a través de fórmulas, aunque también se observaron respuestas sin literales como "lado por lado", "multiplicar dos lados", "lado x lado", "base x base", en las otras respuestas. Únicamente un estudiante escribió la fórmula $S \bullet S = S^2$, la cual incluye la potencia como una operación equivalente; dos estudiantes presentaron un ejemplo en su respuesta: "multiplicar 4 • 4 para obtener 16 cuadrados" y "A=L×L A=6m×6m=36m2". En una respuesta se observó la confusión que tiene el alumno entre obtener área y perímetro de un cuadrado; finalmente en otra respuesta, se puede observar la siguiente expresión "LxLxLxL".

Las dos preguntas finales del cuestionario le piden al alumno que determine el área de un cuadrado; en una pregunta la medida de la base del primer cuadrado es de 4 cm y en la segunda es de 5 cm. Para observar la posible confusión entre área y perímetro se decidió colocar dos incisos con la misma respuesta numérica, la diferencia entre ellas era las unidades en la que se encuentran expresadas, en un inciso se expresó en unidades cuadráticas y en el otro en unidades lineales. En ambas situaciones, sólo 6 estudiantes logran obtener la respuesta correcta incluyendo las unidades cuadráticas. En el primer caso, el 46.2% elige la respuesta 16 cm, sin embargo, no se puede determinar si la eligen por haber elevado al cuadrado la medida del lado o por haber multiplicado la medida del lado (4) por el número de lados (4); situación que es más clara en el segundo caso, en donde cuatro alumnos (30.8%) multiplican la medida del lado del cuadrado por el número de lados dando como resultado 20 cm; lo que da a entender que tres personas determinan el área de un cuadrado multiplicando la medida del lado por cuatro, que es el número de lados; es decir, el perímetro.

A pesar de que estos conocimientos se estudian en la primaria, en los resultados obtenidos se observa que los alumnos tienen dificultades para identificar las figuras geométricas pues no logran reconocer las características más relevantes en el caso de triángulos y cuadrados, consideramos que sus imágenes conceptuales son pobres. Los estudiantes aún no formalizan el uso de literales en expresiones algebraicas, y utilizan poco el lenguaje algebraico para hacer generalizaciones. Al buscar obtener la solución a un problema que involucra determinar el área de una figura como un cuadrado, los alumnos hacen uso de los prototipos adquiridos de un concepto, sin embargo, se puede observar en sus respuestas que no han logrado adquirir una definición formal del concepto de área.

Estos resultados serán útiles en la continuación de esta investigación pues ayuda a identificar las dificultades que podrían tener los estudiantes para lograr una formalización del Teorema de Pitágoras.

VII. CONCLUSIONES

Este trabajo de investigación tuvo como punto focal encontrar los conocimientos que los estudiantes deben tener de manera previa a estudiar el Teorema de Pitágoras. Aunque el tema de figuras geométricas se estudia en varios años escolares, las respuestas obtenidas nos permiten decir que los alumnos no logran identificar de manera adecuada a un cuadrado, y además que ellos no han logrado adquirir una definición formal del concepto de área

La siguiente fase de esta investigación ahondará en el uso del Teorema de Pitágoras mediante una actividad didáctica basada en modelación.

REFERENCIAS

[1] Albertí, M., *Las matemáticas de la vida cotidiana*, (Colección Miradas Matemáticas, Catarata, España, 2018).

[2] Farias, D. and Pérez, J., *Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración*, Formación Universitaria **3**, 33-40 (1998).

[3] Secretaría de Educación Pública, *Matemáticas 3ro secundaria*, <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate3.html>, Consultado el 20 de mayo de 2022.

[4] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa, *Resultados PLANEA*, <https://historico.mejoredu.gob.mx/evaluaciones/planea/resultados-planea/>, Consultado el 20 de mayo 2019.

[5] Vargas, G. and Gamboa, A., *La enseñanza del teorema de pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el modelo de van hiele*, Uniciencia **27**, 95-118 (2013).

[6] Guachiac, M. A., *Geogebra y su incidencia en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras*, UNIVERSIDAD RAFAEL LANDÍVAR (2018)

[7] Pollak, H., *Mathematical modelling. A conversation with Henry Pollak* (W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss,

Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study) **10**, 109-120 (2007).

[8] Zaldívar, J. D., Quiroz, S.A. and Medina, G., *La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes*, IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH **8**, 87-110 (2017).

[9] Blum, W., and Niss, M., *Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction*, Educational Studies in Mathematics **22**, 37-68 (1991).

[10] Lesh, R. and Yoon, C., *What is the distinctive in (our views about) models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching?* (W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn and M. Niss, Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study) **10**, 161-170 (2007).

[11] Arriaga, M., *El diagnóstico educativo, una importante herramienta para elevar la calidad de la educación en manos de los docentes*, Atenas **3**, 63-74 (2015).

[12] Jaime Pastor, A., Chapa Aguilera, F. and Gutiérrez Rodríguez, A., *Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B.*, Epsilon **23**, 49-62 (1992).

[13] Definición de cuadrado. Diccionario de Matemáticas. < https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/geometria/cuadrado.html >, Consultado el 20 de mayo de 2022.